TD – Suites et séries de fonctions 2

Exercice de la banque CCINP n°10. — *Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on définit la fonction f_n par :*

$$f_n : x \longmapsto \left(x^2+1\right) \frac{ne^x + xe^{-x}}{n+x} .$$

1. *Démontrer que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur $[0,1]$.*
2. *Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} \displaystyle\int_0^1 \left(x^2+1\right) \frac{ne^x + xe^{-x}}{n+x} dx$.*

Exercice de la banque CCINP n°12. —

1. *Soit (f_n) une suite de fonctions de $[a,b]$ dans $\mathbf{R}$. On suppose que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur $[a,b]$ vers une fonction f, et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue en x_0, avec $x_0 \in [a,b]$. Démontrer que f est continue en x_0.*
2. *On pose, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$:*
$$g_n : x \longmapsto x^n .$$
La suite de fonctions $(g_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge-t-elle uniformément sur $[0,1]$?

Exercice de la banque CCINP n°14. —

1. *Soit a et b deux réels donnés avec $a < b$. Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur $[a,b]$, à valeurs réelles. Démontrer que si la suite (f_n) converge uniformément sur $[a,b]$ vers f, alors la suite $\left(\displaystyle\int_a^b f_n(x)\,dx\right)_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$.*
2. *Justifier comment ce résultat peut être utilisé dans le cas des séries de fonctions.*
3. *Démontrer que $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n}$.*

Exercice de la banque CCINP n°16. — *On considère la série de fonctions de terme général u_n définie par :*

$$\forall\, n \in \mathbf{N}^* \quad \forall\, x \in [0,1] \quad u_n(x) = \ln\left(1+\frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n} .$$

Si la série $\sum u_n(x)$ converge pour un réel $x \in [0,1]$, on pose $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left[\ln\left(1+\frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n} \right]$.

1. *Démontrer que S est définie sur $[0,1]$.*
2. *On définit une suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$ par, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $u_n = \ln(n+1) - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.*
   (a) *En utilisant $S(1)$ démontrer que la suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$ est convergente.*
   (b) *En déduire un équivalent simple de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ lorsque n tend vers $+\infty$.*
3. *Démontrer que S est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$ et calculer $S'(1)$.*

Exercice de la banque CCINP n°18. — *On pose, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$:*

$$u_n : x \longmapsto \frac{(-1)^n x^n}{n} .$$

On considère la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} u_n$.

1. *Étudier la convergence simple de cette série.*

On note D l'ensemble des x où cette série converge et $S(x)$ la somme de cette série pour $x \in D$.

2. (a) *La fonction S est-elle continue sur D ?*

(b) *Étudier la convergence normale, puis la convergence uniforme de cette série sur* D.

(c) *Étudier la convergence uniforme de cette série sur* $[0,1]$.

Exercice de la banque CCINP n°48. — $\mathscr{C}^0([0,1],\mathbf{R})$ *désigne l'espace vectoriel des fonctions continues sur* $[0,1]$ *à valeurs dans* $\mathbf{R}$. *Soit* $f \in \mathscr{C}^0([0,1],\mathbf{R})$ *telle que :*

$$\forall\, n \in \mathbf{N} \quad \int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t = 0\,.$$

1. *Énoncer le théorème de Weierstrass d'approximation par des fonctions polynomiales.*
2. *Soit* (P_n) *une suite de fonctions polynomiales convergeant uniformément sur le segment* $[0,1]$ *vers* f.
   (a) *Montrer que la suite de fonctions* $(P_n f)$ *converge uniformément sur le segment* $[0,1]$ *vers* f^2.
   (b) *Démontrer que :*
   $$\int_0^1 f^2(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 P_n(t)f(t)\,\mathrm{d}t\,.$$
   (c) *Calculer* $\displaystyle\int_0^1 P_n(t)f(t)\,\mathrm{d}t$.
3. *En déduire que* f *est la fonction nulle sur le segment* $[0,1]$.

Exercice de la banque CCINP n°53. — *On considère, pour tout entier naturel* n *non nul, la fonction* f_n *définie sur* $\mathbf{R}$ *par :*

$$\forall\, x \in \mathbf{R} \quad f_n(x) = \frac{x}{1+n^4x^4}\,.$$

1. (a) *Prouver que* $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f_n$ *converge simplement sur* $\mathbf{R}$. *On pose alors :*
   $$\forall\, x \in \mathbf{R} \quad f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)\,.$$
   (b) *Soit* $(a,b) \in \mathbf{R}^2$ *avec* $0 < a < b$. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f_n$ *converge-t-elle normalement sur* $[a,b]$ *? sur* $[a,+\infty[$ *?*
   (c) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f_n$ *converge-t-elle normalement sur* $[0,+\infty[$ *?*
2. *Prouver que* f *est continue sur* $\mathbf{R}^*$.
3. *Déterminer* $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

Exercice 1 ★☆☆ — *Soit la fonction :*

$$f : x \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n^2+x^2}}\,.$$

1. *Démontrer que la fonction* f *est définie sur* $\mathbf{R}$.
2. *Démontrer que la fonction* f *est continue sur* $\mathbf{R}$.
3. *Étudier la limite éventuelle de la fonction* f *en* $+\infty$.

`continuiteLimiteSommeSerieFonctions`

Exercice 2 ★☆☆ — *On considère la fonction :*

$$S : x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{1+n^2}\,.$$

1. *Démontrer que la fonction* S *est définie et continue sur* $\mathbf{R}_+$.
2. *Démontrer que la fonction* S *est de classe* $\mathscr{C}^1$ *sur* $\mathbf{R}_+^*$.
3. *Démontrer que la fonction* S *n'est pas dérivable en* 0 *à droite.*

`regulariteSommeSerieFonctions1`

Exercice 3 ★☆☆ — *Posons, pour tout nombre entier $n \geqslant 2$:*

$$f_n \left| \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x\, e^{-nx}}{\ln(n)} \end{array} \right. .$$

Démontrer que $\sum_{n=2}^{+\infty} f_n$ est bien définie sur $[0,+\infty[$, est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$, mais n'est pas dérivable en 0 à droite.

regulariteSommeSerieFonctions2 [indication(s)]

Exercice 4 ★☆☆ — *Soit S la fonction définie par*

$$S \left| \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x} \end{array} \right.$$

1. *Justifier que la fonction S est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$.*
2. *Préciser le sens de variation de la fonction S.*
3. *Démontrer que, pour tout $x \in]0,+\infty[$, $S(x+1)+S(x) = \dfrac{1}{x}$.*
4. *Donner un équivalent de S en 0.*
5. *Donner un équivalent de S en $+\infty$.*

regulariteEquationFonctionnelleEquivalentSommeSerieFonctions [indication(s)]

Exercice 5 ★☆☆ — *Soit $a \in]-1,1[$. Démontrer que la fonction*

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \sin(a^n\, x) \end{array} \right.$$

est bien définie et de classe $\mathscr{C}^\infty$.

sommeSerieFonctionsIndefinimentDerivable

Exercice 6 ★★☆ — *Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} n\, e^{-nx}$, pour tout $x > 0$.*

calculSommeSerie [indication(s)]

Exercice 7 ★★☆ — *Soient a, b des réels tels que $a < b$. Notons $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de fonctions sur $[a,b]$ telle que $f_0 \in \mathscr{C}^0([a,b],\mathbf{R})$ et, pour tout $n \in \mathbf{N}$ et tout $x \in [a,b]$*

$$f_{n+1}(x) = \int_a^x f_n(t)\ \mathrm{d}t$$

1. *Démontrer que la série de fonctions de terme général f_n converge normalement sur $[a,b]$.*
2. *Déterminer la somme de cette série.*

suitePrimitivesIterees [indication(s)]

Exercice 8 ★★☆ — *Soit la fonction*

$$f : x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{1+x^n}$$

1. *Déterminer le domaine de définition de f.*

2. *Démontrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur son domaine de définition.*
3. *Étudier la limite éventuelle de $f(x)$ quand x tend vers 1.*

regulariteLimiteSommeSerieFonctions

Exercice 9 ★★☆ — *Posons*

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}\setminus\mathbf{Z}^- & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\prod_{k=0}^{n}\frac{1}{x+k} \end{array} \right.$$

1. *Démontrer que f est bien définie.*
2. *Démontrer que, pour tout $x\in\mathbf{R}\setminus\mathbf{Z}^-$, $f(x)=e\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!\,(x+n)}$.*
3. *En déduire que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}\setminus\mathbf{Z}^-$.*

sommeSerieFonctionsProduitIndefinimentDerivable [indication(s)]

Exercice 10 ★★★ — *Posons, pour tout $n\in\mathbf{N}^*$*

$$f_n \left| \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{n+n^2x} \end{array} \right.$$

1. *Démontrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $]0,+\infty[$. On note*

$$f \left| \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_n \end{array} \right.$$

   sa somme.
2. *Démontrer que la fonction f est continue sur $]0,+\infty[$.*
3. *Déterminer la limite, ainsi qu'un équivalent simple, de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.*
4. *Déterminer la limite, ainsi qu'un équivalent simple, de $f(x)$ quand x tend vers 0^+.*

continuiteLimiteEquivalentSommeSerieFonctions [indication(s)]

Exercice 11 ★★★ — *Posons*

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}\setminus\mathbf{Z} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(x+n)^2} := \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=-N}^{N}\frac{1}{(x+n)^2} \end{array} \right.$$

1. *Démontrer que f est bien définie sur $\mathbf{R}\setminus\mathbf{Z}$. Est-elle périodique ?*
2. *Étudier la continuité de f.*

Posons

$$g : x \longmapsto \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi x)}$$

3. *Déterminer le domaine de définition de g.*
4. *Démontrer que la fonction $h := f-g$ admet un prolongement continu $\mathbf{R}$.*
5. *Démontrer que, pour tout $x\in\mathbf{R}$, $h\left(\dfrac{x}{2}\right)+h\left(\dfrac{x+1}{2}\right)=4h(x)$.*
6. *En déduire que $f=g$ et, donc que*

$$\forall x\in\mathbf{R}\setminus\mathbf{Z}\qquad \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi x)}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(x+n)^2}$$

equationFonctionnelleDeveloppementSerieFonctionsIndexeeZ [indication(s)]

Exercice 12 ★★★ — *On considère la fonction*

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(2^n x)}{2^n} \end{array} \right.$$

1. *Démontrer que la fonction f est définie et continue sur* $\mathbf{R}$*.*
2. *Étudier la dérivabilité de la fonction f en* 0*.*

uneFonctionWeierstrass [indication(s)]

Exercice 13 ★★★ —

L'objectif de cet exercice est de construire une fonction continue sur $[0,1]$, nulle part dérivable sur $[0,1]$. Ensuite on établit que ces fonctions, étranges de prime abord, abondent dans la nature, puisqu'elles forment une partie dense de $\left(\mathscr{C}^0([0,1],\mathbf{R}), ||\cdot||_\infty\right)$.

Le cœur du travail porte sur l'étude d'une fonction définie par Teiji Takagi en 1903 dans son article A simple example of the continuous function without derivative, initialement paru dans les Proceedings of the Physico-Mathematical Society of Japan, ser II, Vol 1. 1903, pp 176-177, puis dans les Collected Papers of Teiji Takagi (S. Iyanaga, Ed), Springer Verlag, New York 1990.

Teiji Takagi (1875-1960)

Nous définissons la fonction φ par

$$\varphi \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \mathrm{d}(x,\mathbf{Z}) := \inf\{|x-n| \ : \ n \in \mathbf{Z}\} \end{array} \right.$$

1. *Démontrer que la fonction φ est 1-lipschitzienne.*
2. *Démontrer que la fonction φ est paire.*
3. *Démontrer que la fonction φ est 1-périodique.*
4. *Démontrer que $\varphi(x) = x$, pour tout $x \in [0,1/2]$.*
5. *Tracer la représentation graphique de la fonction φ au-dessus de l'intervalle $[-4,4]$.*
6. *Démontrer que, pour tout $x \in \mathbf{R}$*
$$\varphi(x) = \begin{cases} x - \mathrm{E}(x) & \text{si } x - \mathrm{E}(x) \leqslant 1/2 \\ \mathrm{E}(x) + 1 - x & \text{si } x - \mathrm{E}(x) > 1/2 \end{cases}$$
7. *Démontrer que la fonction φ est bornée sur $\mathbf{R}$ et calculer $||\varphi||_\infty$.*

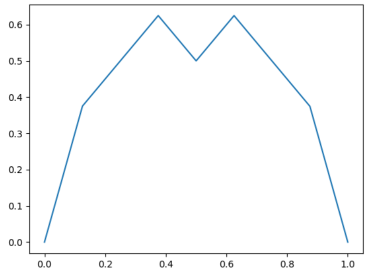
Nous introduisons la fonction due à Teiji Takagi.

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\varphi\left(2^k x\right)}{2^k} \end{array} \right.$$

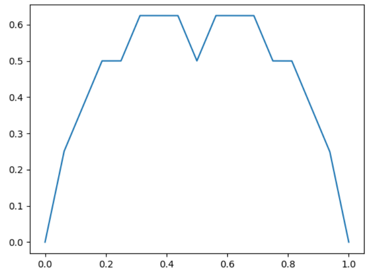
8. *Démontrer que cette fonction f est bien définie.*
9. *Démontrer que la fonction f est 1-périodique.*

Ci-dessous, figurent des courbes de fonctions qui approximent la fonction f sur $[0,1]$.

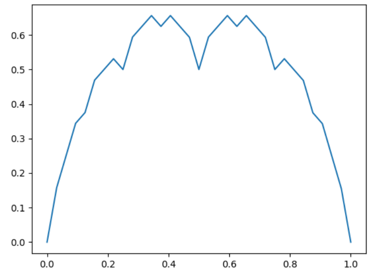
$$x \longmapsto \sum_{k=0}^{2} \frac{\varphi\left(2^k x\right)}{2^k}$$



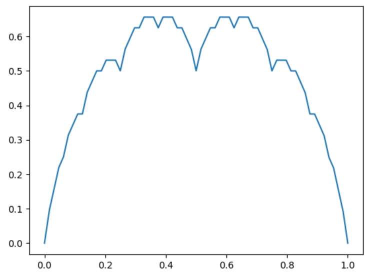
$$x \longmapsto \sum_{k=0}^{3} \frac{\varphi\left(2^k x\right)}{2^k}$$



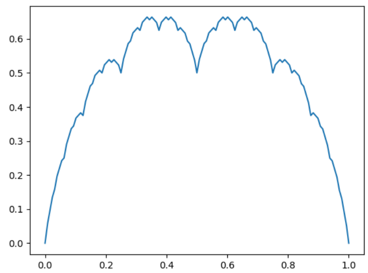
$$x \longmapsto \sum_{k=0}^{4} \frac{\varphi\left(2^k x\right)}{2^k}$$



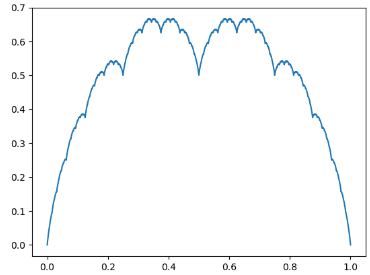
$$x \longmapsto \sum_{k=0}^{5} \frac{\varphi\left(2^k x\right)}{2^k}$$



$$x \longmapsto \sum_{k=0}^{6} \frac{\varphi\left(2^k x\right)}{2^k}$$



$$x \longmapsto \sum_{k=0}^{100} \frac{\varphi\left(2^k x\right)}{2^k}$$



10. *Démontrer que la fonction f est continue sur* $\mathbf{R}$.

On souhaite démontrer que la fonction f n'est dérivable en aucun point de $\mathbf{R}$. Pour ce faire, on raisonne par l'absurde et on suppose qu'il existe un nombre réel x en lequel la fonction f est dérivable.

11. *Soient $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ deux suites de nombres réels telles que*

$$\forall\, n \in \mathbf{N} \quad a_n \leqslant x < b_n \qquad ; \qquad a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x \qquad ; \qquad b_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$$

Démontrer que $\dfrac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} f'(x)$.

12. *Soit $n \in \mathbf{N}$. Justifier qu'il existe un unique $j_n \in \mathbf{Z}$ tel que $a_n := \dfrac{j_n}{2^n} \leqslant x < \dfrac{j_n+1}{2^n} =: b_n$, puis démontrer que les deux suites $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ convergent vers x.*

13. *Soient $n \in \mathbf{N}^*$ et $j \in \mathbf{N}$. Démontrer que* $f\left(\dfrac{j}{2^n}\right) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k}\, \varphi\left(\frac{j}{2^{n-k}}\right)$.

14. *Soient $n \in \mathbf{N}^*$ et $k \in [\![0, n-1]\!]$. Démontrer* $\varepsilon_{n,k} := \dfrac{1}{2^k}\, \dfrac{\varphi\left(b_n\, 2^k\right) - \varphi\left(a_n\, 2^k\right)}{b_n - a_n} \in \{-1, 1\}$.

    On pourra poser $q_{n,k} := \left\lfloor 2\, a_n\, 2^k \right\rfloor$, démontrer que $2\, b_n\, 2^k \in \left[q_{n,k}, q_{n,k}+1\right]$, puis exploiter des propriétés de la fonction φ en distinguant deux cas suivant la parité de l'entier $q_{n,k}$.

15. *Déduire des deux questions précédentes que la suite* $\left(\dfrac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n}\right)_{n\in\mathbf{N}}$ *est divergente.*

16. *Conclure quant à la non dérivabilité de f en x.*

On considère le $\mathbf{R}$-espace vectoriel $\mathscr{C}^0([0,1], \mathbf{R})$ muni de la norme $||\cdot||_\infty$.

17. *Soit $g \in \mathscr{C}^0([0,1], \mathbf{R})$. Démontrer qu'il existe une suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbf{N}}$ continues sur $[0,1]$, dérivables en aucun point de $[0,1]$, telle que*

$$g_n \xrightarrow[n\to+\infty]{||\cdot||_\infty} g$$

`fonctionTakagiContinueNullePartDerivable` [corrigé] regulariteSommeSerieFonctions2 [énoncé]

Indication(s) pour l'exercice 3

i) Convergence simple de la série de fonction $\sum f_n$ sur $[0, +\infty[$. Soit $x \in [0, +\infty[$ fixé.

- Cas où $x = 0$: ...
- Cas où $x > 0$. Comparer la série numérique $\sum \frac{x}{\ln(n)} \left(e^{-x}\right)^n$ à une série convergente.

ii) Caractère $\mathscr{C}^1$ de la fonction $\sum_{n=2}^{+\infty} f_n$ sur $]0, +\infty[$. On applique le critère $\mathscr{C}^1$ pour les séries de fonctions, en remarquant, que pour tout $0 < a < b$, pour tout $(n, x) \in \mathbf{N}_{\geqslant 2} \times [a, b]$

$$\left|f_n'(x)\right| = \left|\frac{1 - nx}{\ln(n)} e^{-nx}\right| \leqslant \frac{1 + n\, b}{\ln(n)} \left(e^{-a}\right) \underset{n \to +\infty}{=} \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right) \qquad \text{[croissances comparées]}$$

iii) La fonction $S = \sum_{n=2}^{+\infty} f_n$ n'est pas dérivable en 0 à droite. Pour tout $x > 0$

$$\tau(x) := \frac{S(x) - S(0)}{x} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{\ln(n)}$$

Comme, pour tout $n \geqslant 2$, la fonction

$$x \longmapsto \frac{e^{-nx}}{\ln(n)}$$

est décroissante sur $]0, +\infty[$, la fonction

$$\tau : x \longmapsto \tau(x)$$

est décroissante sur $]0, +\infty[$. D'après le théorème de la limite monotone $\ell := \lim_{0^+} \tau$ existe dans $\mathbf{R} \cup \{+\infty\}$. On remarque que, pour un entier $N \geqslant 2$ fixé

$$\forall\, x > 0 \quad \tau(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{\ln(n)} = \sum_{n=2}^{N} \frac{e^{-nx}}{\ln(n)} + \underbrace{\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{\ln(n)}}_{\geqslant 0} \geqslant \sum_{n=2}^{N} \frac{e^{-nx}}{\ln(n)}$$

En faisant tendre x vers 0^+, il vient

$$\ell \geqslant \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{\ln(n)}$$

Justifier que la série numérique de terme général $\frac{1}{\ln(n)} \geqslant 0$ diverge.

regulariteEquationFonctionnelleEquivalentSommeSerieFonctions [énoncé]

Indication(s) pour l'exercice 4

1. i) Pour tout $n \in \mathbf{N}$, définissons la fonction f_n par

$$f_n \left| \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{(-1)^n}{n+x} \end{array} \right.$$

ii) Fixer $x \in]0,+\infty[$. Appliquer le critère des séries alternées pour établir la convergence de la série numérique $\sum f_n(x)$.

iii) Soit $n \in \mathbf{N}$. La fonction f_n est dérivable sur $]0,+\infty[$ et

$$\forall\, x \in]0,+\infty[\quad f_n'(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+x)^2}$$

Ainsi, la fonction $\left|f_n'\right|$ est décroissante sur $]0,+\infty[$. De plus, pour tout segment $[a,b]$ inclus dans $]0,+\infty[$

$$\left|\left|f_n'\right|\right|_{\infty,[a,b]} = \frac{1}{(n+a)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2} > 0$$

Nous pouvons appliquer le critère $\mathscr{C}^1$ à la série de fonctions $\sum f_n$.

2. Soit $x \in]0,+\infty[$. D'après le question précédente

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+x)^2}$$

Comme la série numérique qui apparaît satisfait les hypothèses du critère spécial des séries alternées (à verifier), nous savons que le signe de $S'(x)$ est le signe de

$$\frac{(-1)^{0+1}}{(0+x)^2} = -\frac{1}{x^2} < 0$$

3. Soit $x \in]0,+\infty[$. Le calcul de $S(x+1)+S(x)$ fait apparaître une somme télescopique.

4. Soit $x \in]0,+\infty[$. D'après l'équation fonctionnelle vérifiée par la fonction S, il vient

$$x\,S(x) = 1 - x\,S(x+1)$$

et la fonction S est continue en 1.

5. Soit $x \in]1,+\infty[$. Par décroissance de la fonction S

$$\forall\, x \in]1,+\infty[\quad \frac{S(x)+S(x+1)}{2} \leqslant S(x) \leqslant \frac{S(x)+S(x-1)}{2}$$

On conclut avec l'équation fonctionnelle.

calculSommeSerie [énoncé]

Indication(s) pour l'exercice 6

i) Un calcul formel, irrecevable sur une copie, mais précieux dans une approche heuristique, livre

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n\, e^{-nx} = e^{-x} \sum_{n=1}^{+\infty} n \left(e^{-x}\right)^{n-1}$$

La série dérivée de la série géométrique apparaît, ce qui motive la suite.

ii) Démontrer que la série de fonctions de terme général

$$f_n : x \longmapsto n\, x^{n-1}$$

converge simplement sur $[0,1[$. Sa somme est notée

$$S \left| \begin{array}{ccc} [0,1[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n\, x^{n-1} \end{array} \right.$$

iii) Observer que, pour tout $x \in \,]0,+\infty[$, $e^{-x} \in [0,1[$. Ainsi la série numérique $\sum n\, e^{-nx}$ converge et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n\, e^{-nx} = e^{-x} \sum_{n=1}^{+\infty} n \left(e^{-x}\right)^{n-1} = e^{-x}\, S\left(e^{-x}\right) \qquad \text{[le calcul formel i) est à présent licite, d'après ii)]}$$

Expliciter la fonction S nous permettra donc de calculer la somme de la série convergence proposée à l'étude.

iv) Appliquer le critère de continuité pour les séries de fonctions pour obtenir la continuité de S sur $[0,1[$.

v) Appliquer le théorème de primitivation pour les séries de fonctions pour en déduire que la fonction S est continue sur $[0,1[$ et

$$\forall\, x \in [0,1[\qquad \int_0^x S(t)\, \mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} x^n = \frac{x}{1-x}$$

vi) Conclure avec le théorème fondamental de l'analyse.

`suitePrimitivesIterees` [énoncé]

Indication(s) pour l'exercice 7

1. i) Démontrer que

$$\forall\, n \in \mathbf{N} \quad \forall\, x \in [a,b] \quad |f_n(x)| \leqslant \frac{(x-a)^n}{n!}\, ||\, f_0 \,||_\infty$$

ii) En déduire que

$$\forall\, n \in \mathbf{N} \quad ||\, f_n \,||_\infty \leqslant \frac{(b-a)^n}{n!}\, ||\, f_0 \,||_\infty$$

2. i) Appliquer le critère $\mathscr{C}^1$ à la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ pour en déduire que la fonction

$$S \left| \begin{array}{ccc} [a,b] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \end{array} \right.$$

est dérivable sur $[a,b]$ et que

$$\forall\, x \in [a,b] \quad S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = f_0(x) + S(x)$$

ii) La fonction S est donc solution du problème de Cauchy linéaire d'ordre 1

$$\left\{ \begin{array}{l} y' = y + f_0(x) \\ y(a) = 0 \end{array} \right.$$

d'inconnue $y \in \mathscr{C}^1([a,b],\mathbf{R})$. Nous en déduisons que

$$\forall\, x \in [a,b] \quad \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) =: S(x) = e^x \int_a^x f_0(t)\, e^{-t} \; \mathrm{d}t$$

puis

$$\forall\, x \in [a,b] \quad \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = f_0(x) + e^x \int_a^x f_0(t)\, e^{-t} \; \mathrm{d}t$$

`sommeSerieFonctionsProduitIndefinimentDerivable` [énoncé]

Indication(s) pour l'exercice 9

1. Définissons, pour tout $n \in \mathbf{N}$, la fonction f_n par

$$f_n \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}^- & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\prod_{k=0}^{n} \frac{1}{x+k} \end{array} \right.$$

Soit $x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}^-$ fixé. On peut démontrer que la série numérique $\sum |f_n(x)|$ est convergente en appliquant la règle de d'Alembert.

2. i) Soit $n \in \mathbf{N}$. On décompose en éléments simples la fraction rationnelle $\displaystyle\prod_{k=0}^{n} \frac{1}{X+k} \in \mathbf{R}(X)$, dont tous les pôles sont simples (la tâche est ainsi aisée)

$$\prod_{k=0}^{n} \frac{1}{X+k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!\,(n-k)!} \frac{1}{X+k}$$

ii) Soit $x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}^-$ fixé. Nous déduisons de ce qui précède que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!\,(n-k)!} \frac{1}{x+k} = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} \underbrace{\frac{(-1)^k}{k!\,(x+k)}}_{a_k} \underbrace{\frac{1}{(n-k)!}}_{b_{n-k}}$$

On vérifie que les séries numériques $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont absolument convergentes. Par produit de Cauchy

$$f(x) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,(x+n)} \right) \underbrace{\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \right)}_{=\mathrm{e}}$$

3. i) Remarquons que $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}^-$ s'écrit comme une réunion d'intervalles ouverts

$$\mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}^- =]0, +\infty[\ \cup \left(\bigcup_{m \in \mathbf{N}}]-m-1, -m[\right)$$

Nous démontrons que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur chacun des intervalles ouverts apparus dans la décomposition ci-dessus. Pour cela, nous appliquons le critère $\mathscr{C}^k$, où $k \in \mathbf{N}^*$, pour les séries de fonctions, sur chacun d'entre eux.

ii) Définissons, pour tout $n \in \mathbf{N}$, la fonction g_n par

$$g_n \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}^- & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{(-1)^n}{n!\,(x+n)} \end{array} \right.$$

iii) Soit $n \in \mathbf{N}$. La fonction g_n est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}^-$. Au moyen d'un raisonnement par récurrence, on démontre

$$\forall\, k \in \mathbf{N} \quad \forall\, x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}^- \quad g_n^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{n+k}\, k!}{n!\,(x+n)^{k+1}}$$

iv) Soient $n \in \mathbf{N}$, $k \in \mathbf{N}$ et $[a, b]$ un segment inclus dans $]0, +\infty[$. Comme la fonction

$$x \longmapsto \frac{1}{(x+n)^{k+1}}$$

est décroissante et positive sur $[a, b]$, nous obtenons

$$\left|\left| g_n^{(k)} \right|\right|_{\infty,[a,b]} = \left| g_n^{(k)}(a) \right|$$

On peut démontrer que la série numérique $\sum \left| g_n^{(k)}(a) \right|$ converge en appliquant la règle de d'Alembert.

v) Soient $n \in \mathbf{N}$, $k \in \mathbf{N}$, $m \in \mathbf{N}$ et $[a, b]$ un segment inclus dans $]-m-1, -m[$. Comme la fonction

$$x \longmapsto \frac{1}{(x+n)^{k+1}}$$

est monotone et de signe constant sur $[a, b]$ (à vérifier avec soin), nous obtenons

$$\left|\left| g_n^{(k)} \right|\right|_{\infty,[a,b]} = \max\left\{ \left| g_n^{(k)}(a) \right|, \left| g_n^{(k)}(b) \right| \right\} \leqslant \left| g_n^{(k)}(a) \right| + \left| g_n^{(k)}(b) \right|$$

On peut démontrer que les séries numériques $\sum \left| g_n^{(k)}(a) \right|$ et $\sum \left| g_n^{(k)}(b) \right|$ convergent en appliquant la règle de d'Alembert.

continuiteLimiteEquivalentSommeSerieFonctions [énoncé]

Indication(s) pour l'exercice 10

1. Soit $x \in]0,+\infty[$ fixé. On compare $f_n(x)$ à un terme général de série convergente de référence.
2. On applique le critère de continuité pour les séries de fonctions en remarquant que

$$\forall\, a > 0 \quad \forall\, n \in \mathbf{N}^* \quad \|f_n\|_{\infty,[a,+\infty[} = f_n(a) \qquad [f_n \text{ est décroissante et positive sur } [a,+\infty[\,]$$

3. i) On applique le théorème de la double limite en $+\infty$, en remarquant que la convergence uniforme de la série de fonctions $\sum f_n$ sur $[1,+\infty[$ a été établie à la question précédente. Il vient

$$f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

ii) Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, soit g_n la fonction définie par

$$g_n \left| \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x}{n+n^2x} \end{array} \right.$$

On applique le théorème de la double limite en $+\infty$ à la série de fonctions $\sum g_n$, en remarquant que, pour tout $(n,x) \in \mathbf{N}^* \times\,]0,+\infty[$

$$0 \leqslant g_n(x) = \frac{1}{n^2}\left(\frac{n+n^2x-n}{n+n^2x}\right) = \frac{1}{n^2}\left(1-\frac{1}{1+nx}\right) \leqslant \frac{1}{n^2}$$

On en déduit que

$$x\,f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{\pi^2}{6}$$

4. i) Comme toutes les fonctions f_n sont décroissantes sur $]0,+\infty[$, la fonction f est décroissante sur $]0,+\infty[$. Elle admet donc une limite $\ell \in \overline{\mathbf{R}}$ en 0^+ (théorème de la limite monotone).

ii) Soit $N \in \mathbf{N}^*$. Comme, pour tout $x \in]0,+\infty[$, $f_n(x) \geqslant 0$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \geqslant \sum_{n=1}^{N} f_n(x)$$

En faisant tendre x vers 0^+ dans cette inégalité, il vient

$$\ell \geqslant \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}$$

On conclut en considérant la nature de la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$, dont tous les termes sont positifs.

iii) Pour déterminer un équivalent de f au voisinage de 0^+, on s'inspire de la démarche suivie pour démontrer que

$$\zeta(x) \underset{x\to1^+}{\sim} \frac{1}{x-1}$$

i.e. on effectue une comparaison série-intégrale, en fixant $x > 0$ et en rendant continu le paramètre discret n dans l'expresssion

$$f_n(x) = \frac{1}{n+n^2x}$$

Fixons $x > 0$ et considérons la fonction

$$g \left| \begin{array}{ccc} [1,+\infty[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & t+t^2x \end{array} \right.$$

qui est décroissante et positive. Ainsi, pour tout $n \geqslant 2$

$$\int_n^{n+1} g(t)\,\mathrm{d}t \leqslant g(n) \leqslant \int_{n-1}^{n} g(t)\,\mathrm{d}t$$

Nous en déduisons

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{t+t^2x}\ \mathrm{d}t \leqslant \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n+n^2x} = f(x) - \frac{1}{1+x} \leqslant \int_1^{+\infty} \frac{1}{t+t^2x}\ \mathrm{d}t$$

Comme, pour tout $t \geqslant 1$

$$g(t) = \frac{1}{t(1+tx)} = \frac{1}{t} - \frac{x}{xt+1}$$

la fonction

$$G \left| \begin{array}{ccc} [1,+\infty[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & \ln(t) - \ln(xt+1) = \ln\left(\frac{t}{xt+1}\right) \end{array} \right.$$

est une primitive de g. Nous en déduisons

$$\ln\left(\frac{1}{x}\right) - \ln\left(\frac{2}{2x+1}\right) \leqslant f(x) - \frac{1}{1+x} \leqslant \ln\left(\frac{1}{x}\right) - \ln\left(\frac{1}{x+1}\right)$$

equationFonctionnelleDeveloppementSerieFonctionsIndexeeZ [énoncé]

Indication(s) pour l'exercice 11

1. i) Définissons, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, les fonctions f_n^+ et f_n^- par

$$f_n^+ \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}\setminus\mathbf{Z} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{(x+n)^2} \end{array} \right. \qquad \text{et} \qquad f_n^- \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}\setminus\mathbf{Z} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{(x-n)^2} \end{array} \right.$$

de sorte que, pour tout $N \in \mathbf{N}^*$

$$\sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{(x+n)^2} = \frac{1}{x^2} + \sum_{n=1}^{N} f_n^+(x) + \sum_{n=1}^{N} f_n^-(x)$$

ii) Soit $x \in \mathbf{R}\setminus\mathbf{Z}$ fixé. D'après le point précédent, pour démontrer que $f(x)$ est bien défini, il suffit de démontrer que les séries numériques $\sum f_n^+(x)$ et $\sum f_n^-(x)$ convergent. On peut l'établir en observant que

$$0 \leqslant f_n^+(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2} \qquad \text{et} \qquad 0 \leqslant f_n^-(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$$

Nous en déduisons que

$$(\star) \qquad f(x) = \frac{1}{x^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\frac{1}{(x+n)^2}}_{=f_n^+(x)} + \sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\frac{1}{(x-n)^2}}_{=f_n^-(x)}$$

iii) Remarquons que

$$\mathbf{Z} = \{0\} \sqcup \mathbf{N}^* \sqcup \mathbf{Z}_{<0}$$

L'étude précédente et le théorème de sommation par paquets (cas positif) nous livrent que la famille $\left(\dfrac{1}{(x+n)^2}\right)_{n\in\mathbf{Z}}$ est sommable, de somme

$$\sum_{n\in\mathbf{Z}} \frac{1}{(x+n)^2} = \frac{1}{x^2} + \sum_{n\in\mathbf{N}^*} \frac{1}{(x+n)^2} + \sum_{n\in\mathbf{N}^*} \frac{1}{(x-n)^2} = \frac{1}{x^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(x+n)^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(x-n)^2} = f(x)$$

Ainsi le symbole $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty}$ introduit dans l'énoncé peut être remplacé par $\displaystyle\sum_{n\in\mathbf{Z}}$.

iv) Pour tout $x \in \mathbf{R}$, si $x+1$ est un entier relatif alors x est un entier relatif. L'ensemble $\mathbf{R}\setminus\mathbf{Z}$ est donc stable par l'application $x \longmapsto x+1$.

v) Soit $x \in \mathbf{R}\setminus\mathbf{Z}$ et $N \in \mathbf{N}^*$. D'une part

$$\sum_{n=-N-1}^{N+1} \frac{1}{(x+n)^2} = \underbrace{\frac{1}{x-N-1} + \frac{1}{x+N+1}}_{\xrightarrow[N\to+\infty]{} 0} + \underbrace{\sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{(x+n)^2}}_{\xrightarrow[N\to+\infty]{} f(x)} \xrightarrow[N\to+\infty]{} f(x)$$

et d'autre part

$$\sum_{n=-N-1}^{N+1} \frac{1}{(x+n)^2} = \sum_{n=-N-2}^{N} \frac{1}{(x+n+1)^2} = \underbrace{\frac{1}{x-N-1} + \frac{1}{x-N}}_{\xrightarrow[N\to+\infty]{} 0} + \underbrace{\sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{(x+n+1)^2}}_{\xrightarrow[N\to+\infty]{} f(x+1)} \xrightarrow[N\to+\infty]{} f(x+1)$$

2. i) Comme la fonction f est 1-périodique sur $\mathbf{R}\setminus\mathbf{Z} = \displaystyle\bigcup_{n\in\mathbf{Z}}]n, n+1[$, il suffit d'établir sa continuité sur $]0,1[$, pour l'obtenir sur $\mathbf{R}\setminus\mathbf{Z}$.

ii) D'après $(\star)$, il suffit d'établir la continuité des fonctions $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_n^+$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_n^-$ sur $]0,1[$. On cherche à appliquer le critère de continuité pour les séries de fonctions.

iii) Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, les fonctions f_n^+ et f_n^- sont continues sur $]0,1[$.

iv) Soit a, b des réels tels que $0 < a < b < 1$. Établir , avec toute la rigueur requise, que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$

$$\left|\left|f_n^+\right|\right|_{\infty,[a,b]} = f_n^+(a) = \frac{1}{(a+n)^2} \qquad \text{et} \qquad \left|\left|f_n^-\right|\right|_{\infty,[a,b]} = f_n^-(b) = \frac{1}{(b-n)^2}$$

pour établir que les suites de fonctions $\sum f_n^+$ et $\sum f_n^-$ convergent uniformément sur tout segment de $]0,1[$.

3. Comme, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\sin(x) = 0$ si et seulement si $x \equiv 0\ [\pi]$, la fonction g est définie sur $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$.
4. i) Justifier que la fonction g est continue et 1-périodique sur $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$.

ii) Comme la fonction $h := g - f$ est continue sur $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$ et 1-périodique, il suffit de démontrer qu'elle est prolongeable par continuité en 0 pour conclure qu'elle est prolongeable par continuité sur $\mathbf{R}$.

iii) D'après $(\star)$, pour tout $x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$

$$h(x) = \underbrace{\frac{1}{x^2} - \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi x)}}_{=:k(x)} + \sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\frac{1}{(x+n)^2}}_{=f_n^+(x)} + \sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\frac{1}{(x-n)^2}}_{=f_n^-(x)}$$

Il nous suffit donc d'établir que les fonctions $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n^+$, $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n^-$ et

$$k \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{\pi^2}{\sin^2(\pi x)} \end{array} \right.$$

sont prolongeables par continuité en 0 pour obtenir le résultat demandé.

iv) On applique le théorème de la double limite en un point du bord aux séries de fonctions $\sum f_n^+$ et $\sum f_n^-$, en remarquant que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$

- $f_n^+(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \dfrac{1}{n^2}$ et $\left|\left|f_n^+\right|\right|_{\infty,[-1/2,0[\,\cup\,]0,1/2]} = f_n^+(-1/2) = \dfrac{1}{(n-1/2)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$
- $f_n^-(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \dfrac{1}{n^2}$ et $\left|\left|f_n^-\right|\right|_{\infty,[-1/2,0[\,\cup\,]0,1/2]} = f_n^-(1/2) = \dfrac{1}{(n-1/2)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$

On en déduit

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n^+(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \frac{\pi^2}{6} \qquad \text{et} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} f_n^-(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \frac{\pi^2}{6}$$

v) Comme

$$\sin^2(\pi x) \underset{x\to 0}{=} \left(\pi x - \frac{\pi^3 x^3}{6} + \mathrm{o}\left(x^3\right)\right)^2 \underset{x\to 0}{=} \pi^2 x^2 - \frac{\pi^4 x^4}{3} + \mathrm{o}\left(x^4\right)$$

il vient

$$k(x) = \frac{\sin^2(\pi x) - \pi^2 x^2}{x^2 \sin^2(\pi x)} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} -\frac{\pi^2}{3}$$

vi) La fonction h est donc prolongeable par continuité sur $\mathbf{R}$ en posant

$$\forall p \in \mathbf{Z} \quad h(p) = -\frac{\pi^2}{3} + \frac{\pi^2}{6} + \frac{\pi^2}{6} = 0$$

5. On note à présent h le prolongement par continuité de $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$ à $\mathbf{R}$ de la fonction h (cf. question précédente).

i) Soit $x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$. Nous remarquons qu'alors

$$\frac{x}{2} \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z} \qquad \text{et} \qquad \frac{x+1}{2} \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$$

ii) Remarquons que

$$\mathbf{Z} = \{2n \ : \ n \in \mathbf{Z}\} \sqcup \{2n+1 \ : \ n \in \mathbf{Z}\}$$

Grâce au théorème de sommation par paquets (cas positifs)

$$f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} \frac{1}{(x/2+n)^2} + \sum_{n\in\mathbf{Z}} \frac{1}{(x/2+1/2n)^2} = 4 \underbrace{\left(\sum_{n\in\mathbf{Z}} \frac{1}{(x+2n)^2} + \sum_{n\in\mathbf{Z}} \frac{1}{(x+2n+1)^2}\right)}_{=\sum_{n\in\mathbf{Z}} \frac{1}{(x+n)^2}} = 4 f(x)$$

iii) D'après la relation de Pythagore et la formule de duplication pour sinus

$$\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi x/2)} + \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi(x+1)/2)} = \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi x/2)} + \frac{\pi^2}{\cos^2(\pi x/2)} = \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi x/2)\cos^2(\pi x/2)} = 4\,\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi x/2)}$$

iv) Des deux points précédents, nous déduisons que

$$\forall x \in \mathbf{R}\setminus\mathbf{Z} \quad h\left(\frac{x}{2}\right) + h\left(\frac{x+1}{2}\right) = 4h(x)$$

v) Comme la fonction h est continue sur $\mathbf{R}$, les fonctions

$$\left|\begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & h\left(\frac{x}{2}\right) + h\left(\frac{x+1}{2}\right) \end{array}\right. \qquad \text{et} \qquad \left|\begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & 4h(x) \end{array}\right.$$

sont continues sur $\mathbf{R}$. Comme elles coïncident sur $\mathbf{R}\setminus\mathbf{Z}$, partie dense de $\mathbf{R}$, elles coïncident sur $\mathbf{R}$ tout entier.

6. Il s'agit de montrer que $h = 0$.

i) La fonction h est 1-périodique. Ainsi

$$\{h(x) \,:\, x \in \mathbf{R}\} = \{h(x) \,:\, x \in [0,1]\}$$

D'après le théorème des bornes atteintes, la fonction h, continue sur le segment $[0,1]$, est bornée sur $[0,1]$, donc sur $\mathbf{R}$.

ii) Déduire de la question précédente que

$$4\,||h||_{\infty,\mathbf{R}} \leqslant 2\,||h||_{\infty,\mathbf{R}}$$

uneFonctionWeierstrass [énoncé]

Indication(s) pour l'exercice 12

1. On définit, pour tout $n \in \mathbf{N}$, la fonction f_n par

$$f_n \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\sin(2^n x)}{2^n} \end{array} \right.$$

et on applique le critère de continuité pour les séries de fonctions.

   i) Pour tout $n \in \mathbf{N}$, la fonction f_n est continue sur $\mathbf{R}$.

   ii) Pour tout $n \in \mathbf{N}$, $||f_n||_{\infty,\mathbf{R}} = \dfrac{1}{2^n}$.

2. En construisant une suite de réels $(x_N)_{N\in\mathbf{N}}$ telle que $x_N \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$ et

$$\frac{f(x_N)-f(0)}{x_N-0} \xrightarrow[N\to+\infty]{} +\infty \qquad [\text{explosions de pentes}]$$

nous contredirons la dérivabilité de la fonction f en 0.

   i) Posons, pour tout $N \in \mathbf{N}$

$$x_N := \frac{\pi}{2^N}$$

   ii) Soit $N \in \mathbf{N}^*$. Justifier

$$f(x_N) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\sin(2^n x_N)}{2^n}$$

   iii) Observer que, pour tout $n \in [\![0, N-1]\!]$, $2^n x_N \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ et penser à l'inégalité de convexité

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \quad \frac{2}{\pi}x \leqslant \sin(x) \leqslant x \qquad [\text{cf. corde entre } (0,0) \text{ et } (\pi/2,1) \text{ et tangente en } (0,0), \text{ pour la fonction sin}]$$

   pour démontrer que

$$f(x_N) \geqslant \frac{N}{2^{N-1}}$$

   iv) En déduire que $\dfrac{f(x_N)-f(0)}{x_N-0} \xrightarrow[N\to+\infty]{} +\infty$.

fonctionTakagiContinueNullePartDerivable [énoncé]

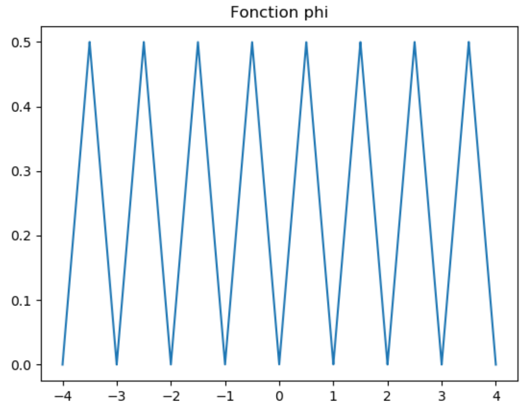
Un corrigé de l'exercice 13

1. Soient x et y des nombres réels. Nous démontrons $|\varphi(x)-\varphi(y)| \leqslant |x-y|$
   i) Soit $n \in \mathbf{Z}$. Nous observons :
   $$\varphi(x) \leqslant |x-n| \leqslant |x-y|+|y-n|$$
   d'où :
   $$\underbrace{\varphi(x)-|x-y|}_{\text{indépendant de } n} \leqslant |y-n| \ .$$
   Par passage à l'inf sur $n \in \mathbf{Z}$, il vient :
   $$\varphi(x)-|x-y| \leqslant \varphi(y)$$
   puis :
   $$(\star) \qquad \varphi(x)-\varphi(y) \leqslant |x-y| \ .$$
   ii) Par symétrie des rôles joués par x et y, nous déduisons de $(\star)$:
   $$(\star\star) \qquad \varphi(y)-\varphi(x) \leqslant |y-x| = |x-y| \ .$$

   De $(\star)$ et $(\star\star)$ on déduit : $|\varphi(x)-\varphi(y)| \leqslant |x-y|$.
2. i) L'ensemble $\mathbf{R}$ est symétrique par rapport à 0.
   ii) L'application
   $$\left| \begin{array}{ccc} \mathbf{Z} & \longrightarrow & \mathbf{Z} \\ n & \longmapsto & -n \end{array} \right.$$
   est une permutation de l'ensemble $\mathbf{Z}$, d'où l'égalité d'ensembles :
   $$E_x := \{|x-n| \ : \ n \in \mathbf{Z}\} = \left\{ \underbrace{|x-(-n)|}_{=|-x-n|} \ : \ n \in \mathbf{Z} \right\} =: E_{-x} \ .$$
   A fortiori, $\varphi(x) := \inf E_x = \inf E_{-x} = \varphi(-x)$.
3. i) L'ensemble $\mathbf{R}$ est stable par la fonction $x \longmapsto x+1$.
   ii) L'application
   $$\left| \begin{array}{ccc} \mathbf{Z} & \longrightarrow & \mathbf{Z} \\ n & \longmapsto & n+1 \end{array} \right.$$
   est une permutation de l'ensemble $\mathbf{Z}$, d'où l'égalité d'ensembles :
   $$E_{x+1} := \{|x+1-n| \ : \ n \in \mathbf{Z}\} = \left\{ \underbrace{|x+1-(n+1)|}_{=|x-n|} \ : \ n \in \mathbf{Z} \right\} =: E_x \ .$$
   A fortiori, $\varphi(x+1) := \inf E_{x+1} = \inf E_x = \varphi(x)$.
4. Soit $x \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right]$.
   i) Nous calculons $|x-0| = x$.
   ii) Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Comme $n \geqslant 1$:
   $$-n \leqslant x-n \leqslant \frac{1}{2}-n \leqslant -\frac{1}{2}$$
   et il vient $|x-n| \geqslant \dfrac{1}{2} \geqslant x = |x-0|$.
   iii) Soit $n \in \mathbf{Z}$ tel que $n \leqslant -1$. Comme $n \leqslant -1$:
   $$1 \leqslant -n \leqslant x-n \leqslant \frac{1}{2}-n$$
   et il vient $|x-n| \geqslant 1 \geqslant x = |x-0|$.

   Des trois points précédents, nous déduisons :
   $$\varphi(x) := \inf\{|x-n| \ : \ n \in \mathbf{Z}\} = |x-0| = x \ .$$

5. Le graphe de la fonction φ au-dessus de l'intervalle $[-4,4]$ est



6. Soit $x \in \mathbf{R}$. On rappelle que par définition de la partie entière, $\mathrm{E}(x) \in \mathbf{Z}$ et $0 \leqslant x - \mathrm{E}(x) < 1$.

   i) 1er cas : $0 \leqslant x - \mathrm{E}(x) \leqslant \dfrac{1}{2}$. Nous calculons :

$$\begin{array}{rcll} \varphi(x) & = & \varphi(x - \mathrm{E}(x)) & [\varphi \text{ est 1-périodique}] \\ & = & x - \mathrm{E}(x) & \left[x - \mathrm{E}(x) \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right]\right]. \end{array}$$

   ii) 2ème cas : $\dfrac{1}{2} < x - \mathrm{E}(x)$. D'après la définition de la partie entière, nous avons de plus

$$\frac{1}{2} < x - \mathrm{E}(x) < 1$$

d'où $-\dfrac{1}{2} < x - \mathrm{E}(x) - 1 < 0$, puis :

$$0 < \mathrm{E}(x) + 1 - x < \frac{1}{2}.$$

Nous calculons :

$$\begin{array}{rcll} \varphi(x) & = & \varphi(x - \mathrm{E}(x) - 1) & [\varphi \text{ est 1-périodique}] \\ & = & \varphi(\mathrm{E}(x) + 1 - x) & [\varphi \text{ est paire}] \\ & = & \mathrm{E}(x) + 1 - x & \left[\mathrm{E}(x) + 1 - x \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right]\right]. \end{array}$$

7. Nous remarquons :

$$\begin{array}{rcll} \{|\varphi(x)| \ : \ x \in \mathbf{R}\} & = & \left\{|\varphi(x)| \ : \ x \in \left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]\right\} & [\varphi \text{ est 1-périodique}] \\ & = & \left\{|\varphi(x)| \ : \ x \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right]\right\} & [\varphi \text{ est paire}] \\ & = & \left[0, \dfrac{1}{2}\right] & \left[\forall\, x \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right], \quad \varphi(x) = x\right]. \end{array}$$

Nous en déduisons que :

$$\forall\, x \in \mathbf{R} \quad |\varphi(x)| \leqslant \frac{1}{2}.$$

La fonction φ est bornée sur $\mathbf{R}$ et :

$$||\,\varphi\,||_\infty := \sup\,\{|\varphi(x)| \ : \ x \in \mathbf{R}\} = \sup\left[0, \frac{1}{2}\right] = \frac{1}{2}.$$

8. i) Pour tout $k \in \mathbf{N}$, on définit la fonction f_k par

$$f_k \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\varphi\left(2^k x\right)}{2^k} \end{array} \right.$$

ii) Il s'agit ici de démontrer que la série de fonctions $\sum_{k\geqslant 0} f_k$ converge simplement sur $\mathbf{R}$. Nous démontrons une propriété plus forte : la série de fonctions $\sum_{k\geqslant 0} f_k$ converge normalement sur $\mathbf{R}$.

iii) Soit $k \in \mathbf{N}$. Comme la fonction φ est bornée sur $\mathbf{R}$, la fonction f_k et également bornée sur $\mathbf{R}$. De plus :

$$\forall\, x \in \mathbf{R} \quad |f_k(x)| = \left|\frac{\varphi\left(2^k x\right)}{2^k}\right| \leqslant \frac{||\,\varphi\,||_\infty}{2^k} = \underbrace{\frac{1}{2^{k+1}}}_{\text{indépendant de } x} .$$

Par passage au sup :

$$0 \leqslant ||\,f_k\,||_\infty \leqslant \frac{1}{2^{k+1}} .$$

D'après le cours sur les séries géométriques et le théorème de domination pour les séries à termes positifs ou nuls, la série numérique $\sum_{k\geqslant 0} ||\,f_k\,||_\infty$ converge.

9. i) L'ensemble $\mathbf{R}$ est stable par la fonction $x \longmapsto x+1$.

ii) Soit $x \in \mathbf{R}$.

- Comme la fonction φ est 1-périodique, pour tout $k \in \mathbf{N}$:

$$f_k(x+1) = \frac{\varphi\left(2^k\,(x+1)\right)}{2^k} = \frac{\varphi\left(2^k\,x+2^k\right)}{2^k} = \frac{\varphi\left(2^k\,x\right)}{2^k} = f_k(x)\,.$$

- Nous en déduisons que, pour tout $n \in \mathbf{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n} f_k(x+1) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x)\,.$$

- En faisant tendre n vers $+\infty$, il vient :

$$f(x+1) := \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x+1) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x) =: f(x)\,.$$

10. i) Comme la fonction φ est 1-lipschitzienne sur $\mathbf{R}$ (Q1), elle est continue sur $\mathbf{R}$. Nous en déduisons que, pour tout $k \in \mathbf{N}$, la fonction f_k est continue sur $\mathbf{R}$.

ii) Nous savons que la série de fonctions $\sum_{k\geqslant 0} f_k$ converge normalement sur $\mathbf{R}$ (Q8). Elle converge donc uniformément sur $\mathbf{R}$.

iii) Des deux points précédents, nous déduisons que la fonction f est continue sur $\mathbf{R}$.

11. i) Comme f est dérivable en x, la fonction

$$\varepsilon \left|\begin{array}{lcl} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ h & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} - f'(x) & \text{si } h \neq 0 \\ 0 & \text{si } h = 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

est continue en 0 et vérifie :

$$\forall\, y \in \mathbf{R} \quad f(y) = f(x) + f'(x)(y-x) + (y-x)\varepsilon(y-x).$$

ii) On a donc :

$$f(b_n) = f(x) + f'(x)(b_n - x) + (b_n - x)\varepsilon(b_n - x) \quad \text{et} \quad f(a_n) = f(x) + f'(x)(a_n - x) + (a_n - x)\varepsilon(a_n - x)\,.$$

Nous en déduisons

$$f(b_n) - f(a_n) = f'(x)(b_n - a_n) + (b_n - x)\varepsilon(b_n - x) - (a_n - x)\varepsilon(a_n - x).$$

puis :

$$\frac{f(b_n)-f(a_n)}{b_n - a_n} = f'(x) + \underbrace{\frac{b_n - x}{b_n - a_n}\varepsilon(b_n - x)}_{\beta_n} - \underbrace{\frac{a_n - x}{b_n - a_n}\varepsilon(a_n - x)}_{\alpha_n}\,.$$

Le résultat demandé est conséquence de $\alpha_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $\beta_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

iii) Soit $n \in \mathbf{N}$. Comme $a_n \leqslant x < b_n$:
$$0 \leqslant x - a_n < b_n - a_n$$
puis, comme $b_n - a_n > 0$:
$$0 \leqslant \frac{x - a_n}{b_n - a_n} < 1$$
d'où :
$$\left| \frac{a_n - x}{b_n - a_n} \right| \leqslant 1 \, .$$
Nous en déduisons :
$$0 \leqslant |\alpha_n| \leqslant \left| \frac{a_n - x}{b_n - a_n} \right| \, |\varepsilon(a_n - x)| \leqslant |\varepsilon(a_n - x)| \, .$$
Comme $a_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} x$ et ε est continue en 0 :
$$|\varepsilon(a_n - x)| \xrightarrow[n \to +\infty]{} |\varepsilon(0)| = 0 \, .$$
Par théorème d'encadrement, $\alpha_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

iv) Soit $n \in \mathbf{N}$. Comme $a_n \leqslant x < b_n$:
$$a_n - b_n \leqslant x - b_n < 0$$
puis, comme $a_n - b_n < 0$:
$$1 \geqslant \frac{x - b_n}{a_n - b_n} > 0$$
d'où :
$$\left| \frac{b_n - x}{b_n - a_n} \right| \leqslant 1 \, .$$
Nous en déduisons :
$$0 \leqslant |\beta_n| \leqslant \left| \frac{b_n - x}{b_n - a_n} \right| \, |\varepsilon(b_n - x)| \leqslant |\varepsilon(b_n - x)| \, .$$
Comme $b_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} x$ et ε est continue en 0 :
$$|\varepsilon(b_n - x)| \xrightarrow[n \to +\infty]{} |\varepsilon(0)| = 0 \, .$$
Par théorème d'encadrement, $\beta_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

12. i) Soit $j \in \mathbf{Z}$. Nous observons :
$$\frac{j}{2^n} \leqslant x < \frac{j+1}{2^n} \quad \Longleftrightarrow \quad j \leqslant 2^n \, x < j + 1 \, .$$
D'après le cours sur la partie entière, il existe un unique entier relatif j satisfaisant cette dernière double inégalité, à savoir la partie entière de $2^n \, x$. Ainsi $j_n := \mathrm{E}(2^n \, x)$ est l'unique entier recherché.

ii) Pour tout $n \in \mathbf{N}$:
$$0 \leqslant x - a_n < b_n - a_n = \frac{1}{2^n} \, .$$
Par théorème d'encadrement, $x - a_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ et donc $a_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} x$.

iii) Comme, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $b_n = a_n + \dfrac{1}{2^n}$, $b_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} x$.

13. i) Pour tout entier $k \geqslant n$, le nombre $2^k \, \dfrac{j}{2^n} = j \, 2^{k-n} \in \mathbf{Z}$. Comme φ est 1-périodique (Q3) :
$$\varphi\left(2^k \, \frac{j}{2^n}\right) = \varphi(0) = 0$$
d'après Q4 par exemple.

ii) Nous en déduisons :
$$f\left(\frac{j}{2^n}\right) := \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} \, \varphi\left(2^k \, \frac{j}{2^n}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k} \, \varphi\left(2^k \, \frac{j}{2^n}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k} \, \varphi\left(\frac{j}{2^{n-k}}\right)$$

14. i) Effectuons la division euclidienne de l'entier j_n par l'entier 2^{n-k-1}. Il existe un unique couple d'entiers $\left(q_{n,k}, r_{n,k}\right)$ tels que :

$$j_n = q_{n,k}\, 2^{n-k-1} + r_{n,k} \qquad \text{et} \qquad 0 \leqslant r_{n,k} \leqslant 2^{n-k-1} - 1\,.$$

nous en déduisons :

$$2\, a_n\, 2^k = 2\, \frac{j_n}{2^n}\, 2^k = j_n\, 2^{k+1-n} = q_{n,k} + r_{n,k}\, 2^{k+1-n} \qquad \text{et} \qquad 0 \leqslant r_{n,k}\, 2^{k+1-n} \leqslant 1 - 2^{k+1-n}$$

et en particulier $q_{n,k} = \left\lfloor 2\, a_n\, 2^k \right\rfloor$. Nous avons de plus :

$$2\, b_n\, 2^k = 2\, \frac{j_n + 1}{2^n}\, 2^k = 2\, \frac{j_n}{2^n}\, 2^k + 2^{k+1-n} = 2\, a_n\, 2^k + 2^{k+1-n}$$

d'où :

$$q_{n,k} \leqslant 2\, a_n\, 2^k \leqslant 2\, b_n\, 2^k = 2\, a_n\, 2^k + 2^{k+1-n} = q_{n,k} + r_{n,k}\, 2^{k+1-n} + 2^{k+1-n} \leqslant q_{n,k} + 1\,.$$

Nous déduisons de cette étude que :

$$2\, a_n\, 2^k \text{ et } 2\, b_n\, 2^k \text{ appartiennent à } \left[q_{n,k}, q_{n,k} + 1\right].$$

ii) Cas où l'entier $q_{n,k}$ est pair. Comme la fonction φ est 1-périodique :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^k}\, \frac{\varphi\left(b_n\, 2^k\right) - \varphi\left(a_n\, 2^k\right)}{b_n - a_n} &= \frac{\varphi\left(b_n\, 2^k\right) - \varphi\left(a_n\, 2^k\right)}{b_n\, 2^k - a_n\, 2^k} \\ &= \frac{\varphi\left(b_n\, 2^k - \frac{q_{n,k}}{2}\right) - \varphi\left(a_n\, 2^k - \frac{q_{n,k}}{2}\right)}{b_n\, 2^k - \frac{q_{n,k}}{2} - \left(a_n\, 2^k - \frac{q_{n,k}}{2}\right)}\,. \end{aligned}$$

D'après le premier point :

$$a_n\, 2^k - \frac{q_{n,k}}{2} \text{ et } b_n\, 2^k - \frac{q_{n,k}}{2} \text{ appartiennent à } \left[0, \frac{1}{2}\right].$$

Or sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, la fonction φ est affine, de pente 1 (Q4). Nous en déduisons :

$$\varepsilon_{n,k} := \frac{1}{2^k}\, \frac{\varphi\left(b_n\, 2^k\right) - \varphi\left(a_n\, 2^k\right)}{b_n - a_n} = \frac{\varphi\left(b_n\, 2^k - \frac{q_{n,k}}{2}\right) - \varphi\left(a_n\, 2^k - \frac{q_{n,k}}{2}\right)}{b_n\, 2^k - \frac{q_{n,k}}{2} - \left(a_n\, 2^k - \frac{q_{n,k}}{2}\right)} = 1\,.$$

iii) Cas où l'entier $q_{n,k}$ est impair. Comme la fonction φ est 1-périodique :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^k}\, \frac{\varphi\left(b_n\, 2^k\right) - \varphi\left(a_n\, 2^k\right)}{b_n - a_n} &= \frac{\varphi\left(b_n\, 2^k\right) - \varphi\left(a_n\, 2^k\right)}{b_n\, 2^k - a_n\, 2^k} \\ &= \frac{\varphi\left(b_n\, 2^k - \frac{q_{n,k}+1}{2}\right) - \varphi\left(a_n\, 2^k - \frac{q_{n,k}+1}{2}\right)}{b_n\, 2^k - \frac{q_{n,k}+1}{2} - \left(a_n\, 2^k - \frac{q_{n,k}+1}{2}\right)}\,. \end{aligned}$$

D'après le premier point :

$$a_n\, 2^k - \frac{q_{n,k+1}}{2} \text{ et } b_n\, 2^k - \frac{q_{n,k}+1}{2} \text{ appartiennent à } \left[-\frac{1}{2}, 0\right].$$

Or sur $\left[-\frac{1}{2}, 0\right]$, la fonction φ est affine, de pente -1 (Q2 et Q4). Nous en déduisons :

$$\varepsilon_{n,k} := \frac{1}{2^k}\, \frac{\varphi\left(b_n\, 2^k\right) - \varphi\left(a_n\, 2^k\right)}{b_n - a_n} = \frac{\varphi\left(b_n\, 2^k - \frac{q_{n,k}+1}{2}\right) - \varphi\left(a_n\, 2^k - \frac{q_{n,k}+1}{2}\right)}{b_n\, 2^k - \frac{q_{n,k}+1}{2} - \left(a_n\, 2^k - \frac{q_{n,k}+1}{2}\right)} = -1\,.$$

15. i) Soit $n \in \mathbf{N}$.

$$\begin{aligned}
\frac{f(b_n)-f(a_n)}{b_n-a_n} &= \frac{1}{b_n-a_n}\left(f\left(\frac{j_n+1}{2^n}\right)-f\left(\frac{j_n}{2^n}\right)\right)\\
&= \frac{1}{b_n-a_n}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2^k}\varphi\left(\frac{j_n+1}{2^{n-k}}\right)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2^k}\varphi\left(\frac{j_n}{2^{n-k}}\right)\right) \qquad \text{[Question 13]}\\
&= \frac{1}{b_n-a_n}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2^k}\varphi\left(2^k\,b_n\right)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2^k}\varphi\left(2^k\,a_n\right)\right)\\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2^k}\frac{\varphi\left(b_n\,2^k\right)-\varphi\left(a_n\,2^k\right)}{b_n-a_n}\\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\varepsilon_{n,k} \qquad \text{[Question 14]}
\end{aligned}$$

ii) Raisonnons par l'absurde et supposons que la suite $\left(\frac{f(b_n)-f(a_n)}{b_n-a_n}\right)_{n\in\mathbf{N}}$ converge. D'après le premier point, il s'agit d'une suite d'entiers. Elle est donc stationnaire, i.e. il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que :

$$\forall\, n \geqslant N \quad \frac{f(b_{n+1})-f(a_{n+1})}{b_{n+1}-a_{n+1}}-\frac{f(b_n)-f(a_n)}{b_n-a_n}=0\,.$$

En particulier :

$$\frac{f(b_{N+1})-f(a_{N+1})}{b_{N+1}-a_{N+1}}-\frac{f(b_N)-f(a_N)}{b_N-a_N}=\sum_{k=0}^{N}\varepsilon_{N+1,k}+\sum_{k=0}^{N-1}-\varepsilon_{N,k}=0\,.$$

Comme $N+1+N=2N+1$ est impair et qu'une somme d'un nombre impair de ± 1 ne peut être nulle, nous obtenons une contradiction. Ainsi, la suite $\left(\frac{f(b_n)-f(a_n)}{b_n-a_n}\right)_{n\in\mathbf{N}}$ diverge-t-elle.

16. Nous avons supposé que la fonction f est dérivable en x.

i) D'après les questions 11 et 12, la suite $\left(\frac{f(b_n)-f(a_n)}{b_n-a_n}\right)_{n\in\mathbf{N}}$ converge.

- D'après la question 15, la suite $\left(\frac{f(b_n)-f(a_n)}{b_n-a_n}\right)_{n\in\mathbf{N}}$ diverge.

Les deux points précédents sont contradictoires. La fonction f n'est donc par dérivable en x.

On considère le $\mathbf{R}$-espace vectoriel $\mathscr{C}^0([0,1],\mathbf{R})$ muni de la norme $||\cdot||_\infty$.

17. i) La fonction g est continue sur $[0,1]$. D'après le théorème d'approximation polynomiale de Weierstraß il existe une suite de fonctions polynomiales $(P_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ de $[0,1]$ dans $\mathbf{R}$ telle que :

$$||\,P_n-g\,||_{\infty,[0,1]} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0\,.$$

ii) Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on pose :

$$g_n := P_n+\frac{1}{n}\,f_{|[0,1]}\,.$$

iii) Soit $n \in \mathbf{N}^*$. La fonction g_n est continue sur $[0,1]$ (Q10).

iv) Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Si la fonction g_n est dérivable en un réel $x \in]0,1[$, alors la fonction

$$f_{|[0,1]}=n\,g_n-n\,P_n$$

est également dérivable en x, ce qui n'est pas (Q16).

v) Soit $n \in \mathbf{N}^*$. En adaptant les arguments qui ont permis d'établir que la fonction f n'est dérivable en aucun point de $\mathbf{R}$, on peut démontrer que f n'est dérivable à droite (respectivement à gauche) en aucun point de $\mathbf{R}$. On en déduit que la fonction g_n n'est pas dérivable à droite en 0, ni à gauche en 1.

vi) Des deux points précédents, nous déduisons que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, la fonction g_n n'est dérivable en aucun point de $[0,1]$.

vii) Enfin :

$$0 \leqslant ||\,g_n-g\,||_{\infty,[0,1]} \leqslant ||\,P_n-g\,||_{\infty,[0,1]}+\frac{1}{n}\,\left|\left|\,f_{|[0,1]}\,\right|\right|_{\infty,[0,1]}\,.$$

Par théorème d'encadrement, il vient :

$$||\,g_n-g\,||_{\infty,[0,1]} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0\,.$$