TD – Suites et séries de fonctions 1

Exercice de la banque CCINP n°8. —

1. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante positive de limite nulle.*
   (a) *Démontrer que la série $\sum(-1)^k u_k$ est convergente. On pourra considérer $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ avec $S_n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k u_k$.*
   (b) *Donner une majoration de la valeur absolue du reste de la série $\sum(-1)^k u_k$.*
2. *On pose, pour tout $n\in\mathbf{N}$, $f_n : x \longmapsto \dfrac{(-1)^n e^{-nx}}{n}$.*
   (a) *Étudier la convergence simple sur $\mathbf{R}$ de la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} f_n$.*
   (b) *Étudier la convergence uniforme sur $[0,+\infty[$ de la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} f_n$.*

Exercice de la banque CCINP n°9. —

1. *Soit X un ensemble, (g_n) une suite de fonctions de X dans $\mathbf{C}$ et g une fonction de X dans $\mathbf{C}$. Donner la définition de la convergence uniforme sur X de la suite de fonctions (g_n) vers la fonction g.*
2. *On pose, pour tout $n\in\mathbf{N}$, $f_n : x \longmapsto \dfrac{n+2}{n+1}\mathrm{e}^{-nx^2}\cos\left(\sqrt{n}\,x\right)$.*
   (a) *Étudier la convergence simple de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$.*
   (b) *La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge-t-elle uniformément sur $[0,+\infty[$?*
   (c) *Soit $a>0$. La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge-t-elle uniformément sur $[a,+\infty[$?*
   (d) *La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge-t-elle uniformément sur $]0,+\infty[$?*

Exercice de la banque CCINP n°10 (tronqué). — *On pose, pour tout $n\in\mathbf{N}$, $f_n : x \longmapsto \left(x^2+1\right)\dfrac{ne^x+xe^{-x}}{n+x}$. Démontrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément sur $[0,1]$.*

Exercice de la banque CCINP n°11. —

1. *Soit X une partie de $\mathbf{R}$, $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de fonctions de X dans $\mathbf{R}$ convergeant simplement vers une fonction f. On suppose qu'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de X telle que la suite $(f_n(x_n)-f(x_n))_{n\in\mathbf{N}}$ ne tende pas vers 0. Démontrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ ne converge pas uniformément vers f sur X.*
2. *Pour tout $n\in\mathbf{N}$, on pose $f_n : x \longmapsto \dfrac{\sin(nx)}{1+n^2x^2}$.*
   (a) *Étudier la convergence simple de la suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$.*
   (b) *Étudier la convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ sur $[a,+\infty[$ (avec $a>0$), puis sur $]0,+\infty[$.*

Exercice de la banque CCINP n°12. —

1. *Soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de fonctions de $[a,b]$ dans $\mathbf{R}$. On suppose que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur $[a,b]$ vers une fonction f, et que, pour tout $n\in\mathbf{N}$, f_n est continue en x_0, avec $x_0\in[a,b]$. Démontrer que f est continue en x_0.*
2. *On pose, pour tout $n\in\mathbf{N}$, $g_n : x\longmapsto x^n$. La suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge-t-elle uniformément sur $[0,1]$?*

Exercice de la banque CCINP n°14. —

1. *Soit a et b deux réels donnés avec $a<b$. Soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de fonctions continues sur $[a,b]$, à valeurs réelles. Démontrer que si la suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément sur $[a,b]$ vers f, alors la suite $\left(\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x\right)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.*
2. *Justifier comment ce résultat peut être utilisé dans le cas des séries de fonctions.*
3. *Démontrer que $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}x^n\right)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n2^n}$.*

Exercice de la banque CCINP n°15. — *Soit X une partie de $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.*

1. *Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur X à valeurs dans $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$. Rappeler la définition de la convergence normale de $\sum f_n$ sur X, puis celle de la convergence uniforme de $\sum f_n$ sur X.*
2. *Démontrer que toute série de fonctions, à valeurs dans $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, normalement convergente sur X est uniformément convergente sur X.*
3. *La série de fonctions $\sum \frac{n^2}{n!} z^n$ est-elle uniformément convergente sur le disque fermé de centre 0 et de rayon $R \in \mathbf{R}_+^*$?*

Exercice de la banque CCINP n°16 (tronqué). — *On considère la série de fonctions de terme général u_n définie par, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$:*

$$u_n \left| \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \ln\left(1+\frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n} \end{array} \right. .$$

On pose, lorsque la série $\sum u_n(x)$ converge, $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\ln\left(1+\frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n} \right]$.

1. *Démontrer que S est définie sur $[0,1]$.*
2. *On définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ par $u_n = \ln(n+1) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. En utilisant $S(1)$ démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est convergente.*

   En déduire un équivalent simple de $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ lorsque $n \to +\infty$.

Exercice de la banque CCINP n°17. — *Soit $A \subset \mathbf{C}$ et $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de fonctions de A dans $\mathbf{C}$.*

1. *Démontrer l'implication*

$$\Big(\text{la série de fonctions } \sum f_n \text{ converge uniformément sur } A\Big)$$
$$\Downarrow$$
$$\Big(\text{la suite de fonctions } (f_n)_{n\in\mathbf{N}} \text{ converge uniformément vers 0 sur } A\Big)$$

2. *On pose, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $f_n : x \longmapsto n\, x^2\, \mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}$. Prouver que $\sum f_n$ converge simplement sur $[0,+\infty[$. $\sum f_n$ converge-t-elle uniformément sur $[0,+\infty[$? Justifier.*

Exercice de la banque CCINP n°53 (tronqué). — *On considère, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $f_n : x \longmapsto \frac{x}{1+n^4x^4}$.*

1. *Prouver que $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbf{R}$. On pose alors :*

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \end{array} \right. .$$

2. *Soit $(a,b) \in \mathbf{R}^2$ avec $0 < a < b$. $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge-t-elle normalement sur $[a,b]$? sur $[a,+\infty[$?*
3. *$\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge-t-elle normalement sur $[0,+\infty[$?*

Exercice 1 ★☆☆ — *Dans chacun des cas suivants, étudier la convergence simple et la convergence uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ sur $[0,1]$.*

(1) $f_n : x \longmapsto x^n\,(1-x)$

(2) $f_n : x \longmapsto n^\alpha\, x\,(1-x)^n$ *où* $\alpha \in \mathbf{R}$

(3) $f_n : x \longmapsto \begin{cases} x^n \ln(x) & \text{si } x \in\,]0,1] \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

(4) $f_n : x \longmapsto n^2\, e^{-nx}$

`modeConvergenceSuitesFonctions1`

Exercice 2 ★★☆ — *Pour tout $n \in \mathbf{N}$, posons :*

$$f_n \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_+ & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \arctan\left(\dfrac{n+x}{1+nx}\right). \end{array} \right.$$

Étudier la convergence simple et uniforme sur $[0,+\infty[$ de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$.

modeConvergenceSuitesFonctions2 [corrigé]

Exercice 3 ★☆☆ — *Soient X un ensemble non vide et $(f_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathscr{F}(X,\mathbf{K})^{\mathbf{N}}$ une suite de fonctions.*

1. *Démontrer :*

$$\sum f_n \text{ converge uniformément sur } X \implies f_n \xrightarrow[X]{\text{CU}} 0_{\mathscr{F}(X,\mathbf{K})}.$$

La contraposée de cette implication permet de démontrer la non-convergence uniforme d'une série de fonctions.

2. *Démontrer, au moyen d'une contre-exemple, que la réciproque de l'implication de la question 1 est fausse.*

conditionNecessaireConvergenceUniformeSerieFonctions

Exercice 4 ★☆☆ — *Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on considère la fonction $f_n : x \longmapsto n\, e^{-n^2x^2}$.*

1. *Déterminer le domaine de définition de la fonction :*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n \;:\; x \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x).$$

2. *Démontrer que, pour tout $a > 0$, la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur les intervalles $]-\infty,-a]$ et $[a,+\infty[$.*
3. *La série de fonctions $\sum f_n$ converge-t-elle uniformément sur $]0,+\infty[$?*

modeConvergenceSeriesFonctions1

Exercice 5 ★☆☆ — *Posons, pour tout $n \in \mathbf{N}$:*

$$f_n \left| \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{(-1)^n}{nx+1}. \end{array} \right.$$

1. *Démontrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $]0,+\infty[$.*
2. *La série de fonctions $\sum f_n$ converge-t-elle normalement sur un segment d'intérieur non vide de $]0,+\infty[$?*
3. *Démontrer que la série $\sum f_n$ converge uniformément sur tout intervalle de la forme $[a,+\infty[$, avec $a > 0$.*
4. *Soit la fonction :*

$$S \left| \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{nx+1}. \end{array} \right.$$

Écrire S comme somme d'une série convergeant normalement sur tout intervalle de la forme $[a,+\infty[$, avec $a > 0$.

modeConvergenceSeriesFonctions2

Exercice 6 ★★☆ — *Soit la fonction $f : x \longmapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^{n^2}$.*

1. *Déterminer l'ensemble de definition de la fonction f.*
2. *Donner un équivalent de $f(x)$ quand x tend vers 1, sachant que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.*

equivalentSommeSerieFonctionsComparaisonSerieIntegrale

Exercice 7 ★☆☆ — *Soient I un intervalle de $\mathbf{R}$ d'intérieur non vide et une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathscr{F}(I,\mathbf{R})^{\mathbf{N}}$ convergeant simplement vers une fonction $f \in \mathscr{F}(I,\mathbf{R})$.*

1. *On suppose que l'intervalle I est symétrique par rapport à 0 et que, pour tout $n\in\mathbf{N}$, la fonction f_n est paire. Démontrer que la fonction f est paire.*
2. *On suppose que, pour tout $n\in\mathbf{N}$, la fonction f_n est croissante sur I. Démontrer que la fonction f est croissante sur I.*
3. *On suppose que toutes les fonctions f_n sont bornées sur I. Démontrer, au moyen d'un contre-exemple, que la fonction f n'est pas nécessairement bornée sur I.*
4. *On suppose que toutes les fonctions f_n sont continues sur I. Démontrer, au moyen d'un contre-exemple, que la fonction f n'est pas nécessairement continue sur I.*
5. *Soit $k\in\mathbf{R}$. On suppose que, pour tout $n\in\mathbf{N}$, la fonction f_n est k-lipschitzienne sur I. Démontrer que la fonction f est k-lipschitzienne sur I.*
6. *On suppose que, pour tout $n\in\mathbf{N}$, la fonction f_n est lipschitzienne sur I. Démontrer, au moyen d'un contre-exemple, que la fonction f n'est pas nécessairement lipschitzienne sur I.*

`proprietesPreserveesConvergenceSimple`

Exercice 8 ★☆☆ — *Soit I un intervalle de $\mathbf{R}$. Notons $\mathscr{B}(I,\mathbf{C})$ l'espace vectoriel des fonctions bornées de I dans $\mathbf{C}$. Pour tout $f\in\mathscr{B}(I,\mathbf{C})$, posons :*

$$||f||_\infty := \sup_{x\in I} |f(x)| \ .$$

1. *Démontrer que $||\cdot||_\infty$ est une norme sur $\mathscr{B}(I,\mathbf{C})$.*
2. *Soit $(g_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de fonctions de I dans $\mathbf{C}$ convergeant uniformément sur I vers une fonction g. On suppose que pour tout $n\in\mathbf{N}$, la fonction g_n est bornée. Démontrer que la fonction g est bornée.*

`limiteUniformeSuitesFonctionsBornees`

Exercice 9 ★★☆ — *Soient I un intervalle de $\mathbf{R}$, $a\in I$, $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}\in\mathscr{C}^0(I,\mathbf{R})^{\mathbf{N}}$ et $f\in\mathscr{F}(I,\mathbf{R})$ tels que :*

$$f_n \xrightarrow[I]{\text{CU}} f \ .$$

En remarquant que :

$$\forall\,(N,x)\in\mathbf{N}\times I \quad |f(x)-f(a)| \leqslant |f(x)-f_N(x)| + |f_N(x)-f_N(a)| + |f_N(a)-f(a)|$$

démontrer que la fonction f est continue en a.

> *Nous avons ainsi démontré qu'une limite uniforme de fonctions continues sur un intervalle est continue sur un intervalle. Ce résultat figurera dans la chapitre « Suites et séries de fonctions 2 ».*

`continuitePreserveeContinuiteUniforme`

Exercice 10 ★☆☆ — *Soient a,b des réels tels que $a<b$, $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}\in\mathscr{C}^0([a,b],\mathbf{R})^{\mathbf{N}}$ et $f\in\mathscr{F}([a,b],\mathbf{R})$ tels que :*

$$f_n \xrightarrow[[a,b]]{\text{CU}} f \ .$$

D'après l'exercice 9, la fonction f est continue sur $[a,b]$. Démontrer que :

$$\int_a^b f_n(t)\ \mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t \ .$$

> *Nous avons ainsi démontré que, pour toute suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ continues sur un segment $[a,b]$, qui converge uniformément sur $[a,b]$:*
> $$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(t)\ \mathrm{d}t = \int_a^b \lim_{n\to+\infty} f_n(t)\ \mathrm{d}t \ .$$
> *Ce résultat figurera dans la chapitre « Suites et séries de fonctions 2 ».*

`echangeLimiteIntegraleConvergenceUniformeSegment`

Exercice 11 ★★☆ — *Soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de fonctions continues sur $[a,b]$ à valeurs réelles. On suppose que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément sur $[a,b]$, vers une fonction f. D'après l'exercice 9, la fonction f est continue sur $[a,b]$. Démontrer que :*

$$\sup_{x\in[a,b]} f_n(x) \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} \sup_{x\in[a,b]} f(x)$$

après avoir justifié l'existence des nombres en jeu.

`echangeLimiteBorneSuperieureConvergenceUniformeSegment`

Exercice 12 ★★☆ — *Soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de fonctions continues sur $[a,b]$ à valeurs réelles. On suppose qu'il existe une fonction continue $f:[a,b]\longrightarrow\mathbf{R}$ telle que la suite de fonctions $\left((f_n)_{|[a,b[}\right)_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément vers $f_{|[a,b[}$. D'après l'exercice 3, la fonction f est continue sur l'intervalle $[a,b[$.*

1. *Démontrer que $f_n(b)\xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} f(b)$.*
2. *En déduire que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément vers f sur $[a,b]$.*

`theoremeDoubleLimiteBordVersionFaible`

Exercice 13 ★★☆ — *Soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de fonctions continues sur $[a,b]$, à valeurs réelles, convergeant simplement sur $[a,b]$ vers la fonction nulle. On suppose que, pour tout $x\in[a,b]$, la suite numérique $(f_n(x))_{n\in\mathbf{N}}$ est décroissante.*

1. *Justifier que, pour tout $n\in\mathbf{N}$, il existe $x_n\in[a,b]$ tel que $f_n(x_n)=\sup_{x\in[a,b]} f_n(x)$.*
2. *Démontrer que la suite numérique $(f_n(x_n))_{n\in\mathbf{N}}$ converge. Nous notons ℓ sa limite.*
3. *Justifier que la suite numérique $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ possède une valeur d'adhérence x.*
4. *Démontrer que :*
$$\forall\, n\in\mathbf{N}\quad 0\leqslant \ell\leqslant f_n(x)\,.$$
5. *Démontrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément vers la fonction nulle sur $[a,b]$.*
6. *Soit $(g_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de fonctions de $[a,b]$ dans $\mathbf{R}$. On suppose que :*

   On suppose que

   (H1) *la suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge simplement vers une fonction g sur $[a,b]$;*

   (H2) *pour tout $n\in\mathbf{N}$, la fonction g_n est continue sur $[a,b]$;*

   (H3) *la fonction g est continue sur $[a,b]$;*

   (H4) *pour tout $x\in[a,b]$, la suite numérique $(g_n(x))_{n\in\mathbf{N}}$ est décroissante.*

   Démontrer que la suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément vers g. Il s'agit d'un théorème dû à Dini.

Ulisse Dini (1845-1918)

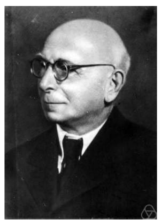
`premierTheoremeDini`

Exercice 14 ★★☆ — *Soit $f\in\mathscr{C}^0([0,1],\mathbf{R})$.*

Pour tout $n\in\mathbf{N}$, nous définissons le polynôme :

$$B_n(f) := \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) X^k\,(1-X)^{n-k}\qquad [\textit{polynôme de Bernstein}]$$

que nous confondons avec la fonction polynomiale associée sur $[0,1]$.



Sergueï Bernstein (1880-1968)

On se propose de démontrer que :

$$B_n(f)\xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CU}} f\qquad [\textit{théorème d'approximation polynomiale de Weierstraß}]\,.$$

Karl Weierstraß (1815-1897)

1. *Soient les fonctions*

$$f_0 \left| \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & 1 \end{array} \right. \qquad f_1 \left| \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x \end{array} \right. \qquad f_2 \left| \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \right.$$

   Démontrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $B_n(f_0) = 1$, $B_n(f_1) = X$ *et* $B_n(f_2) = X^2 + \dfrac{X(1-X)}{n}$.
2. *On fixe un réel* $\varepsilon > 0$.
   (a) *Vérifier que :*
   $$\forall\,(n,x) \in \mathbf{N}^* \times [0,1] \quad f(x) - B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \left(f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right).$$
   (b) *Justifier que :*
   $$\exists\,\eta > 0 \quad \forall\, x \in [0,1] \quad \forall\, n \in \mathbf{N}^* \quad \forall\, k \in [\![0,n]\!] \quad \left| x - \frac{k}{n} \right| \leqslant \eta \Longrightarrow \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leqslant \varepsilon\,.$$
   (c) *Soit* $(n,x) \in \mathbf{N}^* \times [0,1]$. *On pose :*
   $$I(n,x) := \left\{ k \in [\![0,n]\!] \;:\; \left| x - \frac{k}{n}\right| \leqslant \eta \right\} \qquad \textit{et} \qquad J(n,x) := \left\{ k \in [\![0,n]\!] \;:\; \left| x - \frac{k}{n}\right| > \eta \right\}.$$
   Démontrer que :
   $$\left| \sum_{k \in I(n,x)} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \left(f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right)\right| \leqslant \varepsilon$$
   puis :
   $$\left| \sum_{k \in J(n,x)} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \left(f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right)\right| \leqslant \frac{2\,||f||_\infty}{\eta^2} \sum_{k \in J(n,x)} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \left(x - \frac{k}{n}\right)^2.$$
   (d) *En déduire que :*
   $$\exists\, N_\varepsilon \in \mathbf{N}^* \quad \forall\, n \geqslant N_\varepsilon \quad ||B_n(f) - f||_\infty \leqslant 2\,\varepsilon\,.$$

`demonstrationTheoremeWeierstrassPolynomesBernstein` [corrigé]

Exercice 15 ★★★ — *Soit* $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *une suite de fonctions définies sur* $[a,b]$, *à valeurs réelles.*

On suppose que :

(H1) *la suite de fonctions* $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *converge simplement sur* $[a,b]$ *vers une fonction* f ;

(H2) *la fonction* f *est continue sur* $[a,b]$;

(H3) *pour tout* $n \in \mathbf{N}$, *la fonction* f_n *est croissante sur* $[a,b]$.

Démontrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *converge uniformément vers* f. *Il s'agit d'un théorème dû à Dini.*

Ulisse Dini (1845-1918)

`deuxiemeTheoremeDini` [corrigé]

Exercice 16 ★★★ — *Soit* $f \in \mathscr{C}^0([0,1],\mathbf{R})$. *Pour tout* $n \in \mathbf{N}$, *notons :*

$$g_n \left| \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x^n f(x)\,. \end{array} \right.$$

Démontrer que la suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *converge uniformément sur* $[0,1]$ *si et seulement si* $f(1) = 0$.

`cnsConvergenceUniformeSuiteArcsModifiee` [corrigé]

Exercice 17 ★★★ — *Posons :*

$$f \left| \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & 2\,x\,(1-x)\,. \end{array} \right.$$

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, *on note* f^n *la puissance n-ième de* f *pour le produit de composition.*

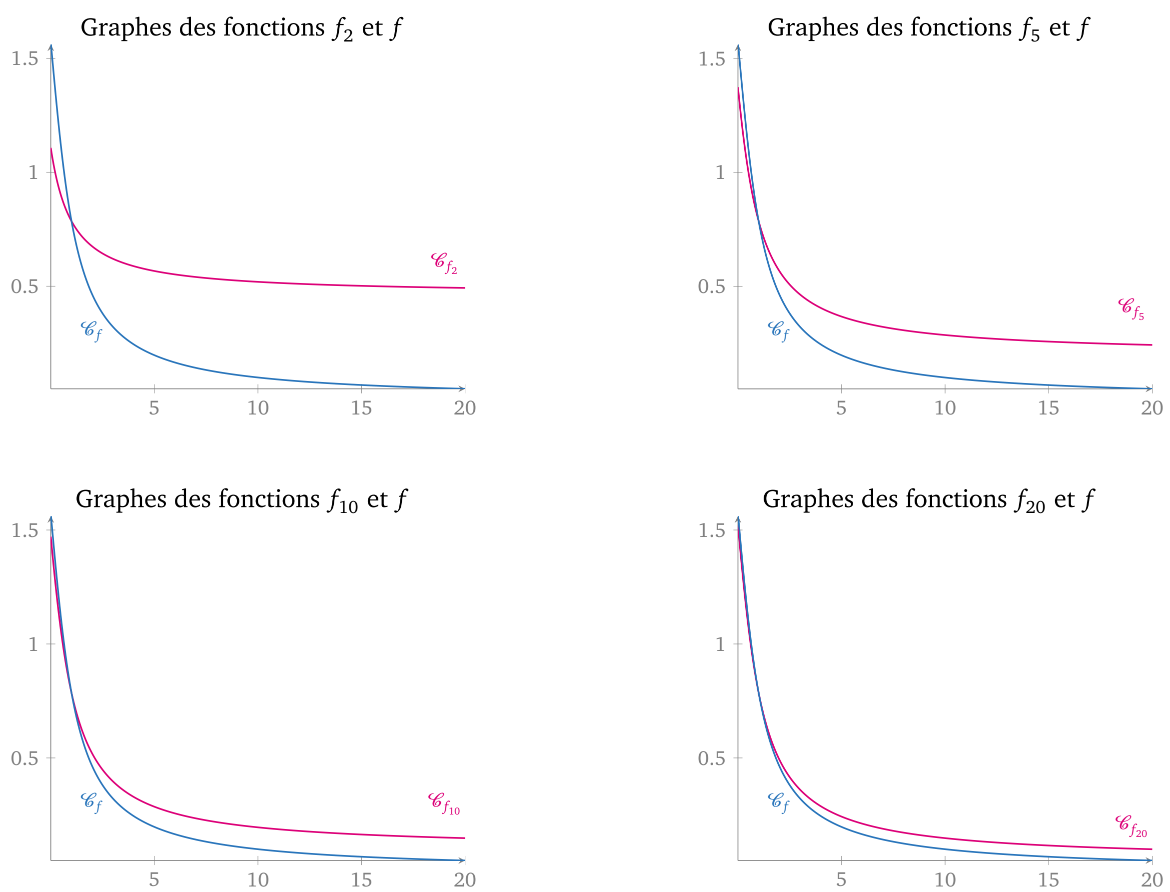
1. *Démontrer que la suite de fonctions* $(f^n)_{n\in\mathbf{N}}$ *converge simplement sur* $[0,1]$ *vers la fonction :*

$$g \left| \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \{0,1\} \\ \dfrac{1}{2} & \text{si } 0 < x < 1 \end{cases} \end{array} \right. .$$

2. *Soient* a, b *tels que* $0 < a < b < 1$. *Démontrer que l'ensemble des fonctions polynomiales à coefficients entiers est dense dans* $\mathscr{C}^0([a,b])$.

`densiteFonctionsPolynomialesCoefficientsEntiersX` [corrigé] modeConvergenceSuitesFonctions2 [énoncé]

Un corrigé de l'exercice 2



- *Étude de la convergence simple.* — Soit $x \in \mathbf{R}_+$ fixé.
  - Si $x = 0$ alors :
  $$f_n(x) = \arctan(n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\pi}{2}\,.$$
  - Si $x > 0$ alors :
  $$\frac{n+x}{1+nx} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x}$$
  donc :
  $$f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \arctan\left(\frac{1}{x}\right) \qquad [\text{continuité de arctan}]\,.$$

  Ainsi :
  $$\boxed{f_n \xrightarrow[\text{CS}]{\mathbf{R}_+} f \quad \left|\begin{array}{rcl} \mathbf{R}_+ & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} & \text{si } x = 0 \\ \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x > 0\,. \end{cases} \end{array}\right.}$$

- *Expression simplifiée de la limite simple.* — La fonction :
  $$\varphi : x \longmapsto \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$$
  est dérivable sur $]0,+\infty[$ et :
  $$\forall\, x \in\,]0,+\infty[\quad \varphi'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2} \times \frac{1}{1+\dfrac{1}{x^2}} = 0\,.$$

Comme $]0,+\infty[$ est un intervalle, nous en déduisons que la fonction φ est constante sur $]0,+\infty[$. Ainsi :

$$\forall\, x \in]0,+\infty[\quad \arctan(x)+\arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \arctan(1)+\arctan(1) = \frac{\pi}{2}\,.$$

d'où :

$$\forall\, x \in]0,+\infty[\quad f(x) = \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2} - \arctan(x)\,.$$

Nous en déduisons que :

$$\boxed{f_n \xrightarrow[\text{CS}]{\mathbf{R}_+} f \;\left|\; \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_+ & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\pi}{2} - \arctan(x)\,. \end{array}\right.}$$

- *Étude de la convergence uniforme.* — Fixons un entier $n \in \mathbf{N}^*$ et considérons la fonction :

$$f_n - f \;\left|\; \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_+ & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \arctan\left(\dfrac{n+x}{1+nx}\right) + \arctan(x) - \dfrac{\pi}{2}\,. \end{array}\right.$$

Comme les fonctions :

$$x \longmapsto \arctan\left(\frac{n+x}{1+nx}\right) = \arctan\left(\frac{1}{n}\left(1+\frac{n^2-1}{1+nx}\right)\right) \qquad \text{et} \qquad x \longmapsto \arctan(x) - \frac{\pi}{2}$$

ont des sens de variations opposés, nous ne voyons d'autre solution que de recourir au calcul différentiel pour connaître les variations de la fonction $f_n - f$.
La fonction $f_n - f$ est dérivable sur $\mathbf{R}_+$ et, pour tout $x \in \mathbf{R}_+$:

$$\begin{aligned}
(f_n - f)'(x) &= \frac{1\times(1+nx) - n\times(n+x)}{(1+nx)^2} \times \frac{1}{1+\left(\dfrac{n+x}{1+nx}\right)^2} + \frac{1}{1+x^2} \\
&= \frac{1-n^2}{(1+nx)^2+(n+x)^2} + \frac{1}{1+x^2} \\
&= \frac{\left(1-n^2\right)\left(1+x^2\right) + (1+nx)^2 + (n+x)^2}{\left((1+nx)^2+(n+x)^2\right)\left(1+x^2\right)} \\
&= \frac{2x^2+4nx+2}{\left((1+nx)^2+(n+x)^2\right)\left(1+x^2\right)} \qquad [\text{quantité strictement positive}]\,.
\end{aligned}$$

La fonction $f_n - f$ est donc strictement croissante sur $\mathbf{R}^+$.
D'après le résultat du cours sur l'image d'un intervalle par une fonction continue et strictement monotone :

$$(f_n-f)([0,+\infty[) = \left[(f_n-f)(0), \lim_{x\to+\infty}(f_n-f)(x)\right[= \left[\arctan(n) - \frac{\pi}{2}, \lim_{x\to+\infty}(f_n-f)(x)\right[$$

où l'existence de la limite (finie ou infinie) en $+\infty$ est assurée par le théorème de la limite monotone pour les fonctions.
Comme :

$$\frac{n+x}{1+xn} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$$

il vient :

$$(f_n-f)(x) = \arctan\left(\frac{n+x}{1+xn}\right) + \arctan(x) - \frac{\pi}{2} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \arctan\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{\pi}{2} - \arctan(n) \qquad [\text{continuité de arctan}]\,.$$

Ainsi :

$$(f_n-f)([0,+\infty[) = \left[\arctan(n) - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} - \arctan(n)\right[\,.$$

Nous en déduisons que :

$$\|f_n - f\|_{\infty,\mathbf{R}_+} := \sup\{|f_n(x)-f(x)| \,:\, x \in \mathbf{R}_+\} = \frac{\pi}{2} - \arctan(n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

d'où :

$$\boxed{f_n \xrightarrow[\text{CU}]{\mathbf{R}_+} f \;\left|\; \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_+ & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\pi}{2} - \arctan(x)\,. \end{array}\right.}$$

demonstrationTheoremeWeierstrassPolynomesBernstein [énoncé]

Un corrigé de l'exercice 14

1. Soit un entier $n \geqslant 2$.
   - *Calcul de $B_n(f_0)$.* — D'après la formule du binôme de Newton :
   $$\boxed{B_n(f_0) := \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k} = (X+1-X)^n = 1\,.}$$
   - *Calcul de $B_n(f_1)$.* — Rappellons que :
   $$\forall\, k \in [\![1,n]\!] \quad k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1} \qquad \text{[formule du capitaine]}\,.$$
   En l'appliquant, il vient :
   $$B_n(f_1) := \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{k}{n} X^k (1-X)^{n-k} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1} X^k (1-X)^{n-k}\,.$$
   En simplifiant et en effectuant le changement d'indice $\ell = k-1$, nous obtenons :
   $$B_n(f_1) = \sum_{\ell=0}^{n-1} \binom{n-1}{\ell} X^{\ell+1} (1-X)^{n-1-\ell} = X\sum_{\ell=0}^{n-1} \binom{n-1}{\ell} X^{\ell} (1-X)^{n-1-\ell}\,.$$
   La formule du binôme de Newton livre alors :
   $$\boxed{B_n(f_1) = X\ (X+1-X)^{n-1} = X\,.}$$
   Calcul de $B_n(f_2)$. — En remarquant que :
   $$\forall\, k \in [\![0,n]\!] \quad k^2 = k(k-1)+k$$
   il vient :
   $$B_n(f_2) := \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{k^2}{n^2} X^k (1-X)^{n-k} = \frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k(k-1) X^k (1-X)^{n-k} + \frac{1}{n}\underbrace{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{k}{n} X^k (1-X)^{n-k}}_{=:B_n(f_1)}$$
   puis, avec la valeur de $B_n(f_1)$ déjà calculée :
   $$B_n(f_2) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} k(k-1) X^k (1-X)^{n-k} + \frac{X}{n}\,.$$
   Rappellons que :
   $$\forall\, k \in [\![2,n]\!] \quad k(k-1)\binom{n}{k} = n(n-1)\binom{n-2}{k-2} \qquad \text{[formule du capitaine et du vice-capitaine]}\,.$$
   En l'appliquant, il vient :
   $$B_n(f_2) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=2}^{n} n(n-1)\binom{n-2}{k-2} X^k (1-X)^{n-k} + \frac{X}{n}\,.$$
   En simplifiant et en effectuant le changement d'indice $\ell = k-2$, nous obtenons :
   $$B_n(f_2) = \frac{n-1}{n}\sum_{\ell=0}^{n-2} \binom{n-2}{\ell} X^{\ell+2} (1-X)^{n-2-\ell} + \frac{X}{n} = \frac{n-1}{n} X^2 \sum_{\ell=0}^{n-2} \binom{n-2}{\ell} X^{\ell} (1-X)^{n-2-\ell} + \frac{X}{n}\,.$$
   La formule du binôme de Newton livre alors :
   $$\boxed{B_n(f_2) = \frac{n-1}{n} X^2\ (X+1-X)^{n-2} + \frac{X}{n} = \frac{n-1}{n} X^2 + \frac{X}{n} = X^2 + \frac{X(X-1)}{n}\,.}$$

2. (a) Soit $(n,x) \in \mathbf{N}^* \times [0,1]$. La formule du binôme de Newton nous apprend que :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f(x) = \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \right) f(x) = (x+1-x)^n f(x) = f(x) .$$

Nous en déduisons que :

$$f(x) - B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f(x) - \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

et finalement :

$$\boxed{f(x) - B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \left(f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right) .}$$

(b) La fonction f est continue sur le compact $[0,1]$. D'après le théorème de Heine :

$$\exists \eta > 0 \quad \forall x \in [0,1] \quad \forall y \in [0,1] \quad |x-y| \leqslant \eta \implies |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon .$$

Ainsi, si $x \in [0,1]$, $n \in \mathbf{N}^*$ et $k \in [\![0,n]\!]$ vérifient $\left| x - \frac{k}{n} \right| \leqslant \eta$, alors :

$$\left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leqslant \varepsilon .$$

Nous avons donc démontré que :

$$\boxed{\exists \eta > 0 \quad \forall x \in [0,1] \quad \forall n \in \mathbf{N}^* \quad \forall k \in [\![0,n]\!] \quad \left| x - \frac{k}{n} \right| \leqslant \eta \implies \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leqslant \varepsilon .}$$

(c) • *Majoration de* $\left| \sum_{k \in I(n,x)} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \left(f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right) \right|$. — Soit $k \in I(n,x)$ Alors, par définition :

$$\left| x - \frac{k}{n} \right| \leqslant \eta$$

et donc, d'après Q2.(b) :

$$\left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leqslant \varepsilon .$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k \in I(n,x)} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \left(f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right) \right| &\leqslant \sum_{k \in I(n,x)} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \\ &\leqslant \sum_{k \in I(n,x)} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \varepsilon \\ &= \left(\sum_{k \in I(n,x)} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \right) \varepsilon . \end{aligned}$$

En remarquant que, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \geqslant 0$, nous obtenons :

$$\left| \sum_{k \in I(n,x)} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \left(f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right) \right| \leqslant \left(\sum_{k \in I(n,x)} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \right) \varepsilon \leqslant \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \right) \varepsilon .$$

En appliquant la formule du binôme de Newton, il vient finalement :

$$\boxed{\left| \sum_{k \in I(n,x)} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \left(f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right) \right| \leqslant (x+1-x)^n \varepsilon = \varepsilon .}$$

- *Majoration de* $\displaystyle\left|\sum_{k\in J(n,x)}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\left(f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right)\right|$. — En appliquant l'inégalité triangulaire, nous obtenons :

$$\left|\sum_{k\in J(n,x)}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\left(f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right)\right|\leqslant\sum_{k\in J(n,x)}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\left(|f(x)|+\left|f\left(\frac{k}{n}\right)\right|\right).$$

Comme $|f(x)|\leqslant\|f\|_\infty$ et, pour tout $k\in J(n,x)$, $\left|f\left(\frac{k}{n}\right)\right|\leqslant\|f\|_\infty$, nous en déduisons que :

$$(\star)\qquad\left|\sum_{k\in J(n,x)}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\left(f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right)\right|\leqslant 2\,\|f\|_\infty\sum_{k\in J(n,x)}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}.$$

Par définition :

$$\forall\,k\in J(n,x)\quad\left|x-\frac{k}{n}\right|>\eta>0.$$

Par croissance de la fonction « élévation au carré » sur $\mathbf{R}_+$, nous obtenons :

$$(\star\star)\qquad\forall\,k\in J(n,x)\quad 1\leqslant\frac{\left(x-\frac{k}{n}\right)^2}{\eta^2}.$$

D'après $(\star)$ et $(\star\star)$:

$$\boxed{\left|\sum_{k\in J(n,x)}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\left(f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right)\right|\leqslant\frac{2\,\|f\|_\infty}{\eta^2}\sum_{k\in J(n,x)}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\left(x-\frac{k}{n}\right)^2.}$$

(d) Soit un entier $n\geqslant 2$.
Considérons un point $x\in[0,1]$.
D'après Q2.(a) :

$$\begin{aligned}|f(x)-B_n(f)(x)| &\leqslant \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\left|f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right|\\ &= \sum_{k\in I(n,x)}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\left|f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right|+\sum_{k\in J(n,x)}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\left|f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right|.\end{aligned}$$

Grâce à Q2.(c), nous en déduisons que :

$$|f(x)-B_n(f)(x)|\leqslant\varepsilon+\frac{2\,\|f\|_\infty}{\eta^2}\sum_{k\in J(n,x)}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\left(x-\frac{k}{n}\right)^2.$$

Comme, pour tout $k\in[\![0,n]\!]$, $\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\left(x-\frac{k}{n}\right)^2\geqslant 0$, il vient :

$$(\star)\qquad|f(x)-B_n(f)(x)|\leqslant\varepsilon+\frac{2\,\|f\|_\infty}{\eta^2}\underbrace{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\left(x-\frac{k}{n}\right)^2}_{:=S(n,x)}.$$

En développant, il vient :

$$S(n,x)=x^2\underbrace{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}}_{:=B(f_0)(x)}-2x\underbrace{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{k}{n}x^k(1-x)^{n-k}}_{:=B(f_1)(x)}+\underbrace{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{k^2}{n^2}x^k(1-x)^{n-k}}_{:=B(f_2)(x)}.$$

En appliquant Q1, nous pouvons réécrire $S(n,x)$:

$$(\star\star)\qquad S(n,x)=x^2-2x^2+x^2+\frac{x(1-x)}{n}=\frac{x(1-x)}{n}.$$

D'après ($\star$) et ($\star\star$) :

$$|f(x)-B_n(f)(x)| \leqslant \varepsilon + \frac{2\,||f\,||_\infty}{\eta^2} \times \frac{x(1-x)}{n}\,.$$

Grâce à la forme canonique d'un trinôme du second degré, nous obtenons que :

$$0 \leqslant x(1-x) = \frac{1}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \leqslant \frac{1}{4}$$

puis :

$$|f(x)-B_n(f)(x)| \leqslant \varepsilon + \frac{||f\,||_\infty}{2\,\eta^2\,n}\,.$$

En posant :

$$N_\varepsilon := \left\lfloor \frac{||f\,||_\infty}{2\,\eta^2\,\varepsilon} \right\rfloor + 2 \qquad [\text{entier naturel plus grand que 2, indépendant de } x]$$

nous obtenons donc :

$$\boxed{\forall\, n \geqslant N_\varepsilon \quad \underbrace{\forall\, x \in [0,1] \quad |f(x)-B_n(f)(x)| \leqslant 2\,\varepsilon}_{\text{i.e. } ||B_n(f)-f\,||_\infty \leqslant 2\,\varepsilon}\,.}$$

deuxiemeTheoremeDini [énoncé]

Un corrigé de l'exercice 15

Fixons $\varepsilon > 0$.

- La fonction f étant continue sur le segment $[a,b]$, elle est uniformément continue (théorème de Heine). Il existe donc un réel $\eta > 0$ tel que
$$\forall (x,y) \in [a,b]^2 \quad |x-y| \leqslant \eta \implies |f(x)-f(y)| \leqslant \varepsilon$$
Introduisons un entier naturel non nul N tel que $\dfrac{b-a}{N} \leqslant \eta$, ($\mathbf{R}$ est un corps archimédien) et considérons la subdivision du segment $[a,b]$ définie par
$$a_0 = a \ < \ a_1 = a + \frac{(b-a)}{N} \ < \ \ldots \ < \ a_k = a + k\,\frac{(b-a)}{N} \ < \ \ldots \ < \ a_N = a + N\,\frac{(b-a)}{N} = b$$
- D'après la convergence simple de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ vers la fonction f sur $[a,b]$
$$\forall k \in [\![0,N]\!] \quad \exists N_k \in \mathbf{N} \quad \forall n \geqslant N_k \quad |f_n(a_k) - f(a_k)| \leqslant \varepsilon$$
Posons $N := \max\{N_k \ : \ k \in [\![0,N]\!]\}$ et fixons un entier $n \geqslant N$.
- Soient $x \in [a,b]$ et $k \in [\![0,N-1]\!]$ tel que $x \in [a_k, a_{k+1}]$. La fonction f est croissante sur $[a,b]$ (limite simple d'une suite de fonctions croissantes), tout comme la fonction f_n. Ainsi
$$f(a_k) - f_n(a_{k+1}) \leqslant f(x) - f_n(x) \leqslant f(a_{k+1}) - f_n(a_k)$$
qui s'écrit encore
$$\underbrace{f(a_k) - f(a_{k+1})}_{\geqslant -\varepsilon} + \underbrace{f(a_{k+1}) - f_n(a_{k+1})}_{\geqslant -\varepsilon} \leqslant f(x) - f_n(x) \leqslant \underbrace{f(a_{k+1}) - f(a_k)}_{\leqslant \varepsilon} + \underbrace{f(a_k) - f_n(a_k)}_{\leqslant \varepsilon}$$
d'où $|f_n(x) - f(x)| \leqslant 2\,\varepsilon$.

`cnsConvergenceUniformeSuiteArcsModifiee` [énoncé]

Un corrigé de l'exercice 16

La suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge simplement vers la fonction

$$g \left| \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leqslant x < 1 \\ f(1) & \text{si } x = 1 \end{cases} \end{array} \right.$$

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons que la suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément vers g sur le segment $[0,1]$. Alors

$$\forall n \in \mathbf{N}^* \quad 0 \leqslant \left(1-\frac{1}{n}\right)^n \left|f\left(1-\frac{1}{n}\right)\right| = \left|g_n\left(1-\frac{1}{n}\right)-g\left(1-\frac{1}{n}\right)\right| \leqslant \|\, g_n - g\,\|_{\infty,[0,1]}$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, il vient

$$0 \leqslant \frac{|f(1)|}{e} \leqslant 0$$

Remarque. Si l'on sait qu'une limite uniforme d'une suite de fonctions continues sur $[0,1]$ est continue sur $[0,1]$, l'assertion à établir est claire. En effet, la continuité de la fonction g sur $[0,1]$ livre $f(1)=0$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons que $f(1)=0$ et fixons $\varepsilon>0$.

- Par continuité de f en 1
$$\exists\, \alpha \in \,]0,1[\quad \forall x \in \,]\alpha,1] \quad |f(x)| \leqslant \varepsilon$$
Nous en déduisons que
$$\forall n \in \mathbf{N} \quad \forall x \in \,]\alpha,1] \quad |g_n(x)-g(x)| = |g_n(x)| = x^n\,|f(x)| \leqslant \varepsilon$$
- La suite $(\alpha^n)_{n\in\mathbf{N}}$ convergeant vers 0
$$\exists\, N \in \mathbf{N} \quad \forall n \geqslant N \quad \alpha^n \leqslant \varepsilon$$
Nous en déduisons que
$$\forall n \geqslant N \quad \forall x \in [0,\alpha] \quad |g_n(x)-g(x)| = |g_n(x)| = x^n\,|f(x)| \leqslant \alpha^n\,\|f\|_{\infty,[0,1]} \leqslant \varepsilon\,\|f\|_{\infty,[0,1]}$$
- Des deux points précédents, nous déduisons que
$$\forall n \geqslant N \quad \forall x \in [0,1] \quad |g_n(x)-g(x)| \leqslant \varepsilon + \varepsilon\,\|f\|_{\infty,[0,1]}$$

densiteFonctionsPolynomialesCoefficientsEntiersX [énoncé]

Un corrigé de l'exercice 17

1. Pour tout $x \in [0,1]$, la suite numérique $(f^n(x))_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite récurrente. Nous savons donc comment procéder pour l'étudier.

   (a) Pour tout $x \in [0,1]$
   $$0 \leqslant 2x(1-x) = \frac{1}{2} - 2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \leqslant \frac{1}{2}$$
   donc $f([0,1]) \subset \left[0, \frac{1}{2}\right]$ et le segment $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ est stable par f. Donc
   $$\forall\, x \in [0,1] \quad \forall\, n \in \mathbf{N}^* \quad f^n(x) \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$$

   (b) La fonction f est croissante sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ et
   $$\forall\, x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \quad f(x) - x = 2x\left(\frac{1}{2} - x\right) \geqslant 0$$
   Nous en déduisons que
   $$\forall\, x \in [0,1] \quad \forall\, n \in \mathbf{N}^* \quad f^n(x) \leqslant f^{n+1}(x)$$

   Fixons un réel $x \in [0,1]$. D'après (a) et (b), la suite numérique $(f^n(x))_{n\in\mathbf{N}^*}$ est croissante, a tous ses termes dans $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, donc est majorée. D'après le théorème de la limite monotone, la suite numérique $(f^n(x))_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge et
   $$0 \leqslant \lim_{n\to+\infty} f^n(x) = \sup_{n\in\mathbf{N}^*} f^n(x) \leqslant \frac{1}{2}$$
   Comme de plus

   (c) la fonction f est continue sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$

   (d) la fonction f possède deux points fixes 0 et $\frac{1}{2}$ pour seuls points fixes sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$

   la suite numérique $(f^n(x))_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge vers 0 ou $\frac{1}{2}$. Scindons alors l'étude en deux parties.

   - Cas où $x \in \{0,1\}$. Tous les termes de la suite numérique $(f^n(x))_{n\in\mathbf{N}^*}$ sont nuls. Elle converge donc vers 0.
   - Cas où $x \in \,]0,1[$. D'après le théorème de la limite monotone
   $$0 < f^1(x) \leqslant \sup_{n\in\mathbf{N}^*} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$$
   La suite numérique $(f^n(x))_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge donc vers $\frac{1}{2}$.

2. (a) La symétrie de la courbe représentative de la fonction
   $$f \left| \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & 2x(1-x) = \dfrac{1}{2} - 2\left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 \end{array} \right.$$
   par rapport à la droite d'équation $x = \frac{1}{2}$ nous invite à considérer des segments inclus dans $]0,1[$ centrés en $\frac{1}{2}$.

   (b) Soient $r \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$ et $x \in \left[\frac{1}{2} - r, \frac{1}{2} + r\right] = B_f\left(\frac{1}{2}, r\right)$. Comme $\left|x - \frac{1}{2}\right| \leqslant r$
   $$f\left(\frac{1}{2} - r\right) \leqslant \frac{1}{2} - 2r^2 \leqslant \frac{1}{2} - 2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = f(x) \leqslant \frac{1}{2}$$
   La fonction f étant croissante sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, il vient
   $$\forall\, n \in \mathbf{N}^* \quad f^n\left(\frac{1}{2} - r\right) \leqslant f^n(x) \leqslant \frac{1}{2}$$

puis

$$\forall n \in \mathbf{N}^* \quad 0 \leqslant \frac{1}{2} - f^n(x) \leqslant \frac{1}{2} - f^n\left(\frac{1}{2} - r\right)$$

et la dernière inégalité est une égalité pour $x = \dfrac{1}{2} - r$. Ainsi

$$|| f^n - g ||_{\infty, \left[\frac{1}{2}-r, \frac{1}{2}+r\right]} = \frac{1}{2} - f^n\left(\frac{1}{2} - r\right)$$

Comme $\dfrac{1}{2} - r \in]0,1[$, nous déduisons de la question 1 que

$$|| f^n - g ||_{\infty, \left[\frac{1}{2}-r, \frac{1}{2}+r\right]} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

(c) Soient a, b des réels tels que $0 < a < b < 1$. Alors

$$r := \min\{1 - b, a\} \in \left]0, \frac{1}{2}\right[\qquad \text{et} \qquad [a, b] \subset [r, 1 - r] = B_f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} - r\right)$$

De (b), nous déduisons que la suite de fonctions $(f^n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ converge uniformément sur $[a, b]$.

3. Pour tout $P \in \mathbf{R}[X]$, on pose

$$\widetilde{P} \left| \begin{array}{ccc} [a,b] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} [P]_n \, x^n \end{array} \right.$$

Notons

$$\mathscr{P}([a, b]) = \left\{ \widetilde{P} \ : \ P \in \mathbf{R}[X] \right\} \qquad , \qquad \mathscr{P}_{\mathbf{Z}}([a, b]) = \left\{ \widetilde{P} \ : \ P \in \mathbf{Z}[X] \right\}$$

et $\overline{\mathscr{P}([a, b])}$, $\overline{\mathscr{P}_{\mathbf{Z}}([a, b])}$ leurs adhérences respectives dans $\left(\mathscr{C}^0([a, b]), || \cdot ||_\infty\right)$.

(a) D'après le théorème de Weierstraß, $\overline{\mathscr{P}([a, b])} = \mathscr{C}^0([a, b])$. Il suffit donc de démontrer que

$$\mathscr{P}([a, b]) \subset \overline{\mathscr{P}_{\mathbf{Z}}([a, b])}$$

pour en déduire $\overline{\mathscr{P}_{\mathbf{Z}}([a, b])} = \mathscr{C}^0([a, b])$.

(b) L'ensemble $\mathscr{P}_{\mathbf{Z}}([a, b])$ est un anneau, stable pour le produit de composition. Ainsi

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad f^n_{|[a,b]} \in \mathscr{P}_{\mathbf{Z}}([a, b])$$

D'après la question 2, la fonction constante sur $[a, b]$, égale à $\dfrac{1}{2}$, appartient à $\overline{\mathscr{P}_{\mathbf{Z}}([a, b])}$.

(c) Introduisons l'ensemble des nombres dyadiques

$$\mathscr{D}_2 := \left\{ \frac{p}{2^p} \ : \ (p, q) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{N} \right\}$$

et l'ensemble des fonctions constantes dyadiques sur $[a, b]$

$$\mathscr{D}_2([a, b]) := \left\{ \varphi \in \mathbf{R}^{[a,b]} \ : \ \exists\, d \in \mathscr{D}_2 \quad \forall x \in [a, b] \quad \varphi(x) = d \right\}$$

Soit $(p, q) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{N}$. La fonction

$$h \left| \begin{array}{ccc} [a,b] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & p\, x^q \end{array} \right.$$

appartient à $\mathscr{P}_{\mathbf{Z}}([a, b])$. Elle est de classe $\mathscr{C}^1$ sur le segment $[a, b]$, donc $|| h' ||_\infty$-lipschitzienne sur $[a, b]$ (inégalité des accroissements finis). Nous en déduisons que

$$\forall x \in [a, b] \quad \left| h(f^n(x)) - \frac{p}{2^q} \right| \leqslant \left|\left| h' \right|\right|_\infty \left| f^n(x) - \frac{1}{2} \right| \leqslant \underbrace{\left|\left| h' \right|\right|_\infty \, || f^n - g ||_\infty}_{\text{indépendant de } x}$$

Par passage à la borne supérieure sur $x \in [a, b]$, il vient

$$\left|\left| h \circ f^n_{|[a,b]} - h \circ g_{|[a,b]} \right|\right|_\infty \leqslant \left|\left| h' \right|\right|_\infty \left|\left| f^n_{|[a,b]} - g_{|[a,b]} \right|\right|_\infty$$

De la question 2, nous déduisons que la suite $\left(h \circ f^n_{|[a,b]}\right)_{n \in \mathbf{N}}$ d'éléments de $\mathscr{P}_{\mathbf{Z}}([a, b])$ converge uniformément vers la fonction constante dyadique

$$h \circ g_{|[a,b]} \left| \begin{array}{ccc} [a,b] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{p}{2^q} \end{array} \right.$$

sur $[a, b]$. Ceci étant établi pour $(p, q) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{N}$ quelconque, nous en déduisons que toute fonction constante dyadique sur $[a, b]$ est limite uniforme d'une suite d'éléments de $\mathscr{P}_{\mathbf{Z}}([a, b])$ sur $[a, b]$.

(d) Nous démontrons que l'ensemble $\mathscr{D}_2$ des nombres dyadiques est dense dans $\mathbf{R}$. Soit α et β des réels tels que $\alpha < \beta$. Comme la suite numérique $\left(\dfrac{1}{2^n}\right)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers 0

$$\exists\, q \in \mathbf{N} \quad \frac{1}{2^q} < \beta - \alpha$$

Posons $p := \lfloor 2^q\,\alpha \rfloor \in \mathbf{Z}$. Alors

$$\alpha < \frac{p}{2^q} + \frac{1}{2^q} \leqslant \alpha + \frac{1}{2^q} < \alpha + \beta - \alpha = \beta$$

Le nombre dyadique $\dfrac{p+1}{2^q}$ appartient donc à l'intervalle $]\alpha, \beta[$.

(e) Nous démontrons, en raisonnant par récurrence que, pour tout entier $d \in \mathbf{N}$, l'assertion

$$\mathscr{P}(d) \;:\; \text{« } \forall\, P \in \mathbf{R}_d[X] \quad \exists\, (P_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathbf{Z}[X]^{\mathbf{N}} \quad \widetilde{P_n} \xrightarrow[{[a,b]}]{\text{CU}} \widetilde{P} \text{ »}$$

est vraie. Nous en déduirons $\mathscr{P}([a,b]) \subset \overline{\mathscr{P}_{\mathbf{Z}}([a,b])}$ et la démonstration sera achevée.

- Initialisation. Soit $P \in \mathbf{R}_0[X]$ (polynôme constant) et $\varepsilon > 0$. D'après (d)

$$\exists\, (p,q) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{N} \quad \left|\frac{p}{2^q} - P(0)\right| \leqslant \varepsilon$$

  Notons k la fonction constante dyadique sur $[a,b]$ égale à $\dfrac{p}{2^q}$, de sorte que

$$\left|\left| k - \widetilde{P} \right|\right|_\infty \leqslant \varepsilon$$

  D'après (c), il existe $Q \in \mathbf{Z}[X]$ telle que

$$\left|\left| \widetilde{Q} - k \right|\right|_\infty \leqslant \varepsilon$$

  Nous en déduisons que

$$\left|\left| \widetilde{Q} - \widetilde{P} \right|\right|_\infty \leqslant 2\,\varepsilon$$

  L'assertion $\mathscr{P}(0)$ est établie.

- Hérédité. Soit $d \in \mathbf{N}$ tel que l'assertion $\mathscr{P}(d)$ est vraie. Considérons $P \in \mathbf{R}_{d+1}[X]$, que nous écrivons

$$P = AX^{d+1} + B$$

  avec $A \in \mathbf{R}_0[X]$ et $B \in \mathbf{R}_d[X]$. D'après l'initialisation et l'hypothèse de récurrence

$$\exists\, (A_n)_{n\in\mathbf{N}}, (B_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathbf{Z}[X]^{\mathbf{N}} \quad \widetilde{A_n} \xrightarrow[{[a,b]}]{\text{CU}} \widetilde{A} \quad \text{et} \quad \widetilde{B_n} \xrightarrow[{[a,b]}]{\text{CU}} \widetilde{B}$$

  Soit $n \in \mathbf{N}$. Le polynôme $P_n := A_n X^{d+1} + B_n$ appartient à $\mathbf{Z}[X]$ et, pour tout $x \in [0,1]$

$$\left|\widetilde{P_n}(x) - \widetilde{P}(x)\right| = \left|\widetilde{A_n}(x)\, x^{d+1} + \widetilde{B_n} x - \widetilde{A}(x)\, x^{d+1} - \widetilde{B} x\right| \leqslant \left|\widetilde{A_n}(x) - \widetilde{A}(x)\right|\, |x|^{d+1} + \left|\widetilde{B_n}(x) - \widetilde{B}(x)\right|$$

  Nous en déduisons que

$$\left|\left| \widetilde{P_n} - \widetilde{P} \right|\right|_\infty \leqslant \left|\left| \widetilde{A_n} - \widetilde{A} \right|\right|_\infty + \left|\left| \widetilde{B_n} - \widetilde{B} \right|\right|_\infty$$

  puis que $\widetilde{P_n} \xrightarrow[{[a,b]}]{\text{CU}} \widetilde{P}$.