TD – Séries entières

Exercice de la banque CCINP n°2. — *On pose* $f(x) = \dfrac{3x+7}{(x+1)^2}$.

1. *Décomposer $f(x)$ en éléments simples.*
2. *En déduire que f est développable en série entière sur un intervalle du type $]-r,r[$ (où $r>0$). Préciser ce développement en série entière et déterminer, en le justifiant, le domaine de validité D de ce développement en série entière.*
3. (a) *Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon $R>0$. On pose, pour tout $x \in]-R,R[$, $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. Exprimer, pour tout entier p, en le prouvant, a_p en fonction de $g^{(p)}(0)$.*
   (b) *En déduire le développement limité de f à l'ordre 3 au voisinage de 0.*

Exercice de la banque CCINP n°14. —

1. *Soit a et b deux réels donnés avec $a<b$. Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur $[a,b]$, à valeurs réelles. Démontrer que si la suite (f_n) converge uniformément sur $[a,b]$ vers f, alors la suite $\left(\int_a^b f_n(x)\,dx\right)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers $\int_a^b f(x)\,dx$.*
2. *Justifier comment ce résultat peut être utilisé dans le cas des séries de fonctions.*
3. *Démontrer que $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n}$.*

Exercice de la banque CCINP n°15. — *Soit X une partie de $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.*

1. *Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur X à valeurs dans $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$. Rappeler la définition de la convergence normale de $\sum f_n$ sur X, puis celle de la convergence uniforme de $\sum f_n$ sur X.*
2. *Démontrer que toute série de fonctions, à valeurs dans $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, normalement convergente sur X est uniformément convergente sur X.*
3. *La série de fonctions $\sum \dfrac{n^2}{n!} z^n$ est-elle uniformément convergente sur le disque fermé de centre 0 et de rayon $R \in \mathbf{R}_+^*$?*

Exercice de la banque CCINP n°18. — *On pose :*

$$\forall\ n \in \mathbf{N}^* \quad \forall\, x \in \mathbf{R} \quad u_n(x) = \frac{(-1)^n x^n}{n}.$$

On considère la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} u_n$.

1. *Étudier la convergence simple de cette série. On note D l'ensemble des x où cette série converge et $S(x)$ la somme de cette série pour $x \in D$.*
2. (a) *La fonction S est-elle continue sur D ?*
   (b) *Étudier la convergence normale, puis la convergence uniforme de cette série sur D.*
   (c) *Étudier la convergence uniforme de cette série sur $[0,1]$.*

Exercice de la banque CCINP n°20. —

1. *Donner la définition du rayon de convergence d'une série entière de la variable complexe.*
2. *Déterminer le rayon de convergence de chacune des séries entières suivantes :*

$$\sum \frac{(n!)^2}{(2n)!} z^{2n+1} \qquad\qquad \sum n^{(-1)^n} z^n \qquad\qquad \sum \cos(n) z^n$$

Exercice de la banque CCINP n°19. —

1. (a) *Justifier, oralement, à l'aide du théorème de dérivation terme à terme, que la somme d'une série entière de la variable réelle est dérivable sur son intervalle ouvert de convergence.*

   (b) *En déduire le développement en série entière à l'origine, de la fonction de la variable réelle* $x \longmapsto \dfrac{1}{(1-x)^2}$.

2. (a) *Donner le développement en série entière à l'origine de la fonction de la variable complexe* $z \longmapsto \dfrac{1}{1-z}$.

   (b) *Rappeler le produit de Cauchy de deux séries entières.*

   (c) *En déduire le développement en série entière à l'origine, de la fonction de la variable complexe* $z \longmapsto \dfrac{1}{(1-z)^2}$.

Exercice de la banque CCINP n°21. —

1. *Donner la définition du rayon de convergence d'une série entière de la variable complexe.*
2. *Soit* $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *une suite bornée telle que la série* $\sum a_n$ *diverge. Quel est le rayon de convergence de la série entière* $\sum a_n z^n$ *? Justifier.*
3. *Quel est le rayon de convergence de la série entière* $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \left(\sqrt{n}\right)^{(-1)^n} \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right) z^n$ *?*

Exercice de la banque CCINP n°22. —

1. *Que peut-on dire du rayon de convergence de la somme de deux séries entières ? Le démontrer.*
2. *Développer en série entière au voisinage de 0, en précisant le rayon de convergence, la fonction :*

$$f \ : \ x \longmapsto \ln(1+x) + \ln(1-2x) \ .$$

   La série obtenue converge-t-elle pour $x = \dfrac{1}{4}$ *?* $x = \dfrac{1}{2}$ *?* $x = -\dfrac{1}{2}$ *? En cas de convergence, la somme de cette série est-elle continue en ces points ?*

Exercice de la banque CCINP n°23. — *Soit* $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *une suite complexe telle que la suite* $\left(\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\right)_{n\in\mathbf{N}}$ *admet une limite.*

1. *Démontrer que les séries entières* $\sum a_n\, x^n$ *et* $\sum (n+1)\, a_{n+1}\, x^n$ *ont le même rayon de convergence. On le note* R.
2. *Démontrer que la fonction* $x \longmapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n$ *est de classe* $\mathscr{C}^1$ *sur l'intervalle* $]-R, R[$.

Exercice de la banque CCINP n°24. —

1. *Déterminer le rayon de convergence de la série entière* $\sum \dfrac{x^n}{(2n)!}$ *On pose* $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!}$.
2. *Rappeler, sans démonstration, le développement en série entière en 0 de la fonction* $x \mapsto ch(x)$ *et préciser le rayon de convergence.*
3. (a) *Déterminer* $S(x)$.

   (b) *On considère la fonction* f *définie sur* $\mathbf{R}$ *par* $f(0) = 1$, $f(x) = \mathrm{ch}\left(\sqrt{x}\right)$ *si* $x > 0$ *et* $f(x) = \cos\left(\sqrt{-x}\right)$ *si* $x < 0$. *Démontrer que* f *est de classe* C^∞ *sur* $\mathbf{R}$.

Exercice de la banque CCINP n°47. — *Pour chacune des séries entières de la variable réelle suivantes, déterminer le rayon de convergence et calculer la somme de la série entière sur l'intervalle ouvert de convergence.*

1. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{3^n x^{2n}}{n}$
2. $\sum a_n x^n$ *avec* $\begin{cases} a_{2n} = 4^n \\ a_{2n+1} = 5^{n+1} \end{cases}$

Exercice de la banque CCINP n°51. —

1. *Montrer que la série* $\sum \dfrac{(2n)!}{(n!)^2 2^{4n}(2n+1)}$ *converge.*

On se propose de calculer la somme de cette série.

2. *Donner le développement en série entière en 0 de* $t \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-t}}$ *en précisant le rayon de convergence.*
   Dans l'expression du développement, on utilisera la notation factorielle.
3. *En déduire le développement en série entière en 0 de* $x \longmapsto \operatorname{Arcsin} x$ *ainsi que son rayon de convergence.*
4. *En déduire la valeur de* $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2 2^{4n}(2n+1)}$.

Exercice 1 ★☆☆ — *Soit* (a_n) *une suite de nombres complexes telle que, pour tout* $n \in \mathbf{N}$, $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$.

1. *Démontrer que le rayon de convergence* R *de la série entière* $\sum a_n\, x^n$ *est strictement positif.*
2. *Démontrer que, pour tout* $x \in]-R, R[$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n = \frac{(a_0 - a_1)\,x - a_0}{x^2 + x - 1}$.

`serieEntiereCoefficientsSuiteFibonacci`

Exercice 2 ★☆☆ — *Soit* $a \in \mathbf{R}$. *Déterminer le rayon de convergence de la série entière* $\sum \arctan(n^a)\, x^n$.

`calculRayonConvergenceSerieEntiere1`

Exercice 3 ★☆☆ — *Déterminer le rayon de convergence de* $\sum \dfrac{\sin(n)}{n}\, x^n$.

`calculRayonConvergenceSerieEntiere2`

Exercice 4 ★☆☆ — *Déterminer le développement en série entière au voisinage de* 0 *de la fonction* $f : x \longmapsto \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$ *en précisant le rayon de convergence de la série entière qui apparaît.*

`calculDeveloppementSerieEntiereFonction1`

Exercice 5 ★☆☆ — *Déterminer le rayon de convergence et calculer la somme de* $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n(2n-1)}$.

`calculDeveloppementSerieEntiereFonction2` [corrigé]

Exercice 6 ★☆☆ — *Déterminer le rayon de convergence et calculer la somme de* $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{4n}{(2n-1)(n+1)}\, x^n$.

`calculDeveloppementSerieEntiereFonction3`

Exercice 7 ★☆☆ — *Déterminer le rayon de convergence et calculer la somme de* $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{n^2 - 5n + 1}{n!}\, x^n$.

`calculDeveloppementSerieEntiereFonction4`

Exercice 8 ★☆☆ — *Déterminer le rayon de convergence et calculer la somme de* $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^{4n+1}}{4n^2 - 1}$.

`calculDeveloppementSerieEntiereFonction5`

Exercice 9 ★☆☆ — *Démontrer que la fonction* $f : x \longmapsto e^x \cos(x)$ *est développable en série entière sur* $\mathbf{R}$ *et déterminer les coefficients de son développement en série entière.*

`calculDeveloppementSerieEntiereProduitCauchy`

Exercice 10 ★☆☆ — *Soit* $(d_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *la suite définie par* $d_0 = 1$, $d_1 = 1$ *et, pour tout* $n \in \mathbf{N}$, $d_{n+2} = (n+1)\,(d_n + d_{n+1})$.

1. *Montrer que, pour tout* $n \in \mathbf{N}$, $\dfrac{n!}{3} \leqslant d_n \leqslant n!$. *En déduire le rayon de convergence* R *de la série entière* $\sum \dfrac{d_n}{n!}\,x^n$.
2. *Démontrer que la fonction :*

$$S \;\left|\; \begin{array}{ccc}]-R,R[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_n}{n!}\,x^n \end{array}\right.$$

est solution de l'équation différentielle :

$$(1-x)\,y' - x\,y = 1$$

sur $]-R,R[$*, puis exprimer* S *à l'aide des fonctions usuelles.*

`calculSommeSerieEntiereEquationDifferentielle`

Exercice 11 ★☆☆ — *Soit* R *un nombre réel strictement positif. Démontrer que si une série entière* $\sum a_n\,x^n$ *converge normalement sur le disque ouvert* $D(0,R)$ *alors la série numérique* $\sum a_n\,R^n$ *converge.*

`serieEntiereConvergenceNormaleDisqueOuvertConvergence`

Exercice 12 ★★☆ — *Soit* (a_n) *une suite de nombres complexes. On suppose qu'il existe* $\ell \in [0,+\infty]$ *tel que :*

$$\sqrt[n]{|a_n|} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell\ .$$

Démontrer que le rayon de convergence $\sum a_n\,z^n$ *est* $\dfrac{1}{\ell}$. *Il s'agit de la règle de Cauchy.*

`regleCauchyRayonConvergenceSerieEntiere`

Exercice 13 ★★☆ — *Soit* $\sum a_n\,z^n$ *une série entière de rayon de convergence* 1*, de somme* f*, telle que, pour pour tout* $n \in \mathbf{N}$, $a_n \in \mathbf{R}_+$.

1. *Supposons que la série numérique* $\sum a_n$ *converge. Montrer que* f *est définie et continue sur* $\overline{D(0,1)}$.
2. *Supposons que la série numérique* $\sum a_n$ *diverge. Montrer que* $f(x) \xrightarrow[x\to1^-]{} +\infty$.

`variationLemmeAbelRadial`

Exercice 14 ★★☆ — *Soit* $\sum a_n\,z^n$ *une série entière de rayon de convergence* $+\infty$. *On note* f *sa somme.*

1. *Montrer que pour tout* $r > 0$ *:*

$$a_n\,r^n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(re^{i\theta}\right)\,e^{-in\theta}\ \mathrm{d}\theta\ .$$

Cette égalité est connue sous le nom de formule de Cauchy.

2. *Supposons* f *bornée. Montrer que* f *est constante. Ce résultat est connu sous le nom de théorème de Liouville.*
3. *Supposons qu'il existe un polynôme* P *de degré* $d \in \mathbf{N}^*$ *tel que, pour tout* $z \in \mathbf{C}$, $|f(z)| \leqslant |P(z)|$. *Montrer que* f *est un polynôme de degré inférieur ou égal à* d.

`formuleCauchyTheoremeLiouville` [corrigé]

Exercice 15 ★★☆ — *Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, notons B_n le nombre de partitions d'un ensemble à n éléments. On pose $B_0 = 1$.*

1. *Démontrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k$.*
2. *Démontrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{B_n}{n!} x^n$ n'est pas nul.*
3. *On note f la somme de la série entière $\sum \frac{B_n}{n!} x^n$. Expliciter $f(x)$ à l'aide de fonctions usuelles, pour tout $x \in]-R, R[$.*
4. *Démontrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $B_n = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^n}{k!}$.*

`calculNombrePartitionsSerieEntiere`

Exercice 16 ★★☆ — *Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, notons d_n le nombre de permutations sans points fixe de l'ensemble $[\![1, n]\!]$. On pose $d_0 = 1$.*

1. *Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{d_n}{n!} x^n$ est supérieur ou égal à 1.*
2. *Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_{n-k}$.*
3. *Si $x \in]-1, 1[$, calculer $e^x \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_n}{n!} x^n$.*
4. *En déduire que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $d_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.*

`calculNombreDerangementsSerieEntiere`

Exercice 17 ★★☆ — *Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Une involution de l'ensemble $[\![1, n]\!]$ est une application $s : [\![1, n]\!] \longrightarrow [\![1, n]\!]$ telle que $s \circ s = \mathrm{id}_{[\![1,n]\!]}$. On note I_n le nombre d'involutions de $[\![1, n]\!]$. On pose en outre $I_0 = 1$.*

1. *Démontrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $I_{n+1} = I_n + n\, I_{n-1}$.*
2. *Justifier que le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geqslant 0} \frac{I_n}{n!} z^n$ est supérieur ou égal à 1.*

Soit f la fonction définie par :

$$f \left| \begin{array}{ccc}]-1, 1[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{I_n}{n!} x^n \end{array} \right. .$$

3. *Démontrer que, pour tout $x \in]-1, 1[$, $S'(x) = (1 + x) S(x)$.*
4. *En déduire une expression de I_n, pour tout $n \in \mathbf{N}$.*

`calculNombreInvolutionsSerieEntiere`

Exercice 18 ★★★ — *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R_a > 0$, telle que $a_0 = 1$. Démontrer qu'il existe une série entière $\sum b_n z^n$ de rayon de convergence $R_b > 0$ telle que :*

$$\forall z \in D(0, \min(R_a, R_b)) \quad \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n \right) = 1 .$$

`inverseSerieEntiereNonNulleEnZero` [indication(s)]

Exercice 19 ★★★ — *Soient* $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ *une série entière, de rayon de convergence* $R > 0$*, de somme notée* f*.*

1. *Soit* $z_0 \in \mathbf{C}$ *tel que* $|z_0| < R$*. Démontrer qu'il existe une suite de nombres complexes* $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *telle que :*
$$\forall z \in D(z_0, R - |z_0|), \quad f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n (z - z_0)^n .$$
Ce résultat exprime l'analyticité de la somme d'une série entière sur son disque ouvert de convergence.
2. *Quel est le rayon de convergence de la série entière* $\sum_{n\geqslant 0} b_n z^n$ *?*

`analyticiteSommeSerieEntiereDisqueOuvertConvergence`

Exercice 20 ★★★ — *Soient* $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ *une série entière de rayon de convergence* $R > 0$*, et de somme :*

$$f \left| \begin{array}{ccc} D(0,R) & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ z & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n . \end{array} \right.$$

1. *On suppose qu'il existe une suite* $(u_n)_{n\in\mathbf{N}} \in D(0,R)^{\mathbf{N}}$ *non stationnaire, convergeant vers* 0 *et telle que* $f(u_n) = 0$*, pour tout* $n \in \mathbf{N}$*. Démontrer que la fonction* f *est nulle.*
2. *On suppose que la fonction* f *possède une infinité de zéros dans un compact de* $D(0,R)$*. Démontrer que la fonction* f *est nulle. On pourra appliquer le résultat obtenu à la question 1 de l'exercice 19.*

`principeZerosIsoles`

Exercice 21 ★★★ — *Soit* E *un ensemble non vide muni d'une loi interne* $*$*. Pour tout* $n \in \mathbf{N}^*$*, on note* a_n *le nombre de parenthésages possibles d'un produit de* n *éléménts de* E*. On a* $a_1 = 1$ *par convention et, par exemple :*

- $a_2 = 1 : (a * b)$;
- $a_3 = 2 : (a * b) * c,\ a * (b * c)$;
- $a_4 = 5 : (a * b) * (c * d),\ ((a * b) * c) * d,\ (a * (b * c)) * d,\ a * ((b * c) * d),\ a * (b * (c * d))$.

1. *Démontrer que, pour tout* $n \geqslant 2$*,* $a_n = \sum_{k=1}^{n-1} a_k\, a_{n-k}$ *.*
2. *Soit* f *la somme de la série entière* $\sum_{n\geqslant 1} a_n x^n$*. On suppose que le rayon* R *de cette série entière est strictement positif. Démontrer que, pour tout* $x \in]-R, R[$*,* $(f(x))^2 - f(x) + x = 0$*.*
3. *Calculer* R *et* f*.*
4. *En déduire la valeur de* a_n*, pour tout* $n \in \mathbf{N}^*$*.*

`calculNombreParenthesagesSerieEntiere` `[indication(s)]`

Exercice 22 ★★★ — *Soit* $\sum a_n z^n$ *une série entière, de rayon de convergence* $R \geqslant 1$*, de somme notée* f*.*

1. *Calculer pour tout* $r \in [0, 1[$ *:*
$$m_f(r) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| f\left(re^{i\theta}\right) \right|^2 \mathrm{d}\theta .$$
2. *On suppose que la série* $\sum |a_n|^2$ *converge. Montrer que la fonction* $r \longmapsto m_f(r)$ *est bornée sur* $[0,1[$*.*
3. *Exhiber un exemple pour lequel* m_f *est bornée et* f *est non bornée sur* $D(0,1)$*.*
4. *On suppose à nouveau que la série* $\sum |a_n|^2$ *converge. Montrer que, pour tout* $r \in [0,1[$ *et tout* $\theta \in \mathbf{R}$ *:*
$$\left| f\left(re^{i\theta}\right) \right|^2 \leqslant \frac{1}{1-r^2} \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 .$$

`identiteParsevalSerieEntiere`

Exercice 23 ★★★ — *Soient $a > 0$ et $f :]-a, a[\longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$. On suppose que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $f^{(n)} \geqslant 0$ sur $]-a, a[$.*

1. *Donner des exemples de telles fonctions.*
2. *Montrer que f est développable en série entière au voisinage de 0.*

Il s'agit d'un théorème dû à Bernstein.

`theoremeBernsteinSeriesEntieres`

Exercice 24 ★★★ — *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence 1. Notons, pour tout $z \in D(0,1)$:*

$$f(z) := \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n.$$

On suppose que la série $\sum a_n$ converge et on note ℓ sa somme. Fixons $\theta_0 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ et notons :

$$\Delta(\theta_0) := \left\{z \in D(0,1) \ : \ \exists \rho > 0,\ \exists \theta \in [-\theta_0, \theta_0],\ z = 1 - \rho e^{i\theta}\right\}.$$

Le but de cet exercice est de démontrer que :

$$\lim_{\substack{z \to 1 \\ z \in \Delta(\theta_0)}} f(z) = \ell\ .$$

Il s'agit du théorème d'Abel angulaire.

1. *Notons $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$. Montrer que :*

$$\forall z \in D(0,1) \quad f(z) - \ell = (z-1) \sum_{n=0}^{+\infty} R_n z^n.$$

   On pourra remarquer que pour tout $n \geqslant 1$, $a_n = R_{n-1} - R_n$ et effectuer une transformation d'Abel.

2. *Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que, pour tout $z \in \Delta(\theta_0)$:*

$$|f(z) - \ell| \leqslant |z-1| \sum_{n=0}^{N} |R_n| + \frac{\cos(\theta_0)\,\varepsilon}{2} \frac{|z-1|}{1-|z|}\ .$$

3. *Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout $z \in D(1,\alpha) \cap \Delta(\theta_0)$, $|f(z) - \ell| \leqslant \varepsilon$. Conclure.*

`theoremeAbelAngulaire`

Exercice 25 ★★★ — *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence 1. Notons $f(z) := \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$, pour tout $z \in D(0,1)$. On suppose que :*

$$\exists \ell \in \mathbf{C}, \quad f(x) \xrightarrow[x \to 1^-]{} \ell$$

et que $a_n \underset{n \to +\infty}{=} \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$. Le but de cet exercice est de montrer que la série $\sum a_n$ converge et que sa somme vaut ℓ. Il s'agit d'un théorème dû à Tauber.

1. *Soit $n \in \mathbf{N}$. Montrer que, pour tout $x \in [0,1[$:*

$$\left|\sum_{k=0}^{n} a_k - f(x)\right| \leqslant (1-x) \sum_{k=0}^{n} k\ |a_k| + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{k\ |a_k|}{n}\, x^k\ .$$

2. *Soit $\varepsilon \in]0,1[$. Montrer qu'il existe $M > 0$ et $N \in \mathbf{N}$ tels que pour tout $n \geq N$:*

$$\left|\sum_{k=0}^{n} a_k - f\left(1 - \frac{\varepsilon}{n}\right)\right| \leqslant (M+1)\,\varepsilon\ .$$

3. *Conclure.*

`theoremeTauberienFaible`

Exercice 26 ★★★ — *Soient $\theta \in \mathbf{R}$ et la fonction f définie par :*

$$f : z \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n\theta)}{n} z^n .$$

1. *Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{\cos(n\theta)}{n} z^n$.*
2. *Déterminer une expression de $f(z)$, pour tout $z \in [0,1[$.*
3. *Y a-t-il convergence sur le cercle unité ?*
4. *Peut-on déduire l'expression sur le cercle unité de l'expression sur le disque ouvert ?*

`etudeSommeSerieEntiereBordDisqueConvergenceTransformeeAbel` inverseSerieEntiereNonNulleEnZero [énoncé]

Indication(s) pour l'exercice 18

Raisonner par analyse et synthèse. Supposer l'existence d'une série entière $\sum b_n z^n$ de rayon de convergence $R_b > 0$ vérifiant :

$$\forall z \in D(0, \min(R_a, R_b)) \quad \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right) = 1 .$$

En déduire que $b_0 = 1$ et que :

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad b_n = -\sum_{k=0}^{n} b_k a_{n+1-k} .$$

Fixer un réel r tel que $0 < r < R$. Il existe donc un réel strictement positif M_r tel que :

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad |a_n| \leqslant \frac{M_r}{r^n} .$$

Démontrer que

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad |b_n| \leqslant \frac{M_r (M_r + 1)^{n-1}}{r^n} .$$

calculNombreParenthesagesSerieEntiere [énoncé]

Indication(s) pour l'exercice 21

1.
2.
3. Soit $x \in]-R,R[$ fixé. Le nombre $f(x)$ est racine du polynôme $X^2 - X + x$ donc :

$$f(x) \in \left\{ \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2}, \frac{1+\sqrt{1-4x}}{2} \right\} .$$

Si on pose $\rho := \min\left\{R, \frac{1}{4}\right\} > 0$, alors :

$$\forall\, x \in]-\rho,\rho[\qquad \varepsilon(x) := \frac{2f(x)-1}{\sqrt{1-4x}} \in \{-1,1\} .$$

La fonction ε étant continue sur le connexe par arcs $]-\rho,\rho[$, l'ensemble $\varepsilon(]-\rho,\rho[)$ est une partie connexe par arcs de $\{-1,1\}$. Nous en déduisons que la fonction ε est constante sur $]-\rho,\rho[$. Comme $\varepsilon(0) = -1$, il vient :

$$\forall\, x \in]-\rho,\rho[\qquad f(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2} .$$

4.

`calculDeveloppementSerieEntiereFonction2` [énoncé]

Un corrigé de l'exercice 5

(a) La série entière $\sum (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{2n(2n-1)}$ étant lacunaire, il n'est pas possible de lui appliquer la règle de d'Alembert pour les séries entières, pour déterminer son rayon de convergence.

(b) Soit $r \in \mathbf{R}_+$ fixé.

$$\left|(-1)^n \frac{r^{2n}}{2n(2n-1)}\right| = \frac{r^{2n}}{2n(2n-1)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \begin{cases} 0 & \text{si} \quad r \leqslant 1 \\ +\infty & \text{si} \quad r > 1 \end{cases} \qquad \text{[croissances comparées]}\ .$$

Ainsi :

$$\left\{ r \in \mathbf{R}_+ \ : \ \text{la suite } \left((-1)^n \frac{r^{2n}}{2n(2n-1)}\right)_{n\in\mathbf{N}} \text{ est bornée} \right\} = [0,1]\ .$$

Par définition du rayon de convergence, $R\left(\sum (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{2n(2n-1)}\right) = 1$.

(c) Notons f la somme de notre série entière :

$$f \left| \begin{array}{ccc}]-1,1[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n(2n-1)} \end{array} \right. .$$

(d) Par théorème de dérivation terme à terme à l'intérieur de l'intervalle de convergence, la série entière $\sum (-1)^n \dfrac{x^{2n-1}}{2n-1}$ a rayon de convergence 1 et :

$$\forall\, x \in]-1,1[\quad f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n-1}}{2n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = -\arctan(x)\ .$$

(e) Soit $x \in]-1,1[$ fixé.
La fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ (et même $\mathscr{C}^\infty$) sur $]-1,1[$. D'après le théorème fondamental de l'analyse :

$$f(x) - \underbrace{f(0)}_{=0} = \int_0^x f'(t)\ \mathrm{d}t = -\int_0^x \arctan(t)\ \mathrm{d}t\ .$$

Les fonctions $u : t \longmapsto t$ et $v : t \longmapsto \arctan(t)$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-1,1[$. Par intégration par parties :

$$f(x) = -\left([t\ \arctan(t)]_0^x - \int_0^x \frac{t}{1+t^2}\ \mathrm{d}t \right) = -x\ \arctan(x) + \frac{1}{2}\int_0^x \frac{2t}{1+t^2} = -x\ \arctan(x) + \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)\ .$$

`formuleCauchyTheoremeLiouville` [énoncé]

Un corrigé de l'exercice 14

1. Soient $n \in \mathbf{N}$ et $r > 0$ fixés.
   La fonction f étant continue sur $\mathbf{C}$, puisque développable en série entière sur $\mathbf{C}$, l'intégrale :
$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(re^{i\theta}\right) e^{-in\theta}\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sum_{p=0}^{+\infty} \underbrace{a_p r^p e^{i(p-n)\theta}}_{g_p(\theta)}\,\mathrm{d}\theta$$
   est bien définie.
   Posons, pour tout $p \in \mathbf{N}$:
$$\left| \begin{array}{cccc} g_p & : & [0,2\pi] & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ & & \theta & \longmapsto & a_p r^p e^{i(p-n)\theta} \end{array}\right. .$$

   La série de fonctions $\sum g_p$, de la variable θ, n'est pas une série entière.

   Nous allons appliquer le théorème d'échange $\sum$ vs. $\int_0^{2\pi}$, sous hypothèse de convergence uniforme sur le segment.

   (H1) Pour tout $p \in \mathbf{N}$, la fonction g_p est continue sur le segment $[0,2\pi]$

   (H2) Soit $p \in \mathbf{N}$. Nous remarquons que :
$$\left|\left| g_p \right|\right|_{\infty,[0\,;\,2\pi]} = |a_p| r^p .$$
   Le rayon de convergence de la série entière $\sum a_p z^p$ étant $+\infty$, la série $\sum |a_p| r^p$ est convergente. Ainsi la série de fonctions $\sum g_p$ converge normalement (donc uniformément) sur le segment $[0,2\pi]$.

   Nous en déduisons :
$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(re^{i\theta}\right) e^{-in\theta}\,\mathrm{d}\theta &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sum_{p=0}^{+\infty} a_p r^p e^{i(p-n)\theta}\,\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\sum_{p=0}^{+\infty}\int_0^{2\pi} a_p r^p e^{i(p-n)\theta}\,\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\sum_{p=0}^{+\infty} a_p r^p \int_0^{2\pi} e^{i(p-n)\theta}\,\mathrm{d}\theta . \end{aligned}$$
   Soit $n \in \mathbf{N}$. Nous calculons :
$$\int_0^{2\pi} e^{i(p-n)\theta}\,\mathrm{d}\theta = \begin{cases} 0 & \text{si } p \neq n \\ 2\pi & \text{si } p = n . \end{cases}$$
   et nous concluons :
$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(re^{i\theta}\right) e^{-in\theta}\,\mathrm{d}\theta = a_n r^n .$$

2. Supposons f bornée.
   Soit $M \in \mathbf{R}_+$ tel que pour tout $z \in \mathbf{C}$, $|f(z)| \leqslant M$.
   Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et soit $r > 0$.
   D'après la question 1 :
$$|a_n| r^n = \left| \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(re^{i\theta}\right) e^{-in\theta}\,\mathrm{d}\theta \right| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left| f\left(re^{i\theta}\right)\right|\,\mathrm{d}\theta \leqslant M .$$
   Donc :
$$0 \leqslant |a_n| \leqslant \frac{M}{r^n} .$$
   Comme $n \geqslant 1$, $r^n \xrightarrow[r \to +\infty]{} +\infty$.
   Donc, en faisant tendre r vers $+\infty$ dans la précédente inégalité, il vient $|a_n| = 0$.
   Nous en déduisons que pour tout $z \in \mathbf{C}$:
$$f(z) := \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = a_0 .$$
   La fonction f est donc constante.

3. Comme P est de degré d :

$$\frac{|P(z)|}{|z|^{d+1}} \xrightarrow[|z|\to+\infty]{} 0\,.$$

Soit $z \in \mathbf{C}^*$. De l'hypothèse, on déduit :

$$0 \leqslant \frac{|f(z)|}{|z|^{d+1}} \leqslant \frac{|P(z)|}{|z|^{d+1}}$$

et par théorème d'encadrement :

$$\left|\frac{f(z)}{z^{d+1}}\right| = \frac{|f(z)|}{|z|^{d+1}} \xrightarrow[|z|\to+\infty]{} 0$$

donc :

$$\frac{f(z)}{z^{d+1}} \xrightarrow[|z|\longrightarrow+\infty]{} 0\,.$$

Or :

$$\frac{f(z)}{z^{d+1}} = \sum_{n=0}^{d} a_n z^{n-d-1} + \sum_{n=d+1}^{+\infty} a_n z^{n-d-1}$$

Comme pour tout $n \in [\![0,d]\!]$, $n-d-1<0$, il vient :

$$\sum_{n=0}^{d} a_n z^{n-d-1} \xrightarrow[|z|\to+\infty]{} 0\,.$$

Donc :

$$(\star) \qquad \sum_{n=d+1}^{+\infty} a_n z^{n-d-1} = \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+d+1} z^n}_{g(z)} \xrightarrow[|z|\to+\infty]{} 0\,.$$

Soit la fonction :

$$\left|\begin{array}{rcll} g & : & \mathbf{C} & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ & & z & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+d+1} z^n\,. \end{array}\right.$$

Notons que la série entière $\sum a_{n+d+1} z^n$ (dont g est la somme) a également comme rayon de convergence $+\infty$ (la série numérique correspondante converge quel que soit $z \in \mathbf{C}$).
D'après $(\star)$, en spécialisation la définition de la limite à $\varepsilon = 1 > 0$, il existe $\rho > 0$ tel que :

$$\forall z \in \mathbf{C} \quad |z| \geqslant \rho \Longrightarrow |g(z)| \leqslant 1\,.$$

La fonction g est continue sur le compact $\overline{D(0,\rho)}$ (partie fermée et bornée de $\mathbf{C}$, qui est de dimension finie). D'après le théorème des bornes atteintes :

$$\exists z_M \in \overline{D(0,\rho)} \quad \forall z \in \overline{D(0,\rho)} \quad |g(z)| \leqslant |g(z_M)|\,.$$

Nous en déduisons que :

$$\forall z \in \mathbf{C} \quad |g(z)| \leqslant \underbrace{\max\{1, |g(z_M)|\}}_{\text{indépendant de } z}\,.$$

La fonction g est donc bornée sur $\mathbf{C}$.
D'après la question 2 :

$$\forall n \geqslant 1 \quad a_{n+d+1} = 0$$

i.e. :

$$\forall n \geqslant d+2 \quad a_n = 0\,.$$

et :

$$\forall z \in \mathbf{C} \quad g(z) = a_{d+1}\,.$$

Grâce à $(\star)$, $a_{d+1} = 0$.
Nous en déduisons que :

$$\forall z \in \mathbf{C} \quad f(z) = \sum_{n=0}^{d} a_n z^n\,.$$

La fonction f est donc polynomiale, de degré inférieur ou égal à d.