

TD – Révisions sur les espaces préhilbertiens

Exercice de la banque CCINP n°39. — On note ℓ^2 l'ensemble des suites $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres réels telles que la série $\sum x_n^2$ converge.

1. (a) Démontrer que, pour $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2$ et $y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2$, la série $\sum x_n y_n$ converge. On pose alors $\langle x, y \rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n y_n$.

(b) Démontrer que ℓ^2 est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites de nombres réels.

Dans la suite de l'exercice, on admet que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur ℓ^2 . On suppose que ℓ^2 est muni de ce produit scalaire et de la norme euclidienne associée, notée $\| \cdot \|$.

2. Soit $p \in \mathbb{N}$. Pour tout $x = (x_n) \in \ell^2$, on pose $\varphi(x) = x_p$. Démontrer que φ est une application linéaire et continue de ℓ^2 dans \mathbb{R} .
3. On considère l'ensemble F des suites réelles presque nulles, c'est-à-dire l'ensemble des suites réelles dont tous les termes sont nuls sauf peut-être un nombre fini de termes. Déterminer F^\perp . Comparer F et $(F^\perp)^\perp$.

Exercice de la banque CCINP n°76. — Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel muni d'un produit scalaire noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$. On pose, pour tout $x \in E$, $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

1. (a) Énoncer et démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
 (b) Dans quel cas a-t-on égalité? Le démontrer.
2. Soit $E = \{f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}) : \forall x \in [a, b] f(x) > 0\}$. Prouver que l'ensemble $\left\{ \int_a^b f(t) dt \times \int_a^b \frac{1}{f(t)} dt : f \in E \right\}$ admet une borne inférieure m et déterminer la valeur de m .

Exercice de la banque CCINP n°77. — Soit E un espace euclidien.

1. Soit A un sous-espace vectoriel de E . Démontrer que $(A^\perp)^\perp = A$.
2. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E .
 (a) Démontrer que $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$.
 (b) Démontrer que $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$.

Exercice de la banque CCINP n°78. — Soit E un espace euclidien de dimension n et u un endomorphisme de E . On note $\langle x, y \rangle$ le produit scalaire de x et de y et $\| \cdot \|$ la norme euclidienne associée.

1. Soit u un endomorphisme de E , tel que, pour tout $x \in E$, $\|u(x)\| = \|x\|$.
 (a) Démontrer que, pour tout $(x, y) \in E^2$, $\langle x, y \rangle \in \langle u(x), u(y) \rangle = \langle x, y \rangle$.
 (b) Démontrer que u est bijectif.
2. On note $\mathcal{O}(E)$ l'ensemble des isométries vectorielles de E . C'est -à-dire $\mathcal{O}(E) = \{u \in \mathcal{L}(E) : \forall x \in E \quad \|u(x)\| = \|x\|\}$. Démontrer que $\mathcal{O}(E)$, muni de la loi \circ , est un groupe.
3. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E . Prouver que :

$$u \in \mathcal{O}(E) \iff (u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_n)) \text{ est une base orthonormée de } E.$$

Exercice de la banque CCINP n°79. — Soit a et b deux réels tels que $a < b$.

1. Soit h une fonction continue et positive de $[a, b]$ dans \mathbb{R} . Démontrer que :

$$\int_a^b h(x) dx = 0 \implies h = 0.$$

2. Soit E le \mathbb{R} -espace vectoriel des fonctions continues de $[a, b]$ dans \mathbb{R} . On pose, pour tout $(f, g) \in E^2$, $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx$. Démontrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E .

3. Majorer $\int_0^1 \sqrt{x} e^{-x} dx$ en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Exercice de la banque CCINP n°80. — Soit E l'espace vectoriel des applications continues et 2π -périodiques de \mathbf{R} dans \mathbf{R} .

- Démontrer que $\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)g(t)dt$ définit un produit scalaire sur E .
- Soit F le sous-espace vectoriel engendré par $f : x \mapsto \cos x$ et $g : x \mapsto \cos(2x)$. Déterminer le projeté orthogonal sur F de la fonction $u : x \mapsto \sin^2 x$.

Exercice de la banque CCINP n°81. — On définit dans $\mathcal{M}_2(\mathbf{R}) \times \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ l'application φ par $\varphi(A, A') = \text{tr}(A^\top A')$. On admet que φ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$. On note $\mathcal{F} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} : (a, b) \in \mathbf{R}^2 \right\}$.

- Démontrer que \mathcal{F} est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$.
- Déterminer une base de \mathcal{F}^\perp .
- Déterminer le projeté orthogonal de $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sur \mathcal{F}^\perp .
- Calculer la distance de J à \mathcal{F} .

Exercice de la banque CCINP n°82. — Soit E un espace préhilbertien et F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie $n > 0$. On admet que, pour tout $x \in E$, il existe un élément unique y_0 de F tel que $x - y_0$ soit orthogonal à F et que la distance de x à F soit égale à $\|x - y_0\|$. Pour $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$, on pose $\langle A, A' \rangle = aa' + bb' + cc' + dd'$.

- Démontrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$.
- Calculer la distance de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ au sous-espace vectoriel F des matrices triangulaires supérieures.

Exercice de la banque CCINP n°92. — Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère $E = \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n . On pose, pour tout $(A, B) \in E^2$, $\langle A, B \rangle = \text{tr}(A^\top B)$ où tr désigne la trace et A^\top désigne la transposée de la matrice A .

- Prouver que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E .
- On note $S_n(\mathbf{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de E . Une matrice A de E est dite antisymétrique lorsque $A^\top = -A$. On note $A_n(\mathbf{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques de E . On admet que $S_n(\mathbf{R})$ et $A_n(\mathbf{R})$ sont des sous-espaces vectoriels de E .
 - Prouver que $E = S_n(\mathbf{R}) \oplus A_n(\mathbf{R})$.
 - Prouver que $A_n(\mathbf{R})^\perp = S_n(\mathbf{R})$.
- Soit F l'ensemble des matrices diagonales de E . Déterminer F^\perp .

Exercice 1 ★☆☆ — On note $\underline{e} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de l'espace \mathbf{R}^3 , que l'on munit \mathbf{R}^3 de son produit scalaire usuel.

- Appliquer l'algorithme de Schmidt à la base :

$$\underline{u} := (u_1 := (1, 0, 1), u_2 := (1, 1, 1), u_3 := (-1, -1, 0))$$

de \mathbf{R}^3 . On notera $\underline{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ la base orthonormée de \mathbf{R}^3 ainsi obtenue.

- D'après le cours, quelles propriétés remarquables possède la matrice de passage $P_{\underline{u} \rightarrow \underline{\varepsilon}}$?
- Expliciter la matrice $P_{\underline{u} \rightarrow \underline{\varepsilon}}$.
- Que vaut le produit $P^\top P$, où $P := P_{\underline{e} \rightarrow \underline{\varepsilon}}$?
- Comment retrouver le résultat de la question précédente sans aucun calcul ?

orthonormalisationGramSchmidtR3

Exercice 2 ★☆☆ — Soit un entier $n \geq 2$.

1. Démontrer que :

$$\langle \cdot, \cdot \rangle \left| \begin{array}{l} \mathbf{R}_n[X]^2 \longrightarrow \mathbf{R} \\ (P, Q) \longmapsto \sum_{i=0}^n P(i)Q(i) \end{array} \right.$$

est un produit scalaire sur $\mathbf{R}_n[X]$.

2. Donner une base orthonormée de l'espace euclidien $(\mathbf{R}_n[X], \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

3. Soit π la projection orthogonale de $\mathbf{R}_n[X]$ sur $\mathbf{R}_1[X]$. Calculer les coefficients de $\pi(P)$, pour tout $P \in \mathbf{R}_n[X]$.

polynomesLagrangeOrthogonalite

Exercice 3 ★☆☆ — Dans cet exercice, E désigne un \mathbf{R} -espace vectoriel, pas nécessairement de dimension finie, muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. On note $\|\cdot\|$ la norme associée à ce produit scalaire, définie par $\|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2}$ pour tout $x \in E$. Soit F un sous-espace vectoriel différent de $\{0\}$ et de dimension finie de E .

1. Donner la définition de la projection orthogonale π_F sur F .

2. On fixe (e_1, \dots, e_n) une base orthonormale de F , et x un vecteur de E . Montrer que $\pi_F(x) = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle e_i$.

3. Montrer enfin que $\|x - \pi_F(x)\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle^2$.

projectionOrthogonaleCours

Exercice 4 ★★☆☆ — Soit $E = \mathcal{C}^0([-1, 1], \mathbf{R})$. On définit l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ par :

$$\langle \cdot, \cdot \rangle \left| \begin{array}{l} E \times E \longrightarrow \mathbf{R} \\ (f, g) \longmapsto \langle f, g \rangle := \int_{-1}^1 \frac{f(t)g(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt. \end{array} \right.$$

1. Démontrer que l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est bien définie.

2. Démontrer que l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit un produit scalaire sur E .

3. Soit $n \in \mathbf{N}$. Démontrer qu'il existe un unique polynôme $T_n \in \mathbf{R}[X]$ tel que, pour tout $\theta \in \mathbf{R}$, $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$. Le polynôme T_n est appelé n -ième polynôme de Tchebychev.

4. Démontrer que la famille $(T_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est orthogonale.

5. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, posons $F_n := \text{Vect}(T_0, \dots, T_n)$. Déterminer la projection orthogonale d'une fonction $f \in E$ sur F_n .

polynomesTchebychevOrthogonalite

Exercice 5 ★★☆☆ — On considère le produit scalaire sur $\mathbf{R}[X]$ défini par :

$$\forall (P, Q) \in \mathbf{R}[X]^2 \quad \langle P, Q \rangle := \int_0^1 P(x)Q(x) dx.$$

Pour $n \in \mathbf{N}$, posons $L_n = (X^n(1-X)^n)^{(n)}$.

1. Soit $n \in \mathbf{N}$. Démontrer que L_n est de degré n et de coefficient dominant $\frac{(-1)^n(2n)!}{n!}$.

2. Soient $P \in \mathbf{R}[X]$ tel que $P(1) = P(0) = 0$ et $Q \in \mathbf{R}[X]$. Démontrer que $\langle P', Q \rangle = -\langle P, Q' \rangle$.

3. Démontrer que L_n est orthogonal à $\mathbf{R}_{n-1}[X]$.

4. En déduire que $(L_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est une base orthogonale de $\mathbf{R}[X]$.

polynomesLegendreOrthogonalite

Exercice 6 ★★☆☆ — Dans toute cette partie, on fixe un réel $\alpha > -1$, et on note E_α l'ensemble des fonctions continues $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbf{R}$ telles que l'intégrale $\int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} f(x)^2 dx$ est convergente.

1. Montrer que, pour tout $(a, b) \in \mathbf{R}^2$, $|ab| \leq \frac{a^2 + b^2}{2}$.

2. En déduire que, si f et g sont deux éléments de E_α , l'intégrale $\int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} f(x)g(x) dx$ est convergente.

3. En déduire que E_α est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathcal{C}([0, +\infty[, \mathbf{R})$ des fonctions continues de $[0, +\infty[$ vers \mathbf{R} .

4. Montrer que toute fonction polynomiale sur $[0, +\infty[$ est élément de E_α .

Pour tout entier naturel n , on définit les fonctions :

$$\varphi_n \left| \begin{array}{l}]0, +\infty[\longrightarrow \mathbf{R} \\ x \longmapsto x^{n+\alpha} e^{-x} \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \psi_n \left| \begin{array}{l}]0, +\infty[\longrightarrow \mathbf{R} \\ x \longmapsto x^{-\alpha} e^x \varphi_n^{(n)}(x) \end{array} \right.$$

où la notation $\varphi_n^{(n)}$ désigne la dérivée d'ordre n de φ_n (avec la convention $\varphi_0^{(0)} = \varphi_0$).

5. Calculer ψ_0, ψ_1 et ψ_2 .

6. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, montrer que la fonction ψ_n est polynomiale. Préciser son degré et son coefficient dominant.

Dans la suite, on identifie ψ_n à son unique prolongement continu à $[0, +\infty[$, qui est une fonction polynomiale sur $[0, +\infty[$. Cela permet de considérer ψ_n comme un élément de E_α , ce qu'on fera désormais. Pour tout $(f, g) \in E_\alpha^2$, on pose :

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} f(x)g(x) dx.$$

7. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E_α .

Dans la suite, on note $\| \cdot \|_\alpha$ la norme associée à ce produit scalaire, définie par :

$$\|f\|_\alpha = \left(\int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} f(x)^2 dx \right)^{1/2} \quad \text{pour tout } f \in E_\alpha.$$

8. Soit n un entier ≥ 1 . Pour tout entier $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, établir que :

$$\varphi_n^{(k)}(x) \longrightarrow 0 \quad \text{quand } x \text{ tend vers } 0 \text{ par valeurs strictement positives}$$

et que :

$$\varphi_n^{(k)}(x) = o(e^{-x/2}) \quad \text{quand } x \rightarrow +\infty$$

9. Soit m et n deux entiers naturels. Montrer que

$$\langle \psi_m, \psi_n \rangle = (-1)^n \int_0^{+\infty} \psi_m^{(n)}(x) \varphi_n(x) dx.$$

En déduire que la famille $(\psi_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est orthogonale pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

10. Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\|\psi_n\|_\alpha^2 = n! \Gamma(n + \alpha + 1)$.

polynomesLaguerreOrthogonalite

Exercice 7 ★★☆☆ — Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien. Étant donné un entier $n \in \mathbf{N}^*$ et n vecteurs x_1, \dots, x_n , notons

$$G(x_1, \dots, x_n) := (\langle x_i, x_j \rangle)_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}).$$

1. Démontrer que $\det G(x_1, \dots, x_n) \neq 0$ si et seulement si la famille (x_1, \dots, x_n) est libre.

2. Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension n . Soit (e_1, \dots, e_n) une base de F . Démontrer que pour tout $x \in E$

$$d(x, F) = \sqrt{\frac{\det G(e_1, \dots, e_n, x)}{\det G(e_1, \dots, e_n)}}.$$

matricesGram

Exercice 8 ★★★ — Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien et $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur.

- Quelle est la définition de l'assertion : « p est un projecteur orthogonal » ?
- Démontrer que p est un projecteur orthogonal si et seulement si, pour tout $x \in E$, $\|p(x)\| \leq \|x\|$.

caracterisationProjecteursOrthogonaux

Exercice 9 ★★★ — Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien, $\|\cdot\|$ la norme sur E associée au produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$, $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite orthonormale de vecteurs de E et $x \in E$.

- Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \sum_{k=1}^n \langle e_k, x \rangle^2 \leq \|x\|^2 \quad [\text{inégalité de Bessel}] .$$

- Justifier que la série numérique $\sum_{n \geq 0} \langle x, e_n \rangle^2$ est convergente.

On suppose de plus que la famille $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est totale, i.e. que $\text{Vect}((e_n)_{n \in \mathbb{N}})$ est une partie dense de E .

- Démontrer que la série vectorielle $\sum_{n \geq 0} \langle x, e_n \rangle e_n$ converge dans E et que $x = \sum_{n=0}^{+\infty} \langle x, e_n \rangle e_n$.

- Démontrer que :

$$\|x\|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \langle e_n, x \rangle^2 \quad [\text{formule de Parseval}] .$$

famillesTotalesInegaliteBesselFormuleParseval

Exercice 10 ★★★ — Soit un entier $n \geq 1$. On munit \mathcal{R}^n de son produit scalaire usuel et on note

$$\mathbf{O}_n(\mathbf{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) : AA^T = I_n\}$$

le groupe orthogonal.

- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Démontrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes.

(i) $A \in \mathbf{O}_n(\mathbf{R})$

(ii) Il existe deux bases orthonormées \mathcal{B}_1 et \mathcal{B}_2 de \mathbf{R}^n telles que $A = P_{\mathcal{B}_1 \rightarrow \mathcal{B}_2}$ (matrice de passage de la base \mathcal{B}_1 à la base \mathcal{B}_2).

- Démontrer que $\mathbf{O}_n(\mathbf{R})$ est une partie compacte de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ une matrice trigonalisable sur \mathbf{R} . Démontrer que :

$$\exists (P, T) \in \mathcal{O}_n(\mathbf{R}) \times \mathcal{T}_n^+(\mathbf{R}) \quad A = P T P^T .$$

- Démontrer que $\mathcal{T}'_n(\mathbf{R}) := \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) : A \text{ est trigonalisable sur } \mathbf{R}\}$ est une partie fermée de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

- Démontrer que l'adhérence de $\mathcal{T}'_n(\mathbf{R}) := \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) : A \text{ est diagonalisable sur } \mathbf{R}\}$ égale $\mathcal{T}'_n(\mathbf{R})$.

caractereFermeEnsembleMatricesTrigonalisablesR

Exercice 11 ★★★ — Calculer :

$$\inf \left\{ \int_0^1 t^2 (\ln(t) - a t - b)^2 dt : (a, b) \in \mathbf{R}^2 \right\} .$$

distanceEspaceFonctions

Exercice 12 ★★★ — Soient un entier $n \geq 2$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Démontrer que $\text{rg}(A^T A) = \text{rg}(A)$.

rangMatriceFoisTransposeeMatrice