

TD – Réduction des endomorphismes et des matrices 2

Exercice de la banque CCINP n°62. — Soit E un espace vectoriel sur \mathbf{R} ou \mathbf{C} . Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 - f - 2 \text{id} = 0$.

1. Prouver que f est bijectif et exprimer f^{-1} en fonction de f .
2. Prouver que $E = \text{Ker}(f + \text{id}) \oplus \text{Ker}(f - 2 \text{id})$:
 - (a) en utilisant le lemme des noyaux;
 - (b) sans utiliser le lemme des noyaux.
3. Dans cette question, on suppose que E est de dimension finie. Prouver que $\text{Im}(f + \text{id}) = \text{Ker}(f - 2 \text{id})$.

Exercice de la banque CCINP n°65. — Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E sur le corps \mathbf{K} (\mathbf{R} ou \mathbf{C}). On note $\mathbf{K}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans \mathbf{K} .

1. Démontrer que :

$$\forall (P, Q) \in \mathbf{K}[X] \times \mathbf{K}[X] \quad (PQ)(u) = P(u) \circ Q(u).$$

2. (a) Démontrer que :

$$\forall (P, Q) \in \mathbf{K}[X] \times \mathbf{K}[X] \quad P(u) \circ Q(u) = Q(u) \circ P(u).$$

- (b) Démontrer que, pour tout $(P, Q) \in \mathbf{K}[X] \times \mathbf{K}[X]$:

$$P \text{ polynôme annulateur de } u \implies PQ \text{ polynôme annulateur de } u.$$

3. Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Écrire le polynôme caractéristique de A et en déduire que le polynôme $R = X^4 + 2X^3 + X^2 - 4X$ est un polynôme annulateur de A .

Exercice de la banque CCINP n°88. —

1. Soit E un \mathbf{K} -espace vectoriel ($\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou \mathbf{C}). Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit $P \in \mathbf{K}[X]$. Prouver que si P annule u alors toute valeur propre de u est racine de P .
2. Soit $n \in \mathbf{N}$ tel que $n \geq 2$. On pose $E = \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ la matrice de E définie par :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2 \quad a_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } i = j \\ 1 & \text{si } i \neq j \end{cases}.$$

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ défini par :

$$\forall M \in E \quad u(M) = M + \text{tr}(M)A.$$

- (a) Prouver que le polynôme $X^2 - 2X + 1$ est annulateur de u .
- (b) u est-il diagonalisable ? Justifier votre réponse en utilisant deux méthodes (l'une avec, l'autre sans l'aide de la question 1).

Exercice de la banque CCINP n°91. — On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$.

1. Montrer que A n'admet qu'une seule valeur propre que l'on déterminera.
2. La matrice A est-elle inversible ? Est-elle diagonalisable ?
3. Déterminer, en justifiant, le polynôme minimal de A .
4. Soit $n \in \mathbf{N}$. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $(X - 1)^2$ et en déduire la valeur de A^n .

Exercice de la banque CCINP n°93. — Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie $n > 0$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^3 + u^2 + u = 0$. On notera id l'application identité sur E .

1. Montrer que $\text{Im}(u) \oplus \text{Ker}(u) = E$.
2. (a) Énoncer le lemme des noyaux pour deux polynômes.
(b) En déduire que $\text{Im}(u) = \text{Ker}(u^2 + u + \text{id})$.
3. On suppose que u est non bijectif. Déterminer les valeurs propres de u . Justifier la réponse.

Exercice 1 ★☆☆ — Soient un entier $n \geq 2$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telle que $A^2 + I_n = 0$. Démontrer que l'entier n est pair.

polynomeAnnulateurDimensionEspace

Exercice 2 ★☆☆ — Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$.

1. Calculer le polynôme minimal de A .
2. En déduire l'expression de A^n , pour tout $n \in \mathbf{N}$.

calculPuissancesMatricePolynomeMinimal

Exercice 3 ★☆☆ — Déterminer toutes les matrices $M \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ telles que $M^3 - 2M = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 10 & 4 \end{pmatrix}$.

equationCubiqueMatricielle

Exercice 4 ★☆☆ — Soit $A \in \mathbf{GL}_5(\mathbf{R})$ telle que $\text{tr}(A) = 2$ et $A^3 + A^2 - 2A = 0$. Déterminer le polynôme caractéristique de A .

polynomeCaracteristiqueFormatInversibiliteTracePolynomeAnnulateur

Exercice 5 ★☆☆ — Soient E un \mathbf{K} -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ et $u \in \mathcal{L}(E)$. Démontrer que :

$$\forall P \in \mathbf{K}[X] \quad P(u) \in \mathbf{GL}(E) \iff P \wedge \pi_u = 1.$$

inversibilitePolynomeEndomorphismePrimaliteRelativePolynomeMinimal

Exercice 6 ★☆☆ — Soient E un \mathbf{C} -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 2$ et u un endomorphisme de E irréductible, i.e. tel que $\{0_E\}$ et E sont les seuls sous-espaces stables par u .

1. Démontrer que pour tout $x \in E \setminus \{0_E\}$, la famille $\mathcal{B}_x := (x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$ est une base de E .
2. Démontrer que la matrice de u dans la base \mathcal{B}_x ne dépend pas de x .

endomorphismeIrreductible

Exercice 7 ★☆☆ — Soient a, b des nombres complexes tels que $a^2 + 4b \neq 0$. Soient σ l'endomorphisme de $\mathbf{C}^{\mathbf{N}}$ défini par

$$\sigma \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{C}^{\mathbf{N}} & \longrightarrow & \mathbf{C}^{\mathbf{N}} \\ (u_n)_{n \in \mathbf{N}} & \longmapsto & (u_{n+1})_{n \in \mathbf{N}} \end{array} \right.$$

1. Déterminer les éléments propres de σ .
2. Démontrer que :

$$E := \{(u_n)_{n \in \mathbf{N}} \in \mathbf{C}^{\mathbf{N}} : \forall n \in \mathbf{N} \quad u_{n+2} = a u_{n+1} + b u_n\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{C}^{\mathbf{N}}$ stable par σ . On pourra écrire E comme le noyau d'un polynôme d'endomorphisme en σ .

3. Déduire du lemme est noyaux et de la question 1 que tout élément de E s'écrit d'une unique manière comme combinaison linéaire de deux suites géométriques que l'on explicitera.

suitesRecurrentesLineairesOrdre2

Exercice 8 ★☆☆ — Soient E un \mathbf{R} -espace vectoriel de dimension finie, $v \in \mathcal{L}(E)$ une symétrie de E et :

$$\varphi \left| \begin{array}{l} \mathcal{L}(E) \longrightarrow \mathcal{L}(E) \\ u \longmapsto u \circ v - v \circ u. \end{array} \right.$$

1. Démontrer que φ est un endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$.
2. Déterminer un polynôme annulateur de φ .
3. L'endomorphisme φ est-il diagonalisable ?

diagonalisabiliteCrochetLieSymetrie

Exercice 9 ★☆☆ — Soient un entier $n \geq 2$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telle que $A^2 - 3A + 4I_n = 0$. Démontrer que $\det(A) > 0$.

polynomeAnnulateurSigneDeterminant

Exercice 10 ★☆☆ — Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$.

1. Si la matrice A^2 est diagonalisable sur \mathbf{C} , la matrice A est-elle nécessairement diagonalisable sur \mathbf{C} ?
2. On suppose la matrice A^2 inversible et diagonalisable sur \mathbf{C} . Démontrer que la matrice A est diagonalisable sur \mathbf{C} .

diagonalisabiliteCarreMatrice

Exercice 11 ★☆☆ — Soit E un \mathbf{K} -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$.

1. Soient u et v des endomorphismes diagonalisables de E qui commutent. Démontrer qu'il existe une base \mathcal{B} de E telle que les matrices $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ et $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(v)$ sont diagonales.
2. Soient un entier $p \geq 2$ et u_1, \dots, u_p des endomorphismes diagonalisables de E qui commutent deux-à-deux. Démontrer qu'il existe une base \mathcal{B} de E telle que les matrices $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u_1), \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u_2), \dots, \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u_p)$ sont diagonales.

codiagonalisationNombreFin

Exercice 12 ★☆☆ — Soient E un \mathbf{K} -espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ admettant un polynôme minimal μ . Pour tout $x \in E$, notons :

- P_x le polynôme unitaire de degré minimal tel que $P_x(u)(x) = 0$;
- $E_x = \{P(f)(x) : P \in \mathbf{K}[X]\}$.

Soit $x \in E$.

1. Démontrer que P_x existe, est unique, et que :

$$\forall P \in \mathbf{K}[X] \quad P(f)(x) = 0 \implies P_x \mid P .$$

2. Démontrer que E_x est un sous-espace vectoriel de E de dimension $\deg(P_x)$.

Soit $(x, y) \in E^2$.

3. Si $E_x \cap E_y = \{0\}$, démontrer que $P_{x+y} = \text{PPCM}(P_x, P_y)$. Généraliser à $p \geq 2$ vecteurs x_1, \dots, x_p de E .
4. Si $P_x \wedge P_y = 1$, démontrer que $E_{x+y} = E_x \oplus E_y$. Généraliser à $p \geq 2$ vecteurs x_1, \dots, x_p de E .
5. Soit $P \in \mathbf{K}[X]$ un facteur irréductible de μ . Notons α sa multiplicité dans la décomposition de μ en produit de facteurs irréductibles de $\mathbf{K}[X]$. Démontrer qu'il existe $x \in \text{Ker}(P^\alpha(f))$ tel que $P_x = P^\alpha$.
6. Démontrer qu'il existe $x \in E$ tel que $P_x = \mu$.

polynomeMinimalEndomorphismePolynomeMinimalVecteur

Exercice 13 ★☆☆ — Soit E un \mathbf{K} -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$.

1. Soient u et v des endomorphismes trigonalisables de E qui commutent. Démontrer qu'il existe une base \mathcal{B} de E telle que les matrices $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ et $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(v)$ sont triangulaires supérieures.
2. Soient un entier $p \geq 2$ et u_1, \dots, u_p des endomorphismes trigonalisables de E qui commutent deux-à-deux. Démontrer qu'il existe une base \mathcal{B} de E telle que les matrices $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u_1), \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u_2), \dots, \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u_p)$ sont triangulaires supérieures.

cotrigonalisationNombreFin

Exercice 14 ★★☆☆ — Soit un entier $n \geq 2$. Nous nous proposons de démontrer le théorème de Cayley-Hamilton pour une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, à l'aide d'un raisonnement par continuité-densité.

1. Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{C}^n$.

- Si les $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ne sont pas tous égaux, on pose :

$$\delta := \min \{ |\lambda_k - \lambda_\ell| : (k, \ell) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2 \text{ et } \lambda_k \neq \lambda_\ell \}$$

le plus petit écart entre deux composantes distinctes du n -uplet $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$.

- Si tous les $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sont égaux, on pose :

$$\delta := 1.$$

Soit $p \in \mathbf{N}^*$. Démontrer que les n composantes du vecteur de \mathbf{C}^n :

$$\left(\lambda_1 + \frac{\delta}{1 \times p}, \lambda_2 + \frac{\delta}{2 \times p}, \dots, \lambda_n + \frac{\delta}{n \times p} \right)$$

sont deux-à-deux distinctes.

2. Démontrer que l'ensemble :

$$\mathcal{D}'_n(\mathbf{C}) := \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C}) : A \text{ est diagonalisable sur } \mathbf{C}\}$$

est une partie dense de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$.

3. Démontrer que l'application :

$$f \left| \begin{array}{l} \mathcal{M}_n(\mathbf{C}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbf{C}) \\ A \longmapsto \chi_A(A) \end{array} \right.$$

est continue.

4. Démontrer que l'application f est nulle sur $\mathcal{D}'_n(\mathbf{C})$.

5. En déduire que l'application f est identiquement nulle.

demonstrationTheoremeCayleyHamiltonMnc

Exercice 15 ★★★ — Soient $n \in \mathbf{N}^*$ et $J \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telle que $J^2 = -I_n$.

1. Démontrer que J est diagonalisable sur \mathbf{C} et que $\text{Spec}_{\mathbf{C}}(J) = \{i, -i\}$.

2. Démontrer que les multiplicités de i et $-i$ sont égales.

3. En déduire que n est pair. On pose $n = 2p$ dans la suite.

4. Démontrer que la matrice $\begin{pmatrix} iI_p & 0 \\ 0 & -iI_p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ est semblable dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ à la matrice $J_n := \begin{pmatrix} 0 & -I_p \\ I_p & 0 \end{pmatrix}$.

5. En déduire que J est semblable à J_n dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, puis dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

reductionMatriceCarreEgalMoinsIdentite

Exercice 16 ★★★ — Soit u un endomorphisme d'un \mathbf{K} -espace vectoriel E de dimension finie $n \geq 1$ tel que χ_u est scindé sur \mathbf{K} . Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ les valeurs propres deux à deux distinctes de u et m_1, \dots, m_r leurs multiplicités respectives. On se propose de démontrer qu'il existe un unique couple $(d, n) \in \mathcal{L}(E) \times \mathcal{L}(E)$ tels que :

$$u = n + d \quad ; \quad d \text{ est diagonalisable} \quad ; \quad n \text{ est nilpotent} \quad ; \quad n \circ d = d \circ n \quad [\text{décomposition de Dunford de } u].$$

1. Justifier que :

$$E = \bigoplus_{k=1}^r \text{Ker}((u - \lambda_k)^{m_k}) \quad [\text{décomposition de } E \text{ en somme directe de sous-espaces caractéristiques}].$$

2. En déduire qu'il existe un couple $(d_1, n_1) \in \mathbf{K}[u] \times \mathbf{K}[u]$ tels que :

$$u = n_1 + d_1 \quad ; \quad d_1 \text{ est diagonalisable} \quad ; \quad n_1 \text{ est nilpotent} \quad ; \quad n_1 \circ d_1 = d_1 \circ n_1.$$

3. Soit un couple $(d_2, n_2) \in \mathcal{L}(E) \times \mathcal{L}(E)$ tel que :

$$u = n_2 + d_2 \quad ; \quad d_2 \text{ est diagonalisable} \quad ; \quad n_2 \text{ est nilpotent} \quad ; \quad n_2 \circ d_2 = d_2 \circ n_2.$$

Démontrer que $d_1 = d_2$ et $n_1 = n_2$.

decompositionDunford