TD – Procédés sommatoires discrets

Exercice de la banque CCINP n°5. —

1. *On considère la série de terme général* $u_n = \dfrac{1}{n\,(\ln n)^\alpha}$ *où* $n \geqslant 2$ *et* $\alpha \in \mathbb{R}$.
   (a) Cas $\alpha \leqslant 0$. *En utilisant une minoration très simple de* u_n*, démontrer que la série diverge.*
   (b) Cas $\alpha > 0$. *Étudier la nature de la série. On pourra utiliser la fonction* $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x(\ln x)^\alpha}$.
2. *Déterminer la nature de la série* $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{\left(\mathrm{e} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}}{\left(\ln(n^2+n)\right)^2}$.

Exercice de la banque CCINP n°6. — *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de réels strictement positifs et* ℓ *un réel positif strictement inférieur à 1.*

1. *Démontrer que si* $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$*, alors la série* $\sum u_n$ *converge. On pourra écrire la définition de* $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$*, puis majorer, pour* n *assez grand,* u_n *par le terme général d'une suite géométrique.*
2. *Quelle est la nature de la série* $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{n!}{n^n}$ *?*

Exercice de la banque CCINP n°7. —

1. *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites réelles telles que* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est non nulle à partir d'un certain rang.*
   (a) *Prouver que si* $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ *alors* u_n *et* v_n *sont de même signe à partir d'un certain rang.*
   (b) *Dans cette question, on suppose que* (v_n) *est positive. Prouver que :*
   $$u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \implies \sum u_n \text{ et } \sum v_n \text{ sont de même nature}$$
2. *Étudier la convergence de la série* $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{\left((-1)^n + \mathrm{i}\right)\sin\left(\frac{1}{n}\right)\ln n}{\left(\sqrt{n+3}-1\right)}$. *Le symbole* i *désigne le nombre complexe de carré égal à* -1.

Exercice de la banque CCINP n°46. — *On considère la série :* $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$.

1. *Prouver que, au voisinage de* $+\infty$, $\pi\sqrt{n^2+n+1} = n\pi + \dfrac{\pi}{2} + \alpha\dfrac{\pi}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ *où* α *est un réel que l'on déterminera.*
2. *En déduire que* $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$ *converge.*
3. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$ *converge-t-elle absolument ?*

Exercice de la banque CCINP n°54. — *Soit* E *l'ensemble des suites à valeurs réelles qui convergent vers* 0.

1. *Prouver que* E *est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites à valeurs réelles.*
2. *On pose, pour tout* $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$, $||u|| = \displaystyle\sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$.
   (a) *Prouver que* $||\,.\,||$ *est une norme sur* E.
   (b) *Prouver que, pour tout* $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$, $\displaystyle\sum \frac{u_n}{2^{n+1}}$ *converge.*
   (c) *On pose, pour tout* $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$, $f(u) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{2^{n+1}}$. *Prouver que* f *est continue sur* E.

Exercice 1 ★☆☆ — *Étudier la nature de la série de terme général u_n dans chacun des cas suivants.*

(1) $u_n = \left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n - \dfrac{1}{e}$ (2) $u_n = \sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ (3) $u_n = (n+1)^{1/n} - n^{1/n}$

(4) $u_n = \dfrac{3^n}{n}$ (5) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+n}}$ (6) $u_n = \dfrac{\mathrm{ch}(n)}{\mathrm{ch}(2n)}$

(7) $u_n = \sqrt{1+\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} - 1$ (8) $u_n = \dfrac{n!}{n^n}$ (9) $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n^2-1}} - \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}$

(10) $u_n = \tan\left(\dfrac{1}{n}\right) - \mathrm{sh}\left(\dfrac{1}{n}\right)$ (11) $u_n = \dfrac{\ln(n)}{\sqrt{n}}$ (12) $u_n = 3^{1/n} - 2^{1/n}$

(13) $u_n = (\cos(n)+\sin(n))\,e^{-n}$ (14) $u_n = \dfrac{\binom{2n}{n}}{4^n}$ (15) $u_n = e^{1/n} - \cos\left(\dfrac{1}{n}\right) - \sin\left(\dfrac{1}{n}\right)$

(16) $u_n = \dfrac{1}{1^2+2^2+\ldots+n^2}$ (17) $u_n = \dfrac{n}{3+\cos(n)}$ (18) $u_n = \dfrac{\sin(n)}{n^{3/2}}$

(19) $u_n = \left(\dfrac{n+3}{2n+1}\right)^{n\ln(n)}$

`natureSerieNiveau1` [indication(s)]

Exercice 2 ★★☆ — *Dans chacun des cas suivants, démontrer que la série $\sum u_n$ converge et calculer sa somme.*

(1) $u_n = \dfrac{1}{n^2-1}$ (2) $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$ (3) $u_n = \ln\left(\dfrac{n^2+3n+2}{n^2+3n}\right)$

`convergenceCalculSommeNiveau1`

Exercice 3 ★★☆ — *Étudier la nature de la série de terme général u_n dans chacun des cas suivants.*

(1) $u_n = \dfrac{1!+2!+\ldots+n!}{(n+2)!}$. (2) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} + (-1)^n}$

`natureSerieNiveau2`

Exercice 4 ★★☆ — *Étudier la nature de la série de terme général u_n dans chacun des cas suivants, où α, β et x sont des réels.*

(1) $u_n = \mathrm{ch}\,(n^\alpha) - \mathrm{sh}\,(n^\alpha)$ (2) $u_n = \dfrac{n!\times x^n}{n^n}$ (3) $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha\,\ln^\beta(n)}$

`natureSerieAvecParametre`

Exercice 5 ★☆☆ — *Donner une équivalent de u_n lorsque n tend vers $+\infty$ dans chacun des cas suivants.*

(1) $u_n = \ln(n!)$ (2) $u_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{\sqrt{k}}$ (3) $u_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k\,\ln(k)}$

(4) $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\ln^2(k)$

`equivalentAvecComparaisonSerieIntegrale`

Exercice 6 ★★☆ — *Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de nombres complexes convergeant vers un complexe ℓ.*

1. *Démontrer que :*
$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \qquad [\textit{théorème de Cesàro}]\ .$$
2. *Soit α un réel strictement positif fixé. Considérons une suite réelle $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ telle que $v_0>0$ et, pour tout $n\in\mathbf{N}$:*
$$v_{n+1} = v_n + \frac{1}{v_n^{\alpha}}\ .$$
   (a) *Étudier le comportement asymptotique de la suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$.*
   (b) *Déterminer un équivalent de v_n lorsque n tend vers $+\infty$. On pourra chercher un exposant $\beta>0$ tel que la suite de terme général $v_{n+1}^{\beta}-v_n^{\beta}$ possède une limite finie non nulle.*

`theoremeCesaroEquivalentSuiteRecurrente`

Exercice 7 ★★★ — *Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de nombres réels positifs. On suppose qu'il existe un réel ℓ tel que :*
$$\sqrt[n]{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell\ .$$

1. *Démontrer que si $\ell<1$, alors la série $\sum u_n$ converge.*
2. *Démontrer que si $\ell>1$, alors la série $\sum u_n$ diverge.*
3. *Soit $\alpha\in\mathbf{R}$ et $z\in\mathbf{C}$. Déterminer la nature de la série $\sum n^{\alpha} z^n$.*

`regleCauchy` [indication(s)]

Exercice 8 ★★★ — *Démontrer que la série $\sum(-1)^n\dfrac{\ln(n)}{n}$ converge et calculer sa somme. On pourra utiliser le développement asymptotique :*
$$H_n := \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n)+\gamma+\mathrm{o}(1)\ .$$

`convergenceCalculSommeSerieAvecDeveloppementAsymptotiqueHnPrecisiono1` [indication(s)]

Exercice 9 ★★★ — *Déterminer la nature de la série $\sum\dfrac{(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}{n}$.*

`natureSerieCondensationSommesPartielles` [indication(s)]

Exercice 10 ★★☆ — *Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite à termes réels strictement positifs. Supposons qu'il existe un réel a tel que :*
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{=} 1-\frac{a}{n}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\ .$$
Démontrer qu'il existe $\lambda\in\mathbf{R}_+^*$ tel que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\lambda}{n^a}$.

`regleRaabeDuhamelVersionFaible`

Exercice 11 ★★☆ — *Démontrer qu'il existe $C>0$ tel que $\displaystyle\prod_{k=2}^{n}\left(1+\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{C}{\sqrt{n}}$.*

`equivalentProduit` [corrigé]

Exercice 12 ★★☆ — *Soit $\alpha>1$.*

1. *Démontrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^{\alpha-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^{\alpha}}{\alpha}$.*
2. *Soit $P\in\mathbf{R}[X]$ tel que $\deg(P)\geqslant 2$. Déterminer un équivalent de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}P(k)$ lorsque n tend vers $+\infty$.*

`equivalentSommeValeursPolynome`

Exercice 13 ★★☆ — *Soit $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de réels strictement positifs.*

1. *Supposons que la série $\sum a_n$ converge. Démontrer que la série $\sum \sqrt{a_n\, a_{n+1}}$ converge.*
2. *Donner un exemple de suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de réels strictement positifs telle que la série $\sum \sqrt{a_n\, a_{n+1}}$ converge et la série $\sum a_n$ diverge.*

`serieRacineCarreeDeuxTermesConsecutifs`

Exercice 14 ★★☆ — *Pour tout $n \geqslant 1$, posons $S_n = \sum_{k=1}^{n} \lfloor \log(k) \rfloor$ et $T_n = S_{10^n-1}$, où $\log$ est le logarithme décimal.*

1. *Déterminer des équivalents de S_n et T_n lorsque n tend vers $+\infty$.*
2. *Calculer T_n, pour tout $n \geqslant 1$, et retrouver le résultat précédent.*

`seriePartieEntiereLogDecimal`

Exercice 15 ★★☆ — *Soit z un nombre complexe tel que $|z| < 1$. Justifier que la série $\sum n\, z^n$ converge et calculer sa somme.*

`sommeSerieGeometriqueDerivee`

Exercice 16 ★☆☆ — *Pour tout couple $(n,m) \in \mathbf{N}^2$, notons :*

$$u_{n,m} = \begin{cases} \dfrac{1}{n!} & \text{si } n \geqslant m+1 \\[2ex] 0 & \text{si } n \leqslant m\,. \end{cases}$$

1. *Soit $m \in \mathbf{N}$. Démontrer que :*
$$\forall\, n \geqslant m+2, \qquad \sum_{k=m+1}^{n} \frac{1}{k!} \leqslant \frac{1}{m!}\left(1 + \sum_{k=m+2}^{n} \frac{1}{k(k-1)}\right).$$
2. *En déduire que, pour tout $m \in \mathbf{N}$, la série $\sum_{n\geqslant 0} u_{n,m}$ converge, et que sa somme est majorée par $\dfrac{2}{m!}$.*
3. *Démontrer que la série de terme général $\sum_{n=m+1}^{+\infty} \dfrac{1}{n!}$ converge, puis que $\sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{n=m+1}^{+\infty} \dfrac{1}{n!} = e$.*

`ecritureExponentielle1SommeRestes`

Exercice 17 ★★★ — *Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, posons $u_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \dfrac{(-1)^k}{k}$.*

1. *Justifier que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est bien définie.*
2. *Démontrer que la série $\sum u_n$ converge et calculer sa somme.*

`sommeRestesSerieHarmoniqueAlternee`

Exercice 18 ★★★ — *Démontrer que la famille :*

$$\left(\frac{1}{m^2 n + n^2 m + 2mn}\right)_{(n,m)\in\mathbf{N}^*\times\mathbf{N}^*}$$

est sommable et calculer sa somme.

`calculSommeDoubleX`

Exercice 19 ★★☆ — *Démontrer que pour tout $x \in\,]-1,1[$, la série $\sum \dfrac{x^n}{n}$ converge avec une somme donnée par*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)\,.$$

`developpementSerieLogarithme` [corrigé]

Exercice 20 ★★★ — *Soient $x \in [1,+\infty[$ et $(p_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ la suite des nombres premiers rangés dans l'ordre croissant :*

$$p_1 = 2 \quad , \quad p_2 = 3 \quad , \quad p_3 = 5 \quad , \quad p_4 = 7 \quad , \quad p_5 = 11 \quad , \quad \ldots$$

1. *Soient I, J deux ensembles, $\sigma : J \longrightarrow I$ une bijection et $(u_i)_{i\in I}$ une famille de réels positifs. Démontrer :*

$$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{j\in J} u_{\sigma(j)} \qquad [\textit{identité entre éléments de } \mathbf{R}_+ \cup \{+\infty\}] \ .$$

2. *Vérifier que la suite $\left(\prod_{k=1}^{m} \frac{1}{1-p_k^{-x}}\right)_{m\in\mathbf{N}^*}$ est croissante. On pose :*

$$\prod_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1-p_n^{-x}} := \lim_{m\to+\infty} \prod_{k=1}^{m} \frac{1}{1-p_k^{-x}} = \sup\left\{\prod_{k=1}^{m} \frac{1}{1-p_k^{-x}} \ : \ m \in \mathbf{N}^*\right\} \in \mathbf{R}_+ \cup \{+\infty\} \ .$$

3. *Soit $m \in \mathbf{N}^*$. On pose :*

$$I_m := \left\{\prod_{i=1}^{m} p_i^{\alpha_i} \ : \ (\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in \mathbf{N}^m\right\} \subset \mathbf{N}^* \ .$$

   Démontrer que :

$$\prod_{k=1}^{m} \frac{1}{1-p_k^{-x}} = \sum_{n\in I_m} \frac{1}{n^x} \ .$$

4. *Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Démontrer qu'il existe $m \in \mathbf{N}^*$ tel que :*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^x} \leqslant \sum_{n\in I_m} \frac{1}{n^x} = \prod_{k=1}^{m} \frac{1}{1-p_k^{-x}} \ .$$

5. *En déduire que :*

$$\underbrace{\sum_{n\in\mathbf{N}} \frac{1}{n^x}}_{\zeta(x) \ si \ x>1} = \prod_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1-p_n^{-x}}$$

   puis que la série $\sum \frac{1}{p_n}$ diverge.

`developpementProduitEulerienFonctionZetaRiemann` natureSerieNiveau1 [énoncé]

Indication(s) pour l'exercice 1

1. Déterminer un équivalent de
$$u_n = \left(1-\frac{1}{n}\right)^n - \frac{1}{e} = \exp\left(n \ln\left(1-\frac{1}{n}\right)\right) - \frac{1}{e}$$
Appliquer ensuite
   — le critère de Riemann
   — le théorème de comparaison pour les séries à termes réels positifs.
2. Il s'agit d'une série télescopique.
3. Déterminer un équivalent de
$$u_n = (n+1)^{1/n} - n^{1/n} = n^{1/n}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{1/n} - 1\right) = n^{1/n}\left(\exp\left(\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) - 1\right)$$
Appliquer ensuite
   — le critère de Riemann
   — le théorème de comparaison pour les séries à termes réels positifs.
4. Appliquer les résultats sur les croissances comparées pour étudier la limite de $u_n = \frac{3^n}{n}$ lorsque n tend vers $+\infty$.
5. Calculer un développement asymptotique de
$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+n}} = \frac{(-1)^n}{n}\,\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = \frac{(-1)^n}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1/2}$$
avec précision $\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Appliquer ensuite
   — le critère des séries alternées
   — le critère de Riemann
   — le théorème de comparaison pour les séries à termes réels positifs
   — le résultat sur la somme de deux séries convergentes.
6. En observant que
$$\mathrm{ch}(n) = \frac{e^n+e^{-n}}{2} = \frac{e^n}{2}\left(1+e^{-2n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{e^n}{2}$$
donner un équivalent de $u_n = \frac{\mathrm{ch}(n)}{\mathrm{ch}(2n)}$, Appliquer ensuite
   — le critère de convergence des séries géométriques
   — le théorème de comparaison pour les séries à termes réels positifs.
7. Déterminer un développement asymptotique de
$$u_n = \sqrt{1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} - 1 = \left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)^{1/2} - 1$$
avec précision $\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$. Appliquer ensuite
   — le critère des séries alternées
   — le critère de Riemann
   — le théorème de comparaison pour les séries à termes réels positifs
   — le résultat sur la somme d'une série convergente et d'une série divergente.
8. • *Première approche.* Appliquer la formule de Stirling et les résultats sur les croissances comparées pour obtenir
$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$
Appliquer ensuite
   — le critère de Riemann

— le théorème de comparaison pour les séries à termes réels positifs.

- *Deuxième approche.* Appliquer la règle de d'Alembert, en justifiant

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\,\frac{n^n}{n!} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \exp\left(n\,\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{e}$$

9. $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n^2-1}} - \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}$

- *Première approche.* Prendre appui sur la quantité conjuguée

$$u_n = \frac{\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}}{\sqrt{n^4-1}} = \frac{\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}}{\sqrt{n^4-1}}\,\frac{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1}}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1}} = \frac{2}{\sqrt{n^4-1}\left(\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1}\right)}$$

qui permet d'obtenir aisément un équivalent de u_n. Appliquer ensuite

— le critère de Riemann

— le théorème de comparaison pour les séries à termes réels positifs.

- *Deuxième approche.* Déterminer un développement asymptotique de

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n^2-1}} - \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}} - \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}\right) = \frac{1}{n}\left(\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{-1/2} - \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{-1/2}\right)$$

avec précision $\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)$. Appliquer ensuite

— le critère de Riemann

— le théorème de comparaison pour les séries à termes réels positifs.

Cette deuxième stratégie se généralise à la série $\sum \dfrac{1}{(n^2-1)^\alpha} - \dfrac{1}{(n^2+1)^\alpha}$, où α est un réel positif fixé.

10. Déterminer un développement asymptotique de $u_n = \tan\left(\frac{1}{n}\right) - \mathrm{sh}\left(\frac{1}{n}\right)$ avec précision $\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Appliquer ensuite

— le critère de Riemann

— le théorème de comparaison pour les séries à termes réels positifs.

11. Comparer $u_n = \dfrac{\ln(n)}{\sqrt{n}}$ à $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$, pour tout $n \geqslant 3$. Appliquer ensuite

— le critère de Riemann

— le théorème de domination pour les séries à termes positifs.

12. Déterminer un équivalent de

$$u_n = 3^{1/n} - 2^{1/n} = \exp\left(\frac{\ln(3)}{n}\right) - \exp\left(\frac{\ln(2)}{n}\right)$$

Appliquer ensuite

— le critère de Riemann

— le théorème de comparaison pour les séries à termes réels positifs.

13. Observer que

$$u_n = (\cos(n)+\sin(n))\,e^{-n} \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\left(\frac{1}{e}\right)^n\right)$$

Appliquer ensuite

— le critère de convergence des séries géométriques

— le théorème de domination pour les séries à termes positifs.

14. Appliquer la formule de Stirling pour obtenir un équivalent de $u_n = \dfrac{\binom{2n}{n}}{4^n}$, puis

— le critère de Riemann

— le théorème de le théorème de domination pour les séries à termes positifs.

La règle de d'Alembert ne s'applique pas ici. Certes, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n > 0$ et u_n est « de nature multiplicative », mais $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

15. Déterminer un développement asymptotique de $u_n = e^{1/n} - \cos\left(\frac{1}{n}\right) - \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ avec précision $\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Appliquer ensuite
    - — le critère de Riemann
    - — le théorème de comparaison pour les séries à termes réels positifs.

16. D'après la formule donnant la somme de Newton $\sum_{k=1}^{n} k^2$

$$u_n = \frac{1}{1^2 + 2^2 + \ldots + n^2} = \frac{6}{n(n+1)(2n+1)}$$

Déterminer alors un équivalent de u_n, puis appliquer
- — le critère de Riemann
- — le théorème de comparaison pour les séries à termes réels positifs.

Grâce à la décomposition en éléments simples

$$\frac{6}{X(X+1)(2X+1)} = \frac{6}{X+1} - \frac{24}{2X+1} + \frac{6}{X}$$

au développement asymptotique

$$H_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + \mathrm{o}(1) \qquad [\gamma \in]0,57; 0,58[\text{ est la constante d'Euler}]$$

et à l'identité

$$\forall\, n \in \mathbf{N}^* \quad \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2k+1} = H_{2n+1} - \frac{1}{2} H_n$$

on peut non seulement proposer une démonstration alternative de la convergence de la série $\sum u_n$, mais encore obtenir la valeur de sa somme :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = 18 - 24\ln(2)$$

17. Comparer $u_n = \frac{n}{3+\cos(n)}$ à $\frac{n}{4}$, pour tout $n \in \mathbf{N}$.
    - — le critère de Riemann
    - — le théorème de domination pour les séries à termes positifs.

18. Observer que, si α $\left]1, \frac{3}{2}\right[$, alors

$$u_n = \frac{\sin(n)}{n^{3/2}} \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$$

puis appliquer
- — le critère de Riemann
- — le théorème de comparaison pour les séries à termes réels positifs.

19. Observer que

$$\frac{n+3}{2n+1} = \frac{1}{2}\,\frac{1+\frac{3}{n}}{1+\frac{1}{2n}} \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{2}\left(1+\frac{3}{n}\right)\left(1-\frac{1}{2n}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{2}\left(1+\frac{5}{2n}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

En déduire

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n^{5/2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right) \qquad [\text{bien justifier la dernière relation}]$$

Appliquer enfin
- — le critère de Riemann
- — le théorème de comparaison pour les séries à termes réels positifs.

regleCauchy [énoncé]

Indication(s) pour l'exercice 7

1. Soit $q \in]\ell, 1[$. Comme $]-\infty, q[$ est un ouvert contenant ℓ
$$\exists N \in \mathbf{N} \quad \forall n \geqslant N \quad \sqrt[n]{u_n} < q$$
d'où
$$\forall n \geqslant N \quad 0 \leqslant u_n < q^n$$
On applique alors le théorème de domination pour les séries à termes positifs.
2. Soit $q \in]1, \ell[$. Comme $]q, +\infty[$ est un ouvert contenant ℓ
$$\exists N \in \mathbf{N} \quad \forall n \geqslant N \quad \sqrt[n]{u_n} > q$$
d'où
$$\forall n \geqslant N \quad u_n > q^n$$
On en déduit la divergence grossière de la série $\sum u_n$.
3.
   - *Cas où* $|z| \neq 1$. On peut étudier le comportement asymptotique de
   $$\sqrt[n]{|n^\alpha z^n|} = n^{\alpha/n}\,|z| = \exp\left(\frac{\alpha}{n}\ln(n)\right)|z|$$
   lorsque n tend vers $+\infty$, puis les résultats des questions 1 et 2. La règle de d'Alembert peut aussi être appliquée.
   - *Cas où* $|z| = 1$.
     — Pour $\alpha \geqslant 0$, la série $\sum n^\alpha$ est grossièrement divergente.
     — Si $\alpha < -1$, le critère de Riemann livre la convergence absolue de la série $\sum n^\alpha z^n$.
     — Si $\alpha \in [-1, 0[$ et $z = 1$, le critère de Riemann permet de conclure sur la nature de la série $\sum n^\alpha z^n$.
     — Si $\alpha \in [-1, 0[$ et $z \neq 1$, on introduit $\theta \in]0, 2\pi[$ tel que $z = e^{i\theta}$ et on applique une transformation d'Abel.

convergenceCalculSommeSerieAvecDeveloppementAsymptotiqueHnPrecisiono1 [énoncé]

Indication(s) pour l'exercice 8

La convergence de la série $\sum (-1)^n \frac{\ln(n)}{n}$ peut être établie en appliquant le critère des séries alternées. Pour déterminer sa somme, il suffit de déterminer la limite de la suite de terme général :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k \frac{\ln(k)}{k} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(2k)}{2k} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\ln(2k+1)}{2k+1} \\
&= \frac{\ln(2)}{2} H_n + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{k} - \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\ln(2k+1)}{2k+1} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(2k)}{2k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(2k)}{2k} \right) \\
&= \frac{\ln(2)}{2} H_n + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{\ln(k)}{k} + \frac{\ln(2)}{2} H_n + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{k} \\
&= \ln(2) H_n - \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{\ln(k)}{k} \,.
\end{aligned}$$

On démontre ensuite :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{k} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{2} \ln^2(n)$$

puis qu'il existe une constante réelle C telle que :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{k} \underset{n \to +\infty}{=} \frac{1}{2} \ln^2(n) + C + \mathrm{o}(1) \,.$$

natureSerieCondensationSommesPartielles [énoncé]

Indication(s) pour l'exercice 9

On pose, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{\lfloor \sqrt{k} \rfloor}}{k}$.

- Soit $n \geqslant 2$.
$$S_{(n+1)^2-1} = \sum_{k=1}^{(n+1)^2-1} \frac{(-1)^{\lfloor \sqrt{k} \rfloor}}{k} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=k^2}^{(k+1)^2-1} \frac{(-1)^{\lfloor \sqrt{i} \rfloor}}{i} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \underbrace{\sum_{i=k^2}^{(k+1)^2-1} \frac{1}{i}}_{u_k}$$
- Démontrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ est décroissante, en effectuant une comparaison série-intégrale.
- Conclure quant à la convergence de la série $\sum (-1)^n u_n$, donc de la suite $\left(S_{(n+1)^2-1}\right)_{n \geqslant 2}$.
- Considérer un entier $p \in \mathbf{N}^*$ et l'entier naturel n tel que
$$n \leqslant \sqrt{p} < n+1 \qquad [n \text{ est donc la partie entière de } p]$$
puis comparer la somme S_p aux deux sommes S_{n^2-1} et $S_{(n+1)^2-1}$, que l'on sait converger et avoir une limite commune.

equivalentProduit [énoncé]

Un corrigé de l'exercice 11

- Pour étudier la limite éventuelle de

$$u_n := \prod_{k=2}^{n} \underbrace{\left(1+\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}\right)}_{>0}$$

lorsque n tend vers $+\infty$, nous portons notre attention sur

$$\ln(u_n) = \sum_{k=2}^{n} \ln\left(1+\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}\right)$$

afin de pouvoir appliquer les résultats sur les séries numériques.

> Comme la fonction exponentielle est continue en 0, un développement asymptotique de $\ln(u_n)$ avec précision $\mathrm{o}(1)$ nous permettrait de conclure quant au comportement asymptotique de la suite de terme général u_n.

- Nous calculons $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

$$\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$$

et posons, pour tout entier $n \geqslant 2$

$$v_n := \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2n} \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$$

- En sommant, nous obtenons l'identité suivante

$$\ln(u_n) = \sum_{k=2}^{n} \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) = \sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2k} + \sum_{k=2}^{n} v_k \tag{1}$$

pour tout entier $n \geqslant 2$, qui nous invite à scinder la suite en trois parties.

- Deux termes consécutifs de la série $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ ont des signes opposés et la suite de terme général $\frac{1}{\sqrt{n}}$ converge vers 0 en décroissant. D'après le critère des séries alternées, la série $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge. Ainsi

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} - \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} \underset{n\to+\infty}{=} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} + \mathrm{o}(1) \tag{2}$$

- Le développement asymptotique

$$H_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + \mathrm{o}(1) \qquad [\gamma \in]0,57;0,58[\text{ est la constante d'Euler}]$$

nous livre

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2k} = \frac{1}{2}(H_n - 1) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{\ln(n)}{2} + \frac{\gamma-1}{2} + \mathrm{o}(1) \tag{3}$$

- De

$$v_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\underbrace{\frac{1}{n^{3/2}}}_{\geqslant 0}\right)$$

du critère de Riemann et du théorème de comparaison pour les séries à termes positifs, nous déduisons que la série $\sum v_n$ converge. Ainsi

$$\sum_{k=2}^{n} v_k = \sum_{k=2}^{+\infty} v_k - \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k \underset{n\to+\infty}{=} \sum_{k=2}^{+\infty} v_k + \mathrm{o}(1) \tag{4}$$

- D'après (1), (2), (3) et (4)

$$\ln(u_n) \underset{n\to+\infty}{=} -\frac{\ln(n)}{2} + \underbrace{\frac{1-\gamma}{2} + \sum_{k=2}^{+\infty}\left(\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} + v_k\right)}_{=:K \text{ (constante réelle)}} + \mathrm{o}(1)$$

Nous en déduisons que

$$u_n = \exp(\ln(u_n)) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{e^K}{\sqrt{n}} \times e^{\mathrm{o}(1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{e^K}{\sqrt{n}}$$

developpementSerieLogarithme [énoncé]

Un corrigé de l'exercice 19

Remarquons que l'assertion est claire si $x=0$. Fixons $n \in \mathbf{N}$ et considérons la fonction

$$f_n \left| \begin{array}{ccc}]0,1[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \frac{x^k}{k} \end{array} \right.$$

dérivable sur $]-1,1[$. Nous calculons

$$\forall\, x \in]-1,1[\quad f_n'(x) = \sum_{k=1}^{n+1} x^{k-1} = \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1}{1-x} - \frac{x^{n+1}}{1-x}$$

Fixons $x \in]-1,0[\cup]0,1[$. D'après le théorème fondamental de l'analyse

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{x^k}{k} = f_n(x) = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1-t}\, \mathrm{d}t = -\ln(1-x) - x^{n+2} \int_0^1 \frac{u^{n+1}}{1-xu}\, \mathrm{d}u \qquad [u = t/x] \tag{5}$$

L'intérêt du changement de variable réside dans l'ordre entre les bornes de l'intégrale (l'ordre entre 0 et x n'est pas connu, mais $0 \leqslant 1$), cf. inégalité triangulaire appliquée ci-dessous. De (5) et de

$$\forall\, u \in [0,1] \quad |1-xu| \geqslant 1 - |xu| \geqslant 1 - |x| > 0$$

nous déduisons

$$\left| \sum_{k=1}^{n+1} \frac{x^k}{k} + \ln(1-x) \right| \leqslant |x|^{n+2} \int_0^1 \frac{u^{n+1}}{|1-xu|}\, \mathrm{d}u \leqslant \frac{|x|^{n+2}}{1-|x|} \int_0^1 u^{n+1}\, \mathrm{d}u = \frac{|x|^{n+2}}{(n+2)(1-|x|)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

En appliquant le théorème d'encadrement, nous obtenons la convergence de la série de terme général $\dfrac{x^n}{n}$ et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$$