TD – Probabilités 2

Exercice de la banque CCINP n°96. — *Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbf{N}$, de loi de probabilité donnée par, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\mathbf{P}(X=n)=p_n$. La fonction génératrice de X est notée $\mathbf{G}_X$ et elle est définie par :*

$$\mathbf{G}_X(t)=\mathbf{E}\left(t^X\right)=\sum_{n=0}^{+\infty} p_n\, t^n$$

1. *Prouver que l'intervalle $]-1,1[$ est inclus dans l'ensemble de définition de $\mathbf{G}_X$.*
2. *Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbf{N}$. On pose $S=X_1+X_2$. Démontrer que, pour tout $t \in\ ]-1,1[$, $\mathbf{G}_S(t)=\mathbf{G}_{X_1}(t)\,\mathbf{G}_{X_2}(t)$:*
   - *(a) en utilisant le produit de Cauchy de deux séries entières ;*
   - *(b) en utilisant uniquement la définition de la fonction génératrice.*

   Remarque : on admettra, pour la question suivante, que ce résultat est généralisable à n variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbf{N}$.
3. *Un sac contient quatre boules : une boule numérotée 0, deux boules numérotées 1 et une boule numérotée 2. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On effectue n tirages successifs, avec remise, d'une boule dans ce sac. On note S_n la somme des numéros tirés. Soit $t \in\ ]-1,1[$. Déterminer $\mathbf{G}_{S_n}(t)$ puis en déduire la loi de S_n.*

Exercice de la banque CCINP n°110. — *Soit $(\Omega,\mathscr{A},\mathbf{P})$ un espace probabilisé.*

1. *Soit X une variable aléatoire définie sur $(\Omega,\mathscr{A},\mathbf{P})$ et à valeurs dans $\mathbf{N}$. On considère la série entière $\sum t^n\,\mathbf{P}(X=n)$ de variable réelle t. On note R_X son rayon de convergence.*
   - *(a) Prouver que $R_X \geqslant 1$. On pose $\mathbf{G}_X(t)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} t^n\,\mathbf{P}(X=n)$ et on note $\mathscr{D}_{\mathbf{G}_X}$ l'ensemble de définition de $\mathbf{G}_X$. Justifier que $[-1,1]\subset \mathscr{D}_{\mathbf{G}_X}$. Pour tout réel t fixé de $[-1,1]$, exprimer $\mathbf{G}_X(t)$ sous forme d'une espérance.*
   - *(b) Soit $k \in \mathbf{N}$. Exprimer, en justifiant la réponse, $\mathbf{P}(X=k)$ en fonction de $\mathbf{G}_X^{(k)}(0)$.*
2. *(a) On suppose que X suit une loi de Poisson de paramètre λ. Déterminer $\mathscr{D}_{\mathbf{G}_X}$ et, pour tout $t \in \mathscr{D}_{\mathbf{G}_X}$, calculer $\mathbf{G}_X(t)$.*
   - *(b) Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé, indépendantes et suivant des lois de Poisson de paramètres respectifs λ_1 et λ_2. Déterminer, en utilisant les questions précédentes, la loi de $X+Y$.*

Exercice de la banque CCINP n°97. — *Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbf{N}^2$ dont la loi est donnée par :*

$$\forall\,(j,k)\in\mathbf{N}^2 \qquad \mathbf{P}((X,Y)=(j,k))=\frac{(j+k)\left(\dfrac{1}{2}\right)^{j+k}}{\mathrm{e}\; j!\; k!}\,.$$

1. *Déterminer les lois marginales de X et de Y. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?*
2. *Prouver que $\mathbf{E}\left(2^{X+Y}\right)$ existe et la calculer.*

Exercice de la banque CCINP n°100. — *Soit $\lambda \in\ ]0,+\infty[$. Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbf{N}^*$. On suppose que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\mathbf{P}(X=n)=\dfrac{\lambda}{n(n+1)(n+2)}$.*

1. *Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle R définie par $R(X)=\dfrac{1}{X\,(X+1)\,(X+2)}$.*
2. *Calculer λ.*
3. *Prouver que X admet une espérance, puis la calculer.*
4. *X admet-elle une variance ? Justifier.*

Exercice de la banque CCINP n°108. — *Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ et à valeurs dans $\mathbf{N}$. On suppose que la loi du couple (X, Y) est donnée par :*

$$\forall\,(i,j) \in \mathbf{N}^2 \qquad \mathbf{P}((X=i) \cap (Y=j)) = \frac{1}{\mathrm{e}\, 2^{i+1}\, j!}\ .$$

1. *Déterminer les lois de X et de Y.*
2. (a) *Prouver que $1+X$ suit une loi géométrique et en déduire l'espérance et la variance de X.*
   (b) *Déterminer l'espérance et la variance de Y.*
3. *Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?*
4. *Calculer $\mathbf{P}(X=Y)$.*

Exercice 1 ★☆☆ — *Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires discrètes à valeurs réelles, mutuellement indépendantes, de même loi. On suppose qu'elles possèdent une espérance et une variance, notée respectivement m et σ^2.*

1. *Démontrer que la variable aléatoire $X = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} X_k$ possède une espérance et une variance, puis les calculer.*
2. *Calculer l'espérance de $\dfrac{1}{n-1}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(X_i - X)^2$.*

`esperanceVarianceMoyenneCarresEcartMoyenne`

Exercice 2 ★☆☆ — *Cet exercice a été proposé à l'oral du concours Mines-Télécom.*

1. *Énoncer et démontrer l'inégalité de Markov.*
2. *Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs réelles. Démontrer que :*

$$\forall\, x \in \mathbf{R}, \quad \mathbf{P}(X \geqslant x) \leqslant e^{-2x}\,\mathbf{E}\left(e^{2X}\right)\ .$$

`applicationInegaliteMarkov`

Exercice 3 ★★☆ — *Soit $p \in\,]0,1[$. On considère une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ définies sur le même espace de probabilités $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$, indépendantes, suivant toutes la loi $\mathscr{B}(p)$. On pose, pour tout $r \in \mathbf{N}^*$:*

$$T_r := \inf\{n \in \mathbf{N}^* \ :\ X_1 + \ldots + X_n = r\} \qquad [\textit{temps d'arrêt}]\ .$$

1. *Démontrer que, pour tout $r \in \mathbf{N}^*$, T_r est une variable aléatoire sur l'espace probabilisable $(\Omega, \mathscr{A})$.*
2. *Reconnaître la loi de T_1.*
3. *On fixe un entier $r \geqslant 2$.*
   (a) *Calculer, pour tout entier $n \geqslant r$, $\mathbf{P}(T_r = n)$.*
   (b) *Démontrer que la variable aléatoire T_r est presque sûrement finie.*
4. *Soient $Y_1, \ldots, Y_r$ des variables aléatoires définies sur le même espace de probabilités $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$, indépendantes, suivant toutes la loi $\mathscr{G}(p)$.*
   (a) *Déterminer la loi de $Y_1 + \ldots + Y_r$.*
   (b) *Démontrer que T_r possède une espérance finie et la calculer.*

`esperanceLoiPascal`

Exercice 4 ★★☆ — *Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé. À toute variable aléatoire $X : \Omega \longrightarrow \mathbf{N}$, on associe sa fonction caractéristique qui est l'application définie par :*

$$\varphi_X \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ t & \longmapsto & \mathbf{E}\left(e^{itX}\right) \end{array}\right. .$$

Soit $X : \Omega \longrightarrow \mathbf{N}$ une variable aléatoire, qui possède un moment d'ordre 2.

1. *Justifier que la fonction* φ_X *est bien définie.*
2. *Montrer que* φ_X *est de classe* $\mathscr{C}^2$ *et* 2π*-périodique.*
3. *Calculer* $\varphi_X(0), \varphi_X'(0)$ *et* $\varphi_X''(0)$.
4. *Soit* $p \in]0,1[$. *Calculer la fonction caractéristique d'une variable aléatoire* X *de loi* $\mathscr{B}(p)$.
5. *Soit* $(n,p) \in \mathbf{N}^* \times]0,1[$. *Calculer la fonction caractéristique d'une variable aléatoire* X *de loi* $\mathscr{B}(n,p)$ $(n \in \mathbf{N}^*)$.
6. *Soit* $X : \Omega \longrightarrow \mathbf{N}$ *une variable aléatoire. Soit* $n \in \mathbf{N}$. *Démontrer que, pour tout* $n \in \mathbf{N}$ *:*
$$\mathbf{P}(X=n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi_X(t)\, e^{-itn}\ \mathrm{d}t\ .$$
7. *En déduire que deux variables aléatoires* $X : \Omega \longrightarrow \mathbf{N}$ *et* $Y : \Omega \longrightarrow \mathbf{N}$ *vérifiant* $\varphi_X = \varphi_Y$*, ont même loi.*
8. *Soient* $X : \Omega \longrightarrow \mathbf{N}$ *et* $Y : \Omega \longrightarrow \mathbf{N}$ *deux variables aléatoires indépendantes. Montrer que* $\varphi_{X+Y} = \varphi_X\ \varphi_Y$.

`fonctionCaracteristiqueVariableAleatoire` [corrigé]

Exercice 5 ★★☆ — *Soient* $p \in]0,1[$ *et* $r \in \mathbf{N}^*$. *On dépose une bactérie dans une enceinte fermée au temps* $t=0$. *On envoie un rayon laser dans cet enceinte chaque seconde. Le premier rayon est envoyé au temps* $t=1$. *La bactérie a une probabilité* p *d'être touchée par le rayon. Elle meurt quand elle a été touchée* r *fois. Les tirs de laser sont mutuellement indépendants. Notons* X *la durée de vie de la bactérie.*

1. *Déterminer la loi de* X.
2. *Prouver que* X *admet une espérance et la calculer.*

`tirLaserBacteries`

Exercice 6 ★★☆ — *Soient* N *une variable aléatoire à valeurs dans* $\mathbf{N}^*$ *et* $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ *une suite de variables aléatoires à valeurs dans* $\mathbf{N}$, *de même loi. On suppose toutes ces variables aléatoires indépendantes. On note :*
$$S = \sum_{k=1}^{N} X_k \qquad [\textit{le nombre de termes de la somme est aléatoire}]\ .$$

1. *Démontrer que :*
$$\forall\, n \in \mathbf{N} \qquad \mathbf{P}(S=n) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}(N=k)\ \mathbf{P}(X_1+\ldots+X_k=n)\ .$$
2. *En déduire*
$$\forall\, t \in [-1,1] \qquad \mathbf{G}_S(t) = \mathbf{G}_N\left(\mathbf{G}_{X_1}(t)\right)\ .$$
3. *Supposons que* N *et* X_1 *possèdent une espérance finie. Démontrer que* S *possède une espérance finie et que :*
$$\mathbf{E}(S) = \mathbf{E}(N)\ \mathbf{E}(X_1) \qquad [\textit{formule de Wald}]\ .$$
4. *On lance une pièce équilibrée. Tant que l'on obtient pile, on lance on dé équilibré à six faces. Dès que l'on obtient face, on s'arrête. Déterminer l'espérance du nombre total de points accumulés au cours d'une partie.*

`formuleWald`

Exercice 7 ★★★ — *Soit* X *une variable aléatoire discrète à valeurs réelles possédant un moment d'ordre 2, non nulle presque sûrement et telle que* $\mathbf{E}(X) \geqslant 0$. *Démontrer que :*
$$\forall\, \theta \in]0,1[\quad \mathbf{P}(X \geqslant \theta\, \mathbf{E}(X)) \geqslant (1-\theta)^2\, \frac{\mathbf{E}(X)^2}{\mathbf{E}(X^2)} \qquad [\textit{inégalité de Paley-Zygmund}]\ .$$

`inegalitePaleyZygmund` [corrigé]

Exercice 8 ★★★ — *On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ de variables de Bernoulli indépendantes et de même paramètre $p \in]0,1[$. On pose :*

$$T := \inf\{n \in \mathbf{N}\setminus\{0,1\} \ : \ X_n = X_{n-1} = 1\} \qquad [\textit{temps d'arrêt}]\ .$$

1. *Démontrer que T est presque sûrement fini.*
2. *Calculer $\mathbf{P}(T=2)$ et $\mathbf{P}(T=3)$.*
3. *Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Exprimer $\mathbf{P}(T=n+2)$ et fonction de $\mathbf{P}(T=n+1)$, et $\mathbf{P}(T=n)$.*
4. *Démontrer que T possède une espérance et la calculer.*

`esperanceTempsArretDeuxPileConsecutifs` [corrigé]

Exercice 9 ★★★ — *Soient X, Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbf{N}$. Soit g la fonction définie par :*

$$g \left| \begin{array}{ccc} [-1,1]^2 & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (u,v) & \longmapsto & \mathbf{E}\left(u^X v^Y\right) \end{array} \right. .$$

1. *Justifier que la fonction g est bien définie.*
2. *Comment s'obtiennent les fonctions génératrices de X et Y à partir de la fonction g ?*
3. *Démontrer que la fonction g est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1,1[\times]-1,1[$.*
4. *Retrouver la loi conjointe du couple (X,Y) à partir des dérivées partielles en $(0,0)$.*

`fonctionGeneratriceLoiConjointe`

Exercice 10 ★★★ — *Soient X, Y deux variables aléatoires discrètes, à valeurs réelles, définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$. On suppose que Y est d'espérance finie. Démontrer que :*

$$\mathbf{E}(Y) = \sum_{x\in X(\Omega),\, \mathbf{P}(X=x)\neq 0} \mathbf{E}(Y\,|\,X=x)\,\mathbf{P}(X=x)$$

où, pour tout $x \in X(\Omega)$ tel que $\mathbf{P}(X=x)\neq 0$, $\mathbf{E}(Y\,|\,X=x)$ désigne l'espérance de la loi conditionnelle de Y sachant $(X=x)$.

`esperanceConditionnelle`

Exercice 11 ★★★ — *On considère une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbf{N}$ et deux variables aléatoires Y, Z de même loi et indépendantes. Démontrer que $Y+Z \sim 2X$ si et seulement si X est constante presque sûrement.*

`doubleVariableMemeLoiSommeDeuxVariablesIndependantes`

---

fonctionCaracteristiqueVariableAleatoire [énoncé]

Un corrigé de l'exercice 4

1. Soit $t \in \mathbf{R}$.
Comme $(\mathbf{P}(X=n))_{n\in\mathbf{N}}$ est une distribution de probabilités :
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left|\mathbf{P}(X=n)\ e^{itn}\right| = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X=n) = 1 < +\infty\ .$$
Par théorème de transfert, la variable e^{itX} est L_1, donc le nombre $\varphi_X(t)$ est bien défini.
En outre, d'après la formule de transfert :
$$\mathbf{E}\left(e^{itX}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X=n)\ e^{itn} = \mathbf{G}_X\left(e^{it}\right)\ .$$

2. D'après Q1, nous savons que :
$$\varphi_X \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ t & \longmapsto & \mathbf{E}\left(e^{itX}\right) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X=n)\ e^{itn} \end{array} \right. .$$
Nous allons appliquer le critère $\mathscr{C}^2$ à la série de fonctions $\sum f_n$, où, pour tout $n \in \mathbf{N}$, f_n est la fonction définie par :
$$f_n \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ t & \longmapsto & \mathbf{P}(X=n)\ e^{itn} \end{array} \right. .$$
(H1) Pour tout $n \in \mathbf{N}$, la fonction f_n est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbf{R}$ et :
$$f_n' \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ t & \longmapsto & i\,n\,\mathbf{P}(X=n)\ e^{itn} \end{array} \right. \qquad f_n'' \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ t & \longmapsto & -n^2\,\mathbf{P}(X=n)\ e^{itn} \end{array} \right. .$$
(H2) Fixons $t \in \mathbf{R}$.
En Q1, nous avons déjà établi la convergence (absolue) de la série numérique $\sum f_n(t)$.
D'une part :
$$\forall\, n \in \mathbf{N} \quad \left|f_n'(t)\right| = n\,\mathbf{P}(X=n)\ .$$
D'autre part, la variable X étant L^2, elle est également L^1. La série $\sum n\,\mathbf{P}(X=n)$ est donc (absolument) convergente.
Nous avons démontré que les séries de fonctions $\sum f_n$ et $\sum f_n'$ convergent simplement sur $\mathbf{R}$.
(H3) Soit $n \in \mathbf{N}$:
Comme :
$$\forall\, t \in \mathbf{R} \quad \left|f_n''(t)\right| = n^2\,\mathbf{P}(X=n)$$
il vient :
$$\left|\left|f_n''\right|\right|_{\infty,\mathbf{R}} = n^2\,\mathbf{P}(X=n)\ .$$
La variable X étant L^2, la série numérique $\sum n^2\,\mathbf{P}(X=n)$ converge (absolument).
Nous en déduisons que la série de fonctions $\sum f_n''$ est normalement (donc uniformément) convergente sur $\mathbf{R}$.

Le critère s'applique.
La fonction $\varphi_X = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbf{R}$ et :
$$\varphi_X' \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ t & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} i\,n\,\mathbf{P}(X=n)\ e^{itn} \end{array} \right. \qquad \varphi_X'' \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ t & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} -n^2\,\mathbf{P}(X=n)\ e^{itn} \end{array} \right. .$$

3. Clairement $\varphi_X(0) = \mathbf{E}(1) = 1$.
   D'après Q2 :
$$\varphi_X'(0) = \sum_{n=1}^{+\infty} i\, n\, \mathbf{P}(X=n) = i\, \mathbf{E}(X) \qquad\qquad \varphi_X''(0) = \sum_{n=1}^{+\infty} -n^2\, \mathbf{P}(X=n) = -\mathbf{E}\left(X^2\right)\ .$$
4. Soit $t \in \mathbf{R}$.
$$\varphi_X(t) = \mathbf{P}(X=0) + \mathbf{P}(X=1)\ e^{it} = (1-p) + p\, e^{it}$$
5. Soit $t \in \mathbf{R}$.
   D'après la formule du binôme de Newton :
$$\varphi_X(t) = \sum_{k=0}^{n} \mathbf{P}(X=k)\ e^{itk} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k\, (1-p)^{n-k}\, e^{itk} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(p\, e^{it}\right)^k\ (1-p)^{n-k} = \left((1-p) + p\, e^{it}\right)^n\ .$$
6. Soit $n \in \mathbf{N}$ fixé.
   Observons que :
$$\int_0^{2\pi} \varphi_X(t)\, e^{-itn}\ \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X=k)\ e^{itk}\ e^{-itn}\ \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X=k)\ e^{it(k-n)}\ \mathrm{d}t\ .$$
   Nous allons appliquer le théorème d'intégration terme à terme d'une série de fonctions sur un segment, sous hypothèse de convergence uniforme.
   Définissons, pour tout $k \in \mathbf{N}$, la fonction g_k par :
$$g_k \left| \begin{array}{ccc} [0,2\pi] & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ t & \longmapsto & \mathbf{P}(X=k)\ e^{it(k-n)} \end{array} \right. .$$
   (H1) Pour tout $k \in \mathbf{N}$, la fonction g_k est continue sur $[0,2\pi]$.
   (H2) Soit $k \in \mathbf{N}$. Comme :
$$\forall\, t \in [0,2\pi] \quad |g_k(t)| = \mathbf{P}(X=k)$$
   il vient :
$$||\, g_k\, ||_{\infty,[0,2\pi]} = \mathbf{P}(X=k)\ .$$
   Comme $(\mathbf{P}(X=k))_{k\in\mathbf{N}}$ est une distribution de probabilités, la série numérique $\sum \mathbf{P}(X=k)$ converge.
   Nous en déduisons que la série de fonctions $\sum g_k$ est normalement (donc uniformément) convergente sur $[0,2\pi]$.

   Le critère s'applique.
   La fonction $\sum_{k=0}^{+\infty} g_k$ est continue sur $[0,2\pi]$, la série numérique $\sum \int_0^{2\pi} g_k$ converge et :
$$\int_0^{2\pi} \varphi_X(t)\, e^{-itn}\ \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X=k)\ e^{it(k-n)}\ \mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X_k)\ \int_0^{2\pi} e^{it(k-n)}\ \mathrm{d}t\ .$$
   Comme :
$$\forall\, k \in \mathbf{N} \qquad \int_0^{2\pi} e^{it(k-n)}\ \mathrm{d}t = 2\pi\ \delta_{k,n}$$
   nous en déduisons :
$$\int_0^{2\pi} \varphi_X(t)\, e^{-itn}\ \mathrm{d}t = 2\pi\, \mathbf{P}(X=n)\ .$$
7. Soit $n \in \mathbf{N}$.
   D'après Q6 (le résultat vaut pour toute variable aléatoire à valeurs dans $\mathbf{N}$, non nécessairement L^2) et l'hypothèse $\varphi_X = \varphi_Y$:
$$\mathbf{P}(X=n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_X(t)\, e^{-itn}\ \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_Y(t)\, e^{-itn}\ \mathrm{d}t = \mathbf{P}(Y=n)\ .$$

8. Soit $t \in \mathbf{R}$.
Comme X et Y sont indépendantes, les variables aléatoires e^{itX} et e^{itY} sont également indépendantes.
D'après le cours :

$$\varphi_X(t)\,\varphi_Y(t) = \mathbf{E}\left(e^{itX}\right)\,\mathbf{E}\left(e^{itY}\right) = \mathbf{E}\left(e^{itX}e^{itY}\right) = \mathbf{E}\left(e^{it(X+Y)}\right) = \varphi_{X+Y}(t)\,.$$

Remarque. — On peut également démontrer ce résultat à l'aide du produit de Cauchy de deux séries numériques absolument convergentes.

inegalitePaleyZygmund [énoncé]

Un corrigé de l'exercice 7

(a) *Reformulation de l'inégalité à démontrer.* — Soit $\theta \in]0,1[$. Comme $\mathbf{E}\left(X^2\right) > 0$:

$$\mathbf{P}(X \geqslant \theta\,\mathbf{E}(X)) \geqslant (1-\theta)^2 \frac{\mathbf{E}(X)^2}{\mathbf{E}(X^2)} \iff \mathbf{E}((1-\theta)X)^2 \leqslant \mathbf{P}(X \geqslant \theta\,\mathbf{E}(X))\ \mathbf{E}\left(X^2\right)$$

On rappelle que, si A est un événement, alors $\mathbf{1}_A$ est une variable de Bernoulli de paramètre $\mathbf{P}(A)$, d'où $\mathbf{P}(A) = \mathbf{E}(\mathbf{1}_A)$. En particulier :

$$\mathbf{P}(X \geqslant \theta\,\mathbf{E}(X)) = \mathbf{E}\left(\mathbf{1}_{(X \geqslant \theta\,\mathbf{E}(X))}\right)$$

L'inégalité à démontrer est donc équivalente à :

$$\mathbf{E}((1-\theta)X)^2 \leqslant \mathbf{E}\left(\mathbf{1}_{(X \geqslant \theta\,\mathbf{E}(X))}\right)\ \mathbf{E}\left(X^2\right) = \mathbf{E}\left(\left(\mathbf{1}_{(X \geqslant \theta\,\mathbf{E}(X))}\right)^2\right)\ \mathbf{E}\left(X^2\right) \tag{1}$$

(b) *Une majoration de $\mathbf{E}((1-\theta)X)$.* — La linéarité de l'espérance et :

$$X = \mathbf{1}_{(X < \theta\,\mathbf{E}(X))}\,X + \mathbf{1}_{(X \geqslant \theta\,\mathbf{E}(X))}\,X$$

livrent :

$$\mathbf{E}(X) = \mathbf{E}\left(\mathbf{1}_{(X < \theta\,\mathbf{E}(X))}\,X\right) + \mathbf{E}\left(\mathbf{1}_{(X \geqslant \theta\,\mathbf{E}(X))}\,X\right) \tag{2}$$

On remarque que :

$$\mathbf{1}_{(X < \theta\,\mathbf{E}(X))}\,X \leqslant \theta\,\mathbf{E}(X)$$

La croissance de l'espérance entraîne que :

$$\mathbf{E}\left(\mathbf{1}_{(X < \theta\,\mathbf{E}(X))}\,X\right) \leqslant \theta\,\mathbf{E}(X) \tag{3}$$

De (2) et (3) nous déduisons :

$$(1-\theta)\,\mathbf{E}(X) \leqslant \mathbf{E}\left(\mathbf{1}_{(X \geqslant \theta\,\mathbf{E}(X))}\,X\right) \tag{4}$$

(c) *Conclusion avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz.* — D'après (4) et de $\mathbf{E}(X) \geqslant 0$:

$$0 \leqslant \mathbf{E}((1-\theta)X) \leqslant \mathbf{E}\left(\mathbf{1}_{(X \geqslant \theta\,\mathbf{E}(X))}\,X\right)$$

La fonction carrée étant croissante sur $\mathbf{R}_+$, il vient :

$$\mathbf{E}((1-\theta)\,\mathbf{E}(X))^2 \leqslant \mathbf{E}\left(\mathbf{1}_{(X \geqslant \theta\,\mathbf{E}(X))}\,X\right)^2$$

Grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous pouvons compléter cette inégalité en :

$$\mathbf{E}((1-\theta)\,\mathbf{E}(X))^2 \leqslant \mathbf{E}\left(\mathbf{1}_{(X \geqslant \theta\,\mathbf{E}(X))}\,X\right)^2 \leqslant \mathbf{E}\left(\left(\mathbf{1}_{(X \geqslant \theta\,\mathbf{E}(X))}\right)^2\right)\ \mathbf{E}\left(X^2\right)$$

L'identité (1) est démontrée.

esperanceTempsArretDeuxPileConsecutifs [énoncé]

Un corrigé de l'exercice 8

1. Observons que :

$$(T=\infty)=\bigcap_{k=1}^{+\infty}(X_k X_{k+1}=0)\subset\bigcap_{k=1}^{+\infty}(X_{2k}X_{2k+1}=0)$$

d'où, par croissance de la probabilité :

$$0\leqslant \mathbf{P}(T=\infty)\leqslant \mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^{+\infty}(X_{2k}X_{2k+1}=0)\right) \tag{5}$$

Par continuité de la probabilité :

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^{+\infty}(X_{2k}X_{2k+1}=0)\right)=\lim_{n\to+\infty}\mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n}(X_{2k}X_{2k+1}=0)\right) \tag{6}$$

Fixons $n\in\mathbf{N}^*$. D'après le lemme des coalitions, les variables aléatoires X_2X_3, X_4X_5, ..., $X_{2n}X_{2n+1}$ sont mutuellement indépendantes. Ainsi l'identité (6) s'écrit encore :

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^{+\infty}(X_{2k}X_{2k+1}=0)\right)=\lim_{n\to+\infty}\prod_{k=1}^{n}\mathbf{P}(X_{2k}X_{2k+1}=0) \tag{7}$$

Fixons $k\in[\![1,n]\!]$. Les variables X_{2k}, X_{2k+1} sont des variables de loi $\mathscr{B}(p)$, qui sont indépendantes. Ainsi $X_{2k}X_{2k+1}\sim\mathscr{B}\left(p^2\right)$ et :

$$\mathbf{P}(X_{2k}X_{2k+1}=0)=1-p^2 \tag{8}$$

De (7) et (8), nous déduisons :

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^{+\infty}(X_{2k}X_{2k+1}=0)\right)=\lim_{n\to+\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1-p^2\right)^n=0 \tag{9}$$

De (5) et (9), nous déduisons que $(T=+\infty)$ est négligeable.

2. (a) De $(T=2)=(X_1=1)\cap(X_2=1)$ et de l'indépendance des variables X_1, X_2, nous déduisons :

$$\mathbf{P}(T=2)=\mathbf{P}(X_1=1)\,\mathbf{P}(X_2=1)=p^2$$

   (b) De $(T=3)=(X_1=0)\cap(X_2=1)\cap(X_3=1)$ et de l'indépendance mutuelle des variables X_1, X_2, X_3, nous déduisons :

$$\mathbf{P}(T=3)=\mathbf{P}(X_1=0)\,\mathbf{P}(X_2=1)\,\mathbf{P}(X_3=1)=p^2(1-p)$$

3. La famille $((X_1=0), (X_1=1, X_2=1), (X_1=1, X_2=0))$ est un système quasi-complet d'événements. La formule des probabilités totales nous livre, pour tout $n\in\mathbf{N}^*$:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(T=n+2) &= \underbrace{\mathbf{P}(T=n+2\,|\,X_1=0)}_{=\mathbf{P}(T=n+1)}\underbrace{\mathbf{P}(X_1=0)}_{=1-p}\\ &+ \underbrace{\mathbf{P}(T=n+2\,|\,X_1=1, X_2=1)}_{=0}\mathbf{P}(X_1=1, X_2=1)\\ &+ \underbrace{\mathbf{P}(T=n+2\,|\,X_1=1, X_2=0)}_{=\mathbf{P}(T=n)}\underbrace{\mathbf{P}(X_1=1, X_2=0)}_{=p(1-p)}\end{aligned}$$

i.e. :

$$\mathbf{P}(T=n+2)=(1-p)\mathbf{P}(T=n+1)+p(1-p)\mathbf{P}(T=n)$$

4. (a) *Expression de $\mathbf{P}(T=n)$ en fonction de n, où $n \geqslant 2$.* — D'après la question précédente, la suite $(\mathbf{P}(T=n))_{n\geqslant 2}$ est donc récurrente linéaire d'ordre 2. Introduisons le polynôme de degré 2 :

$$Q := X^2 - (1-p)X - p(1-p)$$

Son discriminant vaut $\Delta := (1-p)^2 + 4p(1-p) = (1-p)(1+3p) > 0$ et ses deux racines réelles sont :

$$r_1 := \frac{1-p-\sqrt{(1-p)(1+3p)}}{2} \qquad \text{et} \qquad r_2 := \frac{1-p+\sqrt{(1-p)(1+3p)}}{2}$$

Elles sont non nulles car $p(1-p) \neq 0$. Il existe des scalaires λ_1, λ_2 tels que, pour tout $n \geqslant 2$:

$$\mathbf{P}(T=n) = \lambda_1 r_1^n + \lambda_2 r_2^n$$

D'après la question 2 :

$$\lambda_1 r_1^2 + \lambda_2 r_2^2 = \mathbf{P}(T=2) = p^2 \qquad \text{et} \qquad \lambda_1 r_1^3 + \lambda_2 r_2^3 = \mathbf{P}(T=3) = p^2(1-p)$$

Nous en déduisons que :

$$\begin{pmatrix} r_1^2 & r_2^2 \\ r_1^3 & r_2^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p^2 \\ p^2(1-p) \end{pmatrix}$$

puis :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{r_1^2 r_2^3 - r_1^3 r_2^2} \begin{pmatrix} r_2^3 & -r_2^2 \\ -r_1^3 & r_1^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p^2 \\ p^2(1-p) \end{pmatrix}$$

Nous en déduisons que $\lambda_1 = \dfrac{p^2}{r_1(r_1-r_2)}$ et $\lambda_2 = \dfrac{p^2}{r_2(r_2-r_1)}$. Nous avons donc établi que :

$$\forall n \geqslant 2 \qquad \mathbf{P}(T=n) = \frac{p^2}{r_1-r_2} r_1^{n-1} - \frac{p^2}{r_2-r_1} r_2^{n-1} = \frac{p^2}{r_2-r_1}\left(r_2^{n-1} - r_1^{n-1}\right) \tag{10}$$

(b) *Les nombres r_1 et r_2 sont strictement compris entre -1 et 1.* —

- Le sommet de la parabole représentant la fonction $\widetilde{Q} \colon x \longmapsto Q(x)$ a pour abscisse $(1-p)/2$.
- La fonction $\widetilde{Q}$ est strictement décroissante sur $]-\infty, (1-p)/2]$ et s'annule uniquement en r_1 sur cet intervalle. Comme :

  $$-1 \in]-\infty, (1-p)/2] \qquad \text{et} \qquad Q(-1) = 1 + (1-p)^2 > 0$$

  nous en déduisons que $-1 < r_1 < (1-p)/2$.
- La fonction $\widetilde{Q}$ est strictement croissante sur $[(1-p)/2, +\infty[$ et s'annule uniquement en r_2 sur cet intervalle. Comme :

  $$1 \in [(1-p)/2, +\infty[\qquad \text{et} \qquad Q(1) = p^2 > 0$$

  nous en déduisons que $(1-p)/2 < r_2 < 1$.

Ainsi $-1 < r_1 < (1-p)/2 < r_2 < 1$.

(c) *Conclusion sur l'espérance de T.* — D'après le cours sur la série entière $\sum x^n$, pour tout $x \in]-1,1[$, la série numérique $\sum_{n\geqslant 1} n x^{n-1}$ est absolument convergente, de somme $1/(1-x)^2$. Nous en déduisons que les séries numériques $\sum_{n\geqslant 2} n r_1^{n-1}$ et $\sum_{n\geqslant 2} n r_2^{n-1}$ convergent et que leurs sommes valent :

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n r_1^{n-1} = \frac{1}{(1-r_1)^2} - 1 = \frac{2r_1 - r_1^2}{(1-r_1)^2} \qquad \text{et} \qquad \sum_{n=2}^{+\infty} n r_2^{n-1} = \frac{1}{(1-r_2)^2} - 1 = \frac{2r_2 - r_2^2}{(1-r_2)^2}$$

D'après (10) et les résultats de linéarité sur les séries convergentes, la série $\sum_{n\geqslant 2} n\,\mathbf{P}(T=n)$ converge. La variable T possède donc une espérance finie. De plus :

$$\mathbf{E}(T) = \sum_{n=2}^{+\infty} n\,\mathbf{P}(T=n) = \frac{p^2}{r_2-r_1}\left(\frac{2r_2 - r_2^2}{(1-r_2)^2} - \frac{2r_1 - r_1^2}{(1-r_1)^2}\right)$$