

TD – Probabilités 1

Exercice de la banque CCINP n°97 (tronqué). — Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans \mathbf{N}^2 dont la loi est donnée par :

$$\forall (j, k) \in \mathbf{N}^2 \quad \mathbf{P}((X, Y) = (j, k)) = \frac{(j+k) \left(\frac{1}{2}\right)^{j+k}}{e^j k!}.$$

1. Déterminer les lois marginales de X et de Y .
2. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice de la banque CCINP n°100 (tronqué). — Soit $\lambda \in]0, +\infty[$. Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans \mathbf{N}^* . On suppose que :

$$\forall n \in \mathbf{N}^* \quad \mathbf{P}(X = n) = \frac{\lambda}{n(n+1)(n+2)}.$$

1. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle R définie par $R(X) = \frac{1}{X(X+1)(X+2)}$.
2. Calculer λ .

Exercice de la banque CCINP n°101 (tronqué). — Dans une zone désertique, un animal erre entre trois points d'eau A , B et C . À l'instant $t = 0$, il se trouve au point A . Quand il a épuisé l'eau du point où il se trouve, il part avec équiprobabilité rejoindre l'un des deux autres points d'eau. L'eau du point qu'il vient de quitter se régénère alors.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

On note A_n l'événement «l'animal est en A après son $n^{\text{ième}}$ trajet».

On note B_n l'événement «l'animal est en B après son $n^{\text{ième}}$ trajet».

On note C_n l'événement «l'animal est en C après son $n^{\text{ième}}$ trajet».

On pose $\mathbf{P}(A_n) = a_n$, $\mathbf{P}(B_n) = b_n$ et $\mathbf{P}(C_n) = c_n$.

1. (a) Exprimer, en le justifiant, a_{n+1} en fonction de a_n , b_n et c_n .
- (b) Exprimer, de même, b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n , b_n et c_n .

2. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$.

- (a) Prouver que $-\frac{1}{2}$ est valeur propre de A et déterminer le sous-espace propre associé.
 - (b) Déterminer une matrice P inversible et une matrice D diagonale de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ telles que $D = P^{-1}AP$.
Le calcul de P^{-1} n'est pas demandé.
3. Montrer comment les résultats de la question 2. peuvent être utilisés pour calculer a_n , b_n et c_n en fonction de n .
Aucune expression finalisée de a_n , b_n et c_n n'est demandée.

Exercice de la banque CCINP n°102 (tronqué). — Soit $N \in \mathbf{N}^*$. Soit $p \in]0, 1[$. On pose $q = 1 - p$. On considère N variables aléatoires X_1, X_2, \dots, X_N définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, indépendantes et de même loi géométrique de paramètre p .

1. Soit $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Déterminer $\mathbf{P}(X_i \leq n)$, puis $\mathbf{P}(X_i > n)$.
2. On considère la variable aléatoire Y définie par $Y = \min_{1 \leq i \leq N} (X_i)$, c'est-à-dire :

$$\forall \omega \in \Omega \quad Y(\omega) = \min(X_1(\omega), \dots, X_N(\omega))$$

où \min désigne « le plus petit élément de ».

- (a) Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Calculer $\mathbf{P}(Y > n)$. En déduire $\mathbf{P}(Y \leq n)$, puis $\mathbf{P}(Y = n)$.
- (b) Reconnaître la loi de Y .

Exercice de la banque CCINP n°103 (tronqué). — Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé.

1. Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in]0, +\infty[^2$. Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. On suppose que X_1 et X_2 sont indépendantes et suivent des lois de Poisson, de paramètres respectifs λ_1 et λ_2 . Déterminer la loi de $X_1 + X_2$.
2. Soit $p \in]0, 1[$. Soit $\lambda \in]0, +\infty[$. Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. On suppose que Y suit une loi de Poisson de paramètre λ . On suppose que $X(\Omega) = \mathbf{N}$ et que, pour tout $m \in \mathbf{N}$, la loi conditionnelle de X sachant $(Y = m)$ est une loi binomiale de paramètre (m, p) . Déterminer la loi de X .

Exercice de la banque CCINP n°106 (tronqué). — X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes et à valeurs dans \mathbf{N} . Elles suivent la même loi définie par :

$$\forall k \in \mathbf{N} \quad \mathbf{P}(X = k) = \mathbf{P}(Y = k) = p q^k$$

où $p \in]0, 1[$ et $q = 1 - p$. On considère alors les variables U et V définies par $U = \sup(X, Y)$ et $V = \inf(X, Y)$.

1. Déterminer la loi du couple (U, V) .
2. Déterminer la loi marginale de U . On admet que $V(\Omega) = \mathbf{N}$ et que :

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad \mathbf{P}(V = n) = p q^{2n} (1 + q).$$

3. Prouver que $W = V + 1$ suit une loi géométrique.
4. U et V sont-elles indépendantes ?

Exercice de la banque CCINP n°108 (tronqué). — Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ et à valeurs dans \mathbf{N} . On suppose que la loi du couple (X, Y) est donnée par :

$$\forall (i, j) \in \mathbf{N}^2 \quad \mathbf{P}((X = i) \cap (Y = j)) = \frac{1}{e^{2^{i+1} j}}.$$

1. Déterminer les lois de X et de Y .
2. Prouver que $1 + X$ suit une loi géométrique.
3. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
4. Calculer $\mathbf{P}(X = Y)$.

Exercice de la banque CCINP n°109. — Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Une urne contient n boules blanches numérotées de 1 à n et deux boules noires numérotées 1 et 2. On effectue le tirage une à une, sans remise, de toutes les boules de l'urne. On suppose que tous les tirages sont équiprobables.

On note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule blanche.

On note Y la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule numérotée 1.

1. Déterminer la loi de X .
2. Déterminer la loi de Y .

Exercice de la banque CCINP n°111 (tronqué). — On admet que, pour tout $q \in \mathbf{N}$, pour tout $x \in]-1, 1[$, la série $\sum_{k \geq q} \binom{k}{q} x^{k-q}$ converge et que :

$$\sum_{k=q}^{+\infty} \binom{k}{q} x^{k-q} = \frac{1}{(1-x)^{q+1}}.$$

Soit $p \in]0, 1[$. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé. Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ et à valeurs dans \mathbf{N} . On suppose que la loi de probabilité du couple (X, Y) est donnée par :

$$\forall (k, n) \in \mathbf{N}^2 \quad \mathbf{P}((X = k) \cap (Y = n)) = \begin{cases} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^n p(1-p)^n & \text{si } k \leq n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Vérifier qu'il s'agit bien d'une loi de probabilité.
2. (a) Déterminer la loi de Y .
(b) Prouver que $1 + Y$ suit une loi géométrique.
3. Déterminer la loi de X .

Exercice 1 ★★☆☆ — On lance un dé équilibré jusqu'à l'obtention d'un 6. Quelle est la probabilité que tous les chiffres obtenus soient pairs ?

suiteLancersDeArretSixTouschiffresPairs

Exercice 2 ★☆☆ — Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$. Déterminer la loi de $X + Y$.

sommeVariablesIndependantesLoiGeometrique

Exercice 3 ★☆☆ — Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Reconnaitre la loi conditionnelle de X sachant ($X + Y = n$).

sommeVariablesIndependantesLoiExponentielleLoiConditionnelle

Exercice 4 ★★☆☆ — On lance une pièce équilibrée une infinité de fois jusqu'à l'obtention de deux PILE consécutifs.

1. Quel est la probabilité que le jeu s'arrête ?
2. Généraliser à un autre motif que PILE, PILE.

suiteLancersPieceMotif

Exercice 5 ★★☆☆ — On note \mathcal{P} l'ensemble des nombres premiers et ζ la fonction définie par :

$$\zeta \left| \begin{array}{l}]1, +\infty[\longrightarrow \mathbf{R} \\ s \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} . \end{array} \right.$$

Soient $s > 1$ et N une variable aléatoire à valeurs dans \mathbf{N}^* telle que :

$$\forall n \in \mathbf{N}^* \quad \mathbf{P}(N = n) = \frac{1}{\zeta(s) n^s} .$$

Pour tout nombre $p \in \mathcal{P}$, on note X_p l'indicatrice de l'événement ($p | N$). Démontrer que les variables X_p ($p \in \mathcal{P}$), sont mutuellement indépendantes.

loiZetaIndependance

Exercice 6 ★★☆☆ — On lance indéfiniment une pièce qui donne PILE avec probabilité $p \in]0, 1[$. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on note X_n la variable aléatoire égale à 1 si PILE a été obtenu lors du n -ième lancer de la pièce et 0 sinon. Pour tout $r \in \mathbf{N}^*$, on note :

$$T_r := \min \left\{ n \in \mathbf{N}^* : \sum_{k=1}^n X_k = r \right\} \in \llbracket r, +\infty \rrbracket$$

la variable aléatoire égale au rang d'apparition du r -ième PILE.

1. Démontrer que, pour tout $r \in \mathbf{N}^*$, $\mathbf{P}(T_r = +\infty) = 0$.
2. Déterminer, pour tout $r \in \mathbf{N}^*$, la loi de T_r .
3. Donner, pour tout $r \in \mathbf{N}^*$, la valeur de la somme $\sum_{n=r}^{+\infty} \binom{k-1}{r-1} p^r (1-p)^{k-r}$?
4. On pose $S_1 = T_1$ et, pour tout $n \geq 2$, $S_n = T_n - T_{n-1}$. Démontrer que les variables aléatoires $(S_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ sont indépendantes et de même loi.

loiPascal

Exercice 7 ★★☆☆ — Pour tout $a \in \mathbf{N}^*$, on pose :

$$\langle a \rangle := \{ka : k \in \mathbf{N}^*\} \quad [\text{ensemble des multiples de } a] .$$

Soient \mathbf{P} et \mathbf{Q} deux probabilités sur l'espace probabilisable $(\mathbf{N}^*, \mathcal{P}(\mathbf{N}^*))$ telles que :

$$\forall a \in \mathbf{N}^* \quad \mathbf{P}(\langle a \rangle) = \mathbf{Q}(\langle a \rangle) .$$

Démontrer que les probabilités \mathbf{P} et \mathbf{Q} sont égales.

probabiliteEntiersEnsemblesMultiples [indication(s)]

Exercice 8 ★★★ — Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé et $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'événements mutuellement indépendants tels que la série $\sum \mathbf{P}(A_n)$ diverge.

1. Démontrer que :

$$A_\infty := \{\omega \in \Omega : \text{il existe une infinité d'entiers naturels } n \text{ tels que } \omega \in A_n\}$$

est un événement.

2. Démontrer que $\mathbf{P}(A_\infty) = 1$.

3. On lance indéfiniment une pièce équilibrée. Quelle est la probabilité d'obtenir un million de PILE consécutifs ?

lemmeCantelli
