

TD – Fonctions vectorielles

Exercice de la banque CCINP n°3. —

1. On pose :

$$g : x \mapsto e^{2x} \quad \text{et} \quad h : x \mapsto \frac{1}{1+x}.$$

Calculer, pour tout entier naturel k , la dérivée d'ordre k des fonctions g et h sur leurs ensembles de définition respectifs.

2. On pose :

$$f : x \mapsto \frac{e^{2x}}{1+x}.$$

En utilisant la formule de Leibniz concernant la dérivée $n^{\text{ième}}$ d'un produit de fonctions, déterminer, pour tout entier naturel n et pour tout $x \in \mathbf{R} \setminus \{-1\}$, la valeur de $f^{(n)}(x)$.

3. Démontrer, dans le cas général, la formule de Leibniz, utilisée dans la question précédente.

Exercice de la banque CCINP n°74 (tronqué). —

1. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer les valeurs propres de A puis une base de vecteurs propres associés.

2. On considère le système différentiel $\begin{cases} x' = x + 2z \\ y' = y \\ z' = 2x + z \end{cases}$, x, y, z désignant trois fonctions de la variable t , dérivables sur \mathbf{R} . En utilisant la question 1. et en le justifiant, résoudre ce système.

Exercice de la banque CCINP n°75. — On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Démontrer que A n'est pas diagonalisable.

2. On note f l'endomorphisme de \mathbf{R}^2 canoniquement associé à A . Trouver une base (v_1, v_2) de \mathbf{R}^2 dans laquelle la matrice de f est de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$. On donnera explicitement les valeurs de a , b et c .

3. En déduire la résolution du système différentiel $\begin{cases} x' = -x - 4y \\ y' = x + 3y \end{cases}$.

Exercice 1 ★☆☆ — Soient $n \in \mathbf{N}$ et :

$$\mathbf{O}_{2n+1}(\mathbf{R}) := \{A \in \mathcal{M}_{2n+1}(\mathbf{R}) : A^\top A = I_{2n+1}\}.$$

On considère une application $M : \mathbf{R} \longrightarrow \mathcal{M}_{2n+1}(\mathbf{R})$ dérivable sur \mathbf{R} vérifiant :

$$\forall t \in \mathbf{R} \quad M(t) \in \mathbf{O}_{2n+1}(\mathbf{R}).$$

Démontrer que, pour tout $t \in \mathbf{R}$, la matrice $M'(t)$ n'est pas inversible.

cheminDerivableDansGroupeOrthogonalFormatImpair [indication(s)]

Exercice 2 ★☆☆ — Soient I un intervalle de \mathbf{R} , $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien et $f : I \longrightarrow E$ une application dérivable, qui ne s'annule pas sur I . Démontrer que l'application :

$$g \begin{cases} I & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & \|f(t)\| \end{cases}$$

est dérivable sur I , puis exprimer, pour tout $t \in I$, $g'(t)$ en fonction de $f(t)$ et de $f'(t)$.

derivabiliteDeriveeNormeFonctionDerivableSansAnnulation [indication(s)]

Exercice 3 ★☆☆ — Calculer, pour tout $(n, x) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{R}$:

$$D_n(x) := \det \begin{pmatrix} x & 1 & 0 & \dots & 0 \\ x^2/2! & x & 1 & \ddots & \vdots \\ x^3/3! & x^2/2! & x & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ x^n/n! & \dots & \dots & x^2/2! & x \end{pmatrix} \quad [\text{déterminant d'une matrice de } \mathcal{M}_n(\mathbf{R})].$$

calculDeterminantAvecDerivation [indication(s)]

Exercice 4 ★☆☆ — Soient E un \mathbf{R} -espace vectoriel normé de dimension finie, F un sous-espace vectoriel de E , a, b des réels tels que $a < b$ et $f : [a, b] \longrightarrow E$ une fonction continue par morceaux. Démontrer que :

$$(\forall t \in [a, b] \quad f(t) \in F) \implies \int_a^b f(t) dt \in F.$$

integraleFonctionValeursSousEspaceVectoriel [indication(s)]

Exercice 5 ★☆☆ — Soient a, b des réels tels que $a < b$, $(E, \|\cdot\|)$ un \mathbf{R} -espace vectoriel normé de dimension finie et $f \in \mathcal{C}^1([a, b], E)$ telle que $f(a) = 0_E$. Démontrer que :

$$\left\| \int_a^b f(t) dt \right\| \leq \frac{(b-a)^2}{2} \sup_{x \in [a, b]} \|f'(x)\|.$$

majorationNormeIntegraleFonctionC1AnnulationBorneInferieure [indication(s)]

Exercice 6 ★★☆☆ — Soient E un \mathbf{R} -espace vectoriel de dimension finie et $f : [0, 1] \longrightarrow E$ une fonction nulle en 0 et dérivable en 0 à droite. Démontrer que :

$$\sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n^2}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} f'_d(0).$$

sommeConvergeantNombreDeriveeDroite0 [indication(s)]

Exercice 7 ★★☆☆ — Soient E un \mathbf{R} -espace vectoriel de dimension finie muni d'une norme $\|\cdot\|$ et $f : [0, 1] \longrightarrow E$ une application de classe \mathcal{C}^2 telle :

$$f(0) = f'(0) = f'(1) = 0_E \quad \text{et} \quad \|f(1)\| = 1.$$

Démontrer que :

$$\sup_{t \in [0, 1]} \|f''(t)\| \geq 4.$$

minorationNormeInfinieDeriveeSecondeContraintesExtremities [indication(s)]

Exercice 8 ★★★ — Soient E un \mathbf{R} -espace vectoriel de dimension finie et $f : \mathbf{R} \longrightarrow E$ une fonction dérivable en 0 telle que :

$$\forall x \in \mathbf{R} \quad f(2x) = 2f(x).$$

Démontrer que f est linéaire.

fonctionDerivableZeroDeuxHomogene [indication(s)]

Exercice 9 ★★★ — Étudier la limite éventuelle de :

$$u_n := \sum_{k=1}^n \sin\left(\frac{k}{n}\right) \sin\left(\frac{k}{n^2}\right) \quad \text{et} \quad v_n := \sum_{k=1}^n \sin^2\left(\frac{1}{\sqrt{k+n}}\right)$$

lorsque n tend vers $+\infty$.

sommeSinusInegaliteTaylorLagrangeSommesRiemann [indication(s)]

Exercice 10 ★★★ — Soient a, b des réels tels que $a < b$, $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien et $f \in \mathcal{C}^0([a, b], E)$ une application non identiquement nulle. On suppose que :

$$\left\| \int_a^b f(t) dt \right\| = \int_a^b \|f(t)\| dt$$

et on note u le vecteur normalisé de $\int_a^b f(t) dt$. Comme $E = \text{Vect}(u) \oplus \text{Vect}(u)^\perp$:

$$\forall t \in [a, b] \quad \exists ! (\alpha(t), v(t)) \in \mathbf{R} \times \text{Vect}(u)^\perp \quad f(t) = \alpha(t) \cdot u + v(t).$$

1. Démontrer que les applications α et v sont continues sur $[a, b]$.

2. Démontrer que le vecteur $\int_a^b v(t) dt$ est orthogonal à u .

3. Démontrer que $\int_a^b \alpha(t) dt = \int_a^b \|f(t)\| dt$.

4. Démontrer que, pour tout $t \in [a, b]$, $\alpha(t) \leq \|f(t)\|$.

5. En déduire que, pour tout $t \in [a, b]$, $f(t) = \|f(t)\| \cdot u$.

normeIntegraleEgaleIntegraleNorme [indication(s)]

Exercice 11 ★★★☆ — Soient n un entier naturel non nul, I un intervalle de \mathbf{R} , $f \in \mathcal{C}^n(I, \mathbf{C})$ telle que :

$$\forall t \in I \quad |f(t)| = 1.$$

Nous nous proposons de démontrer l'existence d'une fonction $\alpha \in \mathcal{C}^n(I, \mathbf{R})$ telle que :

$$\forall t \in I \quad f(t) = \exp(i \alpha(t)).$$

1. Démontrer que si α_1 et α_2 sont deux fonctions solutions du problème, alors :

$$\exists k \in \mathbf{Z} \quad \forall t \in I \quad \alpha_1(t) = \alpha_2(t) + 2k\pi.$$

2. Soit $t_0 \in I$ et α_0 un argument de $f(t_0)$. Démontrer que la fonction :

$$\alpha \left\{ \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbf{R} \\ t \longmapsto \alpha_0 + i \int_{t_0}^t \frac{f'(x)}{f(x)} dx \end{array} \right.$$

est solution du problème.

theoremeRelevementRegulariteC1

cheminDerivableDansGroupeOrthogonalFormatImpair [\[énoncé\]](#)**Indication(s) pour l'exercice 1**

(a) Démontrer que la fonction

$$f \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{R} \longrightarrow \mathcal{M}_{2n+1}(\mathbf{R}) \\ t \longmapsto M(t)^\top M(t) \end{array} \right.$$

est dérivable.

(b) Dériver la fonction f pour en déduire que

$$\forall t \in \mathbf{R} \quad M'(t)^\top M(t) = -M(t)^\top M'(t)$$

puis

$$\forall t \in \mathbf{R} \quad \det(M'(t)) = -\det(M'(t))$$

derivabiliteDeriveeNormeFonctionDerivableSansAnnulation [\[énoncé\]](#)**Indication(s) pour l'exercice 2**

- Justifier que la fonction

$$h \left| \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbf{R} \\ t \longmapsto \langle f(t), f(t) \rangle \end{array} \right.$$

est dérivable sur I , puis calculer, pour tout $t \in I$, $h'(t)$ en fonction de $f(t)$ et de $f'(t)$.

- Comme

- la fonction h est dérivable sur I et prend ses valeurs dans \mathbf{R}_+^* (à justifier) ;
- la fonction $\sqrt{\cdot}$ est dérivable sur \mathbf{R}_+^*

la fonction $g = \sqrt{\cdot} \circ h$ est dérivable sur I et on dispose d'une formule pour la composée de deux fonctions dérivables de la variable réelle.

Indication(s) pour l'exercice 3

(a) Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, justifier que la fonction

$$D_n \left| \begin{array}{l} \mathbf{R} \longrightarrow \\ x \longmapsto \det \end{array} \right. \begin{array}{l} \mathbf{R} \\ \begin{pmatrix} x & 1 & 0 & \dots & 0 \\ x^2/2! & x & 1 & \ddots & \vdots \\ x^3/3! & x^2/2! & x & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ x^n/n! & \dots & \dots & x^2/2! & x \end{pmatrix} \end{array}$$

est dérivable sur \mathbf{R} .

(b) Démontrer que

$$\forall (n, x) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{R} \quad D'_{n+1}(x) = D_n(x) \quad \text{et} \quad D_{n+1}(0) = 0$$

integraleFonctionValeursSousEspaceVectoriel [énoncé]

Indication(s) pour l'exercice 4

(a) Justifier que

$$\forall n \in \mathbf{N}^* \quad S_n^g(f) := \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \in F$$

(b) Quelle propriété topologique remarquable possède un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un \mathbf{R} -espace vectoriel normé?

majorationNormeIntegraleFonctionC1AnnulationBorneInferieure [énoncé]

Indication(s) pour l'exercice 5

(a) Justifier que le nombre réel

$$\|f'\|_{\infty,[a,b]} := \sup_{x \in [a,b]} \|f'(x)\|$$

est bien défini.

(b) Justifier que la fonction

$$F \left| \begin{array}{l} [a, b] \longrightarrow E \\ x \longmapsto \int_a^x f(t) dt \end{array} \right.$$

est de classe \mathcal{C}^2 . On peut alors lui appliquer une des inégalités de Taylor-Lagrange pour majorer $\|F(b) - F(a)\|$.

Indication(s) pour l'exercice 6

(a) Construire une fonction $\varepsilon \in \mathbf{R}^{[0,1]}$ telle que

- $\varepsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$
- pour tout $x \in [0, 1]$, $f(x) = f'_d(0)x + x\varepsilon(x)$

(b) Démontrer que

$$\forall n \in \mathbf{N}^* \quad \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n^2}\right) - \frac{1}{2} f'_d(0) = \frac{1}{2n} f'_d(0) + \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k \varepsilon\left(\frac{k}{n^2}\right)$$

(c) Fixer $\eta > 0$ et justifier, avec soin, que

$$\exists N_1 \in \mathbf{N}^* \quad \forall n \geq N_1 \quad \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad \left| \varepsilon\left(\frac{k}{n^2}\right) \right| \leq \eta$$

puis que

$$\exists N_2 \in \mathbf{N}^* \quad \forall n \geq N_2 \quad \left| \frac{1}{2n} f'_d(0) \right| \leq \eta$$

(d) En déduire que

$$\exists N \in \mathbf{N}^* \quad \forall n \geq N \quad \left| \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n^2}\right) - \frac{1}{2} f'_d(0) \right| \leq 3\eta$$

minorationNormeInfinieDeriveeSecondeContraintesExtremites [\[énoncé\]](#)**Indication(s) pour l'exercice 7**

- (a) Justifier que $\sup_{x \in [0,1]} \|f''(x)\|$ est bien défini.
(b) En appliquant deux fois la formule de Taylor avec reste sous forme intégrale, démontrer que

$$f(1) = \int_0^1 (1-t) \cdot f''(t) dt \quad \text{et} \quad 0 = f(1) + \int_1^0 (-t) \cdot f''(t) dt$$

- (c) Dédire de (b) que

$$2 \|f(1)\| \leq \left(\int_0^1 |1-2t| dt \right) \sup_{t \in [0,1]} \|f''(t)\|$$

Indication(s) pour l'exercice 8

(a) Démontrer que

$$\forall x \in \mathbf{R} \quad \forall n \in \mathbf{N} \quad f(2^n x) = 2^n f(x)$$

puis

$$\forall x \in \mathbf{R} \quad \forall n \in \mathbf{N} \quad f\left(\frac{x}{2^n}\right) = \frac{1}{2^n} f(x)$$

(b) En déduire que $f(0) = 0$.

(c) Fixer un réel $x \neq 0$. Démontrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad u_n = \frac{f\left(\frac{x}{2^n}\right)}{\frac{x}{2^n}}$$

est constante et qu'elle converge vers $f'(0)$.

sommeSinusInegaliteTaylorLagrangeSommesRiemann [énoncé]

Indication(s) pour l'exercice 91. Étude du comportement asymptotique de la suite de terme général u_n .

(a) Justifier que

$$\forall x \in \mathbf{R}_+ \quad |\sin(x) - x| \leq \frac{x^3}{6}$$

(b) En déduire que

$$u_n - \sum_{k=1}^n \sin\left(\frac{k}{n}\right) \frac{k}{n^2} = \sum_{k=1}^n \sin\left(\frac{k}{n}\right) \sin\left(\frac{k}{n^2}\right) - \sum_{k=1}^n \sin\left(\frac{k}{n}\right) \frac{k}{n^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

(c) Justifier alors que

$$\sum_{k=1}^n \sin\left(\frac{k}{n}\right) \frac{k}{n^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 x \sin(x) \, dx$$

puis calculer l'intégrale.

2. Étude du comportement asymptotique de la suite de terme général v_n .

(a) Déduire de l'inégalité 1.(a) que

$$\forall x \in \mathbf{R}_+ \quad |\sin^2(x) - x^2| \leq \frac{x^4}{3}$$

(b) En déduire que

$$v_n - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+n} = \sum_{k=1}^n \sin^2\left(\frac{1}{\sqrt{k+n}}\right) - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

(c) Justifier alors que

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k+n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ln(2)$$

Indication(s) pour l'exercice 10

1. Introduire

- p la projection orthogonale de E sur $\text{Vect}(u)$;
- $q = p - \text{id}_E$ la projection orthogonale de E sur $\text{Vect}(u)^\perp$;
- l'isomorphisme

$$i \left| \begin{array}{l} \mathbf{R} \longrightarrow \text{Vect}(u) \\ \lambda \longmapsto \lambda \cdot u \end{array} \right.$$

justifier la continuité des applications p, q, i^{-1} , puis exprimer les fonctions α, v à l'aide des applications f, p, q, i^{-1} .

2. Justifier que

$$\forall n \in \mathbf{N}^* \quad \left\langle \frac{(b-a)}{n} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} v\left(a + k \cdot \frac{b-a}{n}\right), u \right\rangle = 0$$

puis que l'application

$$\langle \cdot, u \rangle \left| \begin{array}{l} E \longrightarrow \mathbf{R} \\ x \longmapsto \langle x, u \rangle \end{array} \right.$$

est continue.

3. Observer que

$$\underbrace{\left\| \int_a^b f(t) dt \right\|}_{\in \text{Vect}(u)} \cdot u = \int_a^b f(t) dt = \underbrace{\left(\int_a^b \alpha(t) dt \right)}_{\in \text{Vect}(u)} \cdot u + \underbrace{\int_a^b v(t) dt}_{\in \text{Vect}(u)^\perp}$$

4. Appliquer le théorème de Pythagore, en remarquant que $\|u\| = 1$.

5. (a) D'après Q3 et Q4

$$\int_a^b \underbrace{\|f(t)\| - \alpha(t)}_{\geq 0} dt = 0$$

(b) En déduire

$$\forall t \in [a, b] \quad \alpha(t) = \|f(t)\|$$

(c) D'après le théorème de Pythagore

$$\forall t \in [a, b] \quad \|f(t)\|^2 = \alpha(t)^2 + \|v(t)\|^2$$

(d) Déduire de (b) et (c) le résultat demandé.