

TD – Espaces vectoriels normés 3

Exercice 1 ★☆☆ — On note E l'espace vectoriel des applications continues sur $[0, 1]$ à valeurs dans \mathbf{R} . On pose :

$$\forall f \in E \quad \|f\|_\infty = \sup_{t \in [0,1]} |f(t)| \quad \text{et} \quad \|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt .$$

1. Les normes $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_1$ sont-elles équivalentes ? Justifier.
2. Dans cette question, on munit E de la norme $\|\cdot\|_\infty$.

(a) Soit :

$$u \left| \begin{array}{l} E \longrightarrow \mathbf{R} \\ f \longmapsto f(0) . \end{array} \right.$$

Prouver que u est une application continue sur E .

(b) On pose $F = \{f \in E : f(0) = 0\}$. Prouver que F est une partie fermée de E pour la norme $\|\cdot\|_\infty$.

3. Dans cette question, on munit E de la norme $\|\cdot\|_1$. Soit :

$$c \left| \begin{array}{l} [0, 1] \longrightarrow \mathbf{R} \\ x \longmapsto 1 . \end{array} \right.$$

On pose :

$$\forall n \in \mathbf{N}^* \quad \forall x \in [0, 1] \quad f_n(x) = \begin{cases} nx & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 1 & \text{si } \frac{1}{n} < x \leq 1 . \end{cases}$$

(a) Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Calculer $\|f_n - c\|_1$.

(b) On pose $F = \{f \in E : f(0) = 0\}$. On note \bar{F} l'adhérence de F . Prouver que $c \in \bar{F}$. F est-elle une partie fermée de E pour la norme $\|\cdot\|_1$?

banqueCcinp1

Exercice 2 ★☆☆ — Soient E et F deux espaces vectoriels normés sur le corps \mathbf{R} . On note $\|\cdot\|_E$ (respectivement $\|\cdot\|_F$) la norme sur E (respectivement sur F).

1. Démontrer que si f est une application linéaire de E dans F , alors les propriétés suivantes sont deux à deux équivalentes.

(P1) f est continue sur E .

(P2) f est continue en 0_E .

(P3) $\exists k > 0 \quad \forall x \in E \quad \|f(x)\|_F \leq k \times \|x\|_E$.

2. Soit E l'espace vectoriel des applications continues de $[0; 1]$ dans \mathbf{R} muni de la norme définie par :

$$\forall f \in E \quad \|f\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)| .$$

On considère l'application φ de E dans \mathbf{R} définie par :

$$\forall f \in E \quad \varphi(f) = \int_0^1 f(t) dt .$$

Démontrer que φ est linéaire et continue.

banqueCcinp36

Exercice 3 ★☆☆ — Notons $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbf{R})$. Pour tout $f \in E$, notons $N_\infty(f) = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|$ et $N_1(f) = \int_0^1 |f(x)| dx$.

1. Démontrer succinctement que N_∞ et N_1 sont des normes sur E .
2. Démontrer qu'il existe un réel $k > 0$ tel, que pour tout $f \in E$, $N_1(f) \leq k \times N_\infty(f)$.
3. Démontrer que tout ouvert pour la norme N_1 est un ouvert pour la norme N_∞ .
4. Démontrer que les normes N_∞ et N_1 ne sont pas équivalentes.

banqueCcinp37 [indication(s)]

Exercice 4 ★☆☆ — Les questions 1, 2 et 3 sont indépendantes.

1. On se place sur $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbf{R})$, muni de la norme $\| \cdot \|_1$ définie par :

$$\forall f \in E \quad \|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt .$$

Soit :

$$u \left| \begin{array}{l} E \longrightarrow E \\ f \longmapsto u(f) = g \end{array} \right.$$

où :

$$\forall x \in [0, 1] \quad g(x) = \int_0^x f(t) dt .$$

On admet que u est un endomorphisme de E . Prouver que u est continue et calculer $\|u\|$. On pourra considérer, pour tout entier n non nul, la fonction :

$$f_n \left| \begin{array}{l} [0, 1] \longrightarrow \mathbf{R} \\ t \longmapsto n e^{-nt} . \end{array} \right.$$

2. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Soit $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbf{R}^n$ un n -uplet non nul, fixé. Soit :

$$u \left| \begin{array}{l} \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R} \\ (x_1, x_2, \dots, x_n) \longmapsto \sum_{i=1}^n a_i x_i . \end{array} \right.$$

(a) Justifier que u est continue quel que soit le choix de la norme sur \mathbf{R}^n .

(b) On munit \mathbf{R}^n de $\| \cdot \|_2$ où :

$$\forall x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n \quad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2} .$$

Calculer $\|u\|$.

3. Déterminer un espace vectoriel E , une norme sur E et un endomorphisme de E non continu pour la norme choisie. Justifier.

banqueCcinp38

Exercice 5 ★☆☆ — Soit E l'ensemble des suites à valeurs réelles indexées par \mathbf{N} , qui convergent vers 0.

1. Prouver que E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites à valeurs réelles.

2. On pose :

$$\forall u = (u_n)_{n \in \mathbf{N}} \in E \quad \|u\| = \sup_{n \in \mathbf{N}} |u_n| .$$

(a) Prouver que $\| \cdot \|$ est une norme sur E .

(b) Prouver que, pour tout $u = (u_n)_{n \in \mathbf{N}} \in E$ la série $\sum \frac{u_n}{2^{n+1}}$ converge.

(c) On pose :

$$\forall u = (u_n)_{n \in \mathbf{N}} \in E \quad f(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{2^{n+1}} .$$

Prouver que f est continue sur E .

banqueCcinp54

Exercice 6 ★☆☆ — Munissons $E = \mathbf{R}[X]$ des normes $\| \cdot \|_\infty$ et $\| \cdot \|'_\infty$ définies, pour tout polynôme $P \in \mathbf{R}[X]$ par :

$$\|P\|_\infty = \max_{k \in \mathbf{N}} |[P]_k| \quad \text{et} \quad \|P\|'_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |P(x)| .$$

1. Démontrer que $\| \cdot \|_\infty$ et $\| \cdot \|'_\infty$ sont des normes.

2. Sont-elles équivalentes ?

3. Soit $n \in \mathbf{N}$. Démontrer que les normes induites sur $\mathbf{R}_n[X]$ par $\| \cdot \|_\infty$ et $\| \cdot \|'_\infty$ sont équivalentes.

comparaisonNormesEspacePolynomes1 [indication(s)]

Exercice 7 ★☆☆ — Munissons $E = \mathbf{R}[X]$ des normes $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_1$ définies, pour tout $P \in \mathbf{R}[X]$, par :

$$\|P\|_\infty' = \sup_{x \in [0,1]} |P(x)| \quad \text{et} \quad \|P\|_1' = \int_0^1 |P(x)| dx .$$

1. Vérifier que $\|\cdot\|_1'$ est bien une norme sur $\mathbf{R}[X]$.
2. Les normes $\|\cdot\|_\infty'$ et $\|\cdot\|_1'$ sont-elles équivalentes ?
3. Soit $n \in \mathbf{N}$. Démontrer que les normes induites sur $\mathbf{R}_n[X]$ par $\|\cdot\|_\infty'$ et $\|\cdot\|_1'$ sont équivalentes.

comparaisonNormesEspacePolynomes2 [indication(s)]

Exercice 8 ★☆☆ — Munissons l'espace vectoriel $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbf{R})$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Notons φ la forme linéaire sur E définie par :

$$\varphi \left| \begin{array}{l} E \longrightarrow \mathbf{R} \\ f \longmapsto \varphi(f) = f(1) - f(0) . \end{array} \right.$$

1. Démontrer que φ est continue, puis calculer la norme subordonnée $\|\|\varphi\|\|$.
2. L'application φ est-elle continue, si l'on remplace $\|\cdot\|_\infty$ par $\|\cdot\|_1$?

normeSubordonneeEvaluationFonction

Exercice 9 ★☆☆ — Munissons l'espace vectoriel $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbf{R})$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$ et l'espace vectoriel $F = \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbf{R})$ de la norme $\|\cdot\|_\infty'$ définie par :

$$\forall f \in F, \quad \|f\|_\infty' = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty .$$

1. Vérifier que $\|\cdot\|_\infty'$ est une norme sur F .
2. Démontrer que l'application linéaire φ définie par :

$$\varphi \left| \begin{array}{l} E \longrightarrow \\ f \longmapsto \varphi(f) \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} [0, 1] \longrightarrow F \\ x \longmapsto \int_0^x f(t) dt \end{array} \right| \mathbf{R}$$

est continue, puis calculer la norme subordonnée $\|\|\varphi\|\|$.

normeSubordonneePrimitiveNulleEnZero

Exercice 10 ★☆☆ — On note ℓ^2 l'ensemble des suites $x = (x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de nombres complexes telles que la série $\sum |x_n|^2$ converge.

1. Soient $x = (x_n)_{n \in \mathbf{N}} \in \ell^2$ et $y = (y_n)_{n \in \mathbf{N}} \in \ell^2$. Démontrer que la série $\sum \bar{x}_n y_n$ converge.
2. Démontrer que ℓ^2 est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites complexes $\mathbf{C}^{\mathbf{N}}$.
3. Pour toutes suites $x = (x_n)_{n \in \mathbf{N}} \in \ell^2$ et $y = (y_n)_{n \in \mathbf{N}} \in \ell^2$, on pose :

$$\langle x, y \rangle := \sum_{n=0}^{+\infty} \bar{x}_n y_n \quad \text{et} \quad \|x\|_2 := \sqrt{\langle x, x \rangle} .$$

Démontrer que $\|\cdot\|_2$ est une norme sur ℓ^2 .

4. Fixons un entier $n_0 \in \mathbf{N}$. Démontrer que l'application :

$$\varphi \left| \begin{array}{l} (\ell^2, \|\cdot\|_2) \longrightarrow (\mathbf{C}, |\cdot|) \\ (x_n)_{n \in \mathbf{N}} \longmapsto x_{n_0} \end{array} \right.$$

est une application linéaire continue, puis calculer la norme subordonnée $\|\|\varphi\|\|$.

normeSubordonneeProduitScalaireHermitienEspaceSuites [indication(s)]

Exercice 11 ★☆☆ — Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Notons $\|\|\cdot\|\|$ la norme subordonnée sur $\mathcal{L}_c(E)$. Soient $(u_k)_{k \in \mathbf{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{L}_c(E)$ convergeant vers un endomorphisme continu u de E et $(x_k)_{k \in \mathbf{N}}$ une suite d'éléments de E convergeant vers un vecteur $x \in E$. Démontrer que $u_k(x_k) \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} u(x)$.

doubleLimiteEvaluationEndomorphismeContinu [indication(s)]

Exercice 12 ★★☆☆ — Notons ℓ^∞ le \mathbf{R} -espace vectoriel des suites réelles bornées. Nous le munissons de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Démontrer que l'application :

$$\Delta \left| \begin{array}{l} \ell^\infty \longrightarrow \ell^\infty \\ (u_n)_{n \in \mathbf{N}} \longmapsto (u_{n+1} - u_n)_{n \in \mathbf{N}} \end{array} \right.$$

est un endomorphisme continu, puis calculer sa norme subordonnée $\|\Delta\|$.

normeSubordonneeDerivationDiscreteEspaceSuites [indication(s)]

Exercice 13 ★★☆☆ — Démontrer que l'application :

$$\Delta \left| \begin{array}{l} (\mathcal{C}^1([0, 1], \mathbf{R}), \|\cdot\|_\infty) \longrightarrow (\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbf{R}), \|\cdot\|_\infty) \\ f \longmapsto f' \end{array} \right.$$

est discontinue.

derivationEspaceFonctionsNormeInfinieDiscontinue [indication(s)]

Exercice 14 ★★☆☆ — Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ un \mathbf{K} -espace vectoriel normé tel que $E \neq \{0_E\}$, $(F, \|\cdot\|_F)$ un \mathbf{K} -espace vectoriel normé, $u \in \mathcal{L}_c(E, F)$.

1. Démontrer que :

$$\underbrace{\sup_{x \in \overline{B(0_E, 1)}} \|u(x)\|_F}_{=:\|u\|} = \sup_{x \in B(0_E, 1)} \|u(x)\|_F = \sup_{x \in S(0_E, 1)} \|u(x)\|_F .$$

2. On suppose que E est de dimension finie. Démontrer que :

$$\exists x_0 \in S(0_E, 1) \quad \|u(x_0)\|_F = \|u\| \quad [\text{la norme d'opérateur est atteinte sur la sphère unité}] .$$

3. Dans cette question $(E, \|\cdot\|_E) = (F, \|\cdot\|_F) = (\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbf{R}), \|\cdot\|_1)$ et u est l'endomorphisme de E défini par :

$$u \left| \begin{array}{l} E \longrightarrow \\ f \longmapsto u(f) \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} E \\ [0, 1] \longrightarrow \mathbf{R} \\ x \longmapsto \int_0^x f(t) dt . \end{array} \right.$$

- (a) Démontrer que u est continue.
- (b) Calculer la norme subordonnée $\|u\|$.
- (c) Démontrer que

$$\forall f \in \overline{B(0_E, 1)} \quad \|u(f)\|_1 \neq \|u\| \quad [\text{la norme d'opérateur n'est pas atteinte sur la boule unité fermée}] .$$

proprietesAdditionnellesNormeSubordonnee [indication(s)]