

TD – Espaces vectoriels normés 2

Notation. — La lettre \mathbf{K} désigne le corps \mathbf{R} ou \mathbf{C} .

Exercice 1 ★☆☆ — *L'image réciproque d'un compact par une application continue est-elle nécessairement compacte ?*

imageReciproqueCompactApplicationContinue [indication(s)]

Exercice 2 ★☆☆ — *On munit \mathbf{R}^2 de la norme $\|\cdot\|_\infty$.*

1. *La partie $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^3 = 1\}$ de \mathbf{R}^2 est-elle compacte ?*
2. *La partie $B = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + xy + y^2 \leq 2\}$ de \mathbf{R}^2 est-elle compacte ?*

compactePartiesR2 [indication(s)]

Exercice 3 ★☆☆ — *Soient $(E, \|\cdot\|)$ un \mathbf{K} -espace vectoriel normé et A, B deux parties de E . On pose :*

$$A + B = \{a + b : (a, b) \in A \times B\} .$$

1. *On suppose A et B compactes. Démontrer que $A + B$ est compacte.*
2. *On suppose que A fermée dans E et B compacte. Démontrer que $A + B$ est fermée.*
3. *Si A et B sont fermées dans E , $A + B$ est-elle nécessairement fermée dans E ?*

sommeCompactCompactSommeFerméCompact [indication(s)]

Exercice 4 ★☆☆ — *Soient $(E, \|\cdot\|)$ un \mathbf{K} -espace vectoriel normé, U une partie ouverte de E et x un vecteur de U dont la composante connexe par arcs dans U est notée \mathcal{C}_x .*

1. *Démontrer que \mathcal{C}_x est une partie ouverte de E .*
2. *En déduire que toute partie ouverte de \mathbf{R} est réunion d'intervalles ouverts deux à deux disjoints.*

composantesConnexesOuvertDescriptionOuvertsR [indication(s)]

Exercice 5 ★★☆☆ — *Soit $d \in \mathbf{N}^*$. On considère une suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de vecteurs de $(\mathbf{R}^d, \|\cdot\|_\infty)$, dont l'ensemble des valeurs d'adhérence est noté \mathcal{V} . Pour tout $p \in \mathbf{N}$, on pose :*

$$U_p := \{u_k : k \geq p\} .$$

1. *Démontrer $\mathcal{V} = \bigcap_{p \in \mathbf{N}} \overline{U_p}$.*
2. *En déduire que, si la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est bornée, alors l'ensemble \mathcal{V} de ses valeurs d'adhérence est compact.*

ensembleValeursAdherenceSuiteIntersectionFermes [indication(s)]

Exercice 6 ★★☆☆ — *Soit $(E, \|\cdot\|)$ un \mathbf{K} -espace vectoriel normé non réduit à $\{0_E\}$. On définit le diamètre d'une partie bornée non vide A de E par :*

$$\delta(A) := \sup \{\|x - y\| : (x, y) \in A^2\} .$$

1. *Justifier que, pour toute partie A bornée non vide de E , $\delta(A)$ est un nombre réel bien défini.*
2. *Soit $(a, r) \in E \times \mathbf{R}_+^*$. Démontrer que $\delta(B(a, r)) = 2r$.*
3. *Soit K une partie compacte non vide de E . Démontrer qu'il existe des vecteurs x, y de K tels que $\delta(K) = \|x - y\|$.*
4. *Soit $(K_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de parties compactes non vides de E , décroissante pour l'inclusion. Démontrer que $K := \bigcap_{n \in \mathbf{N}} K_n$ est un compact non vide et que $\delta(K_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \delta(K)$.*
5. *Une intersection de parties fermées non vides, décroissante pour l'inclusion, est-elle nécessairement non vide ?*

diametreIntersectionDecroissanteCompacts [indication(s)]

Exercice 7 ★★☆☆ — Soient $(E, \| \cdot \|)$ un \mathbf{K} -espace vectoriel normé, K une partie compacte de E et $f : K \rightarrow K$ une application telle que :

$$\forall (x_1, x_2) \in K^2 \quad x_1 \neq x_2 \implies \|f(x_1) - f(x_2)\| < \|x_1 - x_2\| .$$

- Démontrer que l'application f possède un unique point fixe, noté α . On pourra considérer l'application qui à un vecteur x de K associe le nombre réel $\|f(x) - x\|$.
- Soit $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ la suite définie par la donnée de $x_0 \in K$ et la relation de récurrence :

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

valable pour tout $n \in \mathbf{N}$. Démontrer que $x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\| \cdot \|} \alpha$.

theoremePointFixeCompactApplicationPresqueContractante [indication(s)]

Exercice 8 ★★☆☆ — Soient $(E, \| \cdot \|)$ un \mathbf{K} -espace vectoriel normé, K une partie compacte de E et $f : K \rightarrow K$ une application telle que :

$$\forall (x, y) \in K^2 \quad \|f(x) - f(y)\| \geq \|x - y\| \quad [f \text{ est une dilatation}] .$$

Soient x, y deux vecteurs de K .

- Démontrer qu'il existe une application $\varphi : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$ strictement croissante telle que les suites $(f^{\varphi(n)}(x))_{n \in \mathbf{N}}$ et $(f^{\varphi(n)}(y))_{n \in \mathbf{N}}$ convergent dans K .
- Démontrer que $f^{\varphi(n+1)-\varphi(n)}(x) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} x$ et $f^{\varphi(n+1)-\varphi(n)}(y) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} y$.
- En déduire que $\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$.
- Démontrer que l'application f est continue et bijective.

dilatationCompactIsometrieBijective [indication(s)]

Exercice 9 ★★☆☆ — Soient E un \mathbf{K} -espace vectoriel normé de dimension finie $n \geq 1$, N une norme sur E , $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et :

$$N_\infty \left| \begin{array}{l} E \longrightarrow \mathbf{R}_+ \\ x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \longmapsto N_\infty(x) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| . \end{array} \right.$$

- Démontrer que :

$$\exists \alpha > 0 \quad \forall x \in E \quad N(x) \leq \alpha N_\infty(x) .$$
- Justifier que $S_\infty(0_E, 1) = \{x \in E : N_\infty(x) = 1\}$ est une partie compacte de (E, N_∞) .
- Démontrer que l'application :

$$f \left| \begin{array}{l} S_\infty(0_E, 1) \longrightarrow \mathbf{R}_+ \\ x \longmapsto N(x) \end{array} \right.$$

admet un minimum m strictement positif.

- En déduire que :

$$\exists \beta > 0 \quad \forall x \in E \quad N_\infty(x) \leq \beta N(x) .$$
- Justifier qu'une partie de E est ouverte pour la norme N si et seulement si elle est ouverte pour la norme N_∞ . Qu'en déduire de plus ?

normesEquivalentesEspaceVectorielDimensionFinie

Exercice 10 ★★★ — Soit $P \in \mathbf{C}[X]$ un polynôme de degré $n \geq 1$. On se propose de démontrer que P possède une racine complexe (théorème de d'Alembert-Gauß).

- Démontrer qu'il existe $z_0 \in \mathbf{C}$ tel que :

$$|P(z_0)| = \min \{|P(z)| : z \in \mathbf{C}\} .$$

2. D'après la formule de Taylor exacte, appliquée au polynôme P au point z_0 , nous savons :

$$\forall z \in \mathbf{C} \quad P(z_0 + z) = \sum_{k=0}^n b_k z^k$$

où, pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $b_k = \frac{P^{(k)}(z_0)}{k!}$. Nous raisonnons par l'absurde et supposons que $b_0 \neq 0$.

(a) Justifier l'existence de $\ell := \min \{k \in \llbracket 1, n \rrbracket : b_k \neq 0\}$.

(b) Soit $\omega \in \mathbf{C}$ une racine k -ième de $-\frac{b_0}{b_k}$. Justifier l'existence d'une fonction $\varepsilon \in \mathbf{C}^{[0,1]}$ telle que :

$$\forall t \in [0, 1] \quad P(z_0 + \omega t) = b_0 - b_0 t^k + b_0 t^k \varepsilon(t) \quad \text{et} \quad \varepsilon(t) \xrightarrow[t \rightarrow 0^+]{\quad} 0.$$

(c) En déduire qu'il existe $\alpha \in]0, 1[$ tel que, $|P(z_0 + \omega \alpha)| < |P(z_0)|$ et conclure.

theoremedAlembertGaussTopologie

Exercice 11 ★★★ — Soient $(E, \|\cdot\|)$ un \mathbf{K} -espace vectoriel normé.

1. Soit $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite d'éléments de E pour laquelle il existe un réel $\varepsilon > 0$ tel que pour tous entiers naturels $n \neq p$, on ait $\|x_n - x_p\| \geq \varepsilon$. Démontrer que cette suite n'admet aucune suite extraite convergente.

2. Soit K un sous-ensemble compact de E . Démontrer que pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un entier $p > 0$ et x_1, \dots, x_p éléments de E tels que $K \subseteq \bigcup_{i=1}^p B(x_i, \varepsilon)$. On pourra raisonner par l'absurde.

3. On considère une famille $(\Omega_i)_{i \in I}$ de sous-ensembles ouverts de E , I étant un ensemble quelconque, telle que $K \subseteq \bigcup_{i \in I} \Omega_i$.

(a) Démontrer qu'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in K$, il existe $i \in I$ tel que $B(x, \alpha)$ soit contenue dans l'ouvert Ω_i . On pourra raisonner par l'absurde pour construire une suite d'éléments de K n'ayant aucune suite extraite convergente.

(b) En déduire qu'il existe une sous-famille finie $(\Omega_{i_1}, \dots, \Omega_{i_p})$ de la famille $(\Omega_i)_{i \in I}$ telle que $K \subseteq \bigcup_{k=1}^p \Omega_{i_k}$ (propriété de Borel-Lebesgue).

4. Soit $(F_i)_{i \in I}$ une famille de fermés de E contenus dans K et d'intersection vide, i.e. $\bigcap_{i \in I} F_i = \emptyset$. Démontrer qu'il existe une sous

famille finie $(F_{i_1}, \dots, F_{i_p})$ de la famille $(F_i)_{i \in I}$ telle que $\bigcap_{k=1}^p F_{i_k} = \emptyset$.

proprieteBorelLebesgueMinesPonts2Mp2017 [corrigé]

imageReciproqueCompactApplicationContinue [\[énoncé\]](#)

Indication(s) pour l'exercice 1

On peut commencer par envisager une application continue $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$. D'après le cours :

- une partie de \mathbf{R} est compacte si et seulement si elle est fermée et bornée ;
- l'image réciproque d'un fermé de \mathbf{R} par f est un fermé de \mathbf{R} .

Aussi nous intéressons-nous à la question suivante : l'image réciproque d'une partie bornée de \mathbf{R} par f est-elle nécessairement une partie bornée de \mathbf{R} ? On pourra, par exemple, spécifier f à la fonction arctangente.

Indication(s) pour l'exercice 2

D'après le cours, une partie de $(\mathbf{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$ est compacte si et seulement si elle est fermée et bornée.

1. La partie A n'est pas bornée. Pour le justifier, on peut construire une suite $((x_n, y_n))_{n \in \mathbf{N}}$ de vecteurs de A telle que

$$x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{|\cdot|} +\infty \quad \text{et} \quad y_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{|\cdot|} -\infty$$

2. Démontrer que la partie B de $(\mathbf{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$ est fermée et bornée.

- La partie B est bornée. En remarquant que

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2 \quad |xy| \leq \frac{1}{2} (x^2 + y^2)$$

on établit que B est bornée pour la norme $\|\cdot\|_2$. De plus nous savons comparer les normes $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sur \mathbf{R}^2 .

- La partie B est fermée. Pour démontrer le caractère fermé de B , on peut considérer l'application

$$f \left| \begin{array}{l} \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R} \\ (x, y) \longmapsto x^2 + xy + y^2 \end{array} \right.$$

qui est polynomiale.

Indication(s) pour l'exercice 3

1. L'application

$$f \begin{cases} A \times B & \longrightarrow A+B \\ (a, b) & \longmapsto a+b \end{cases}$$

est surjective.

2. Considérer une suite $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de vecteurs de $A+B$ qui converge vers un vecteur x de E . Alors :

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad \exists (a_n, b_n) \in A \times B \quad x_n = a_n + b_n$$

Comme B est compacte, la suite $(b_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de vecteurs de B possède une valeur d'adhérence $b \in B$.

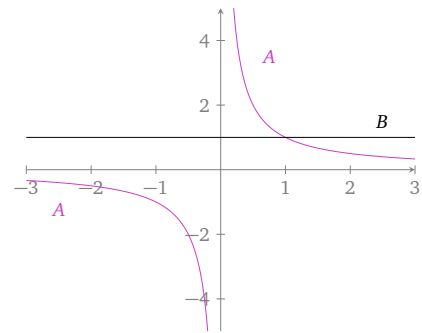
3. Dans $(\mathbf{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$, on peut considérer

- la parabole $A := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : xy = 1\}$
- la droite affine $B := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : y = 1\}$.

et démontrer que

$$\begin{aligned} A+B &= \left\{ \left(x_1 + x_2, \frac{1}{x_1} + 1 \right) : (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^* \times \mathbf{R} \right\} \\ &= \mathbf{R} \times (\mathbf{R} \setminus \{1\}) \quad [\text{égalité d'ensembles à prouver}] \end{aligned}$$

n'est pas une partie fermée de $(\mathbf{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$.



composantesConnexesOuvertDescriptionOuvertsR [énoncé]

Indication(s) pour l'exercice 4

1. On rappelle que \mathcal{C}_x est, par définition, l'ensemble des vecteurs y de U pour lesquels il existe un chemin joignant x à y tracé dans U . Soit $y \in \mathcal{C}_x$. Comme U est une partie ouverte de E , il existe un réel $r_y > 0$ tel que $B(y, r_y) \subset U$. Démontrer que $B(y, r_y) \subset \mathcal{C}_x$, en commençant par construire, pour tout vecteur $z \in B(y, r_y)$, un chemin joignant z à y tracé dans U .
2. Soit U un ouvert de \mathbf{R} . D'après le cours
 - U est la réunion de ses composantes connexes par arcs, qui sont deux à deux disjointes ;
 - une partie de \mathbf{R} est connexe par arcs si et seulement si elle est un intervalle.

ensemble Valeurs Adherence Suite Intersection Fermes [énoncé]

Indication(s) pour l'exercice 5

1. Raisonner par double inclusion, en s'appuyant tant la caractérisation géométrique (i.e. via les boules) d'une valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$

$$\forall x \in \mathbf{R}^d \quad x \in \mathcal{V} \iff (\forall \varepsilon > 0 \quad \{n \in \mathbf{N} : u_n \in B_\infty(x, \varepsilon)\} \text{ est une partie infinie de } \mathbf{N})$$

que sur la caractérisation géométrique de l'adhérence d'une partie A de $(\mathbf{R}^d, \|\cdot\|_\infty)$

$$\forall x \in \mathbf{R}^d \quad x \in \bar{A} \iff (\forall \varepsilon > 0 \quad A \cap B_\infty(x, \varepsilon) \neq \emptyset)$$

- *Inclusion de \mathcal{V} dans $\bigcap_{p \in \mathbf{N}} \bar{U}_p$.* Soit x une valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et $p \in \mathbf{N}^*$. Justifier que, pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble

$$U_p \cap B(x, \varepsilon)$$

est non vide.

- *Inclusion de $\bigcap_{p \in \mathbf{N}} \bar{U}_p$ dans \mathcal{V} .* Soit $x \in \bigcap_{p \in \mathbf{N}} \bar{U}_p$. En raisonnant par l'absurde, justifier que, pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble

$$\{n \in \mathbf{N} : u_n \in B_\infty(x, \varepsilon)\}$$

est une partie infinie de \mathbf{N} .

2. D'après le cours, une partie de $(\mathbf{R}^d, \|\cdot\|_\infty)$ est compacte si et seulement si elle est fermée et bornée.

Indication(s) pour l'exercice 6

1. Soit A une partie bornée non vide de E . Comme A est bornée, il existe un réel $R > 0$ tel que $A \subset \overline{B(0, R)}$. Justifier alors que la partie $\{\|x - y\| : (x, y) \in A^2\}$ de \mathbf{R} est non vide et majorée par $2R$.

2. • Commencer par justifier que $\delta(B(a, r)) \leq 2r$.
 • Pour établir l'inégalité inverse, remarquer que le \mathbf{K} -espace vectoriel $E \neq \{0_E\}$ contient un vecteur unitaire noté u . Ensuite, en prenant appui sur une figure, construire une suite $(\lambda_n)_{n \in \mathbf{N}} \in [0 + \infty[^\mathbf{N}$ telle que, pour tout $n \in \mathbf{N}$

$$x_n := a - \lambda_n u \quad \text{et} \quad y_n := a + \lambda_n u$$

appartiennent à $B(a, r)$ et vérifient $\|x_n - y_n\| \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{|\cdot|} 2r$.

3. D'après la caractérisation séquentielle de la borne supérieure, il existe une suite $(x_n, y_n) \in (\mathbf{K} \times \mathbf{K})^\mathbf{N}$ telle que $\|x_n - y_n\| \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{|\cdot|} \delta(K)$. La partie $K \times K$ est une partie compacte de $E \times E$, muni de la norme produit.

4. • La partie K est non vide. Construire une suite $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de vecteurs de E telle que

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad x_n \in K_n$$

Justifier que la suite $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ possède une valeur d'adhérence x dans K_0 . Démontrer enfin que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $x \in K_n$.

- La partie K est fermée. D'après le cours, une intersection quelconque de parties fermées de E est une partie fermée de E .
- La partie K est compacte. D'après le cours une partie fermée d'un compact est compacte.
- Comportement asymptotique de la suite de terme général $\delta(K_n)$. Commencer par démontrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$

$$\delta(K) \leq \delta(K_n) \leq \delta(K_{n+1})$$

En déduire que la suite numérique de terme général $\delta(K_n)$ converge vers un réel $\ell \geq \delta(K)$. D'après la question 3, pour tout $n \in \mathbf{N}$, il existe $(x_n, y_n) \in K_n^2$ tel que $\delta(K_n) = \|x_n - y_n\|$. Justifier l'existence d'une application $\varphi : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$ strictement croissante et de deux vecteurs x, y de K_0 tels que

$$x_{\varphi(n)} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\|\cdot\|} x \quad \text{et} \quad y_{\varphi(n)} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\|\cdot\|} y$$

Démontrer les vecteurs x, y appartiennent à K , puis que $\ell \leq \delta(K)$.

5. La suite $(F_n := [n, +\infty[)^\mathbf{N}$ est une suite parties fermées non vides de \mathbf{R} , décroissante pour l'inclusion.

theoremePointFixeCompactApplicationPresqueContractante [énoncé]

Indication(s) pour l'exercice 7

- *Unicité du point fixe.* Raisonner par l'absurde en supposant que l'application f possède deux points fixes distincts $\alpha_1, \alpha_2 \in K$.
 - *Existence du point fixe.* Appliquer le théorème des bornes atteintes à l'application

$$f \left| \begin{array}{l} K \longrightarrow \mathbf{R} \\ x \longmapsto \|f(x) - x\| \end{array} \right.$$

pour obtenir que l'application f possède un minimum atteint en un vecteur x_m de K . Démontrer alors que x_m est un point fixe de l'application f , en raisonnant par l'absurde.

- *Convergence de la suite de terme général $\|x_n - \alpha\|$.* Étudier le sens de variation de la suite numérique $(\|x_n - \alpha\|)_{n \in \mathbf{N}}$ pour établir sa convergence.
 - *Extraction d'une sous-suite convergente de la suite $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$.* Justifier l'existence d'une application $\varphi : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$ strictement croissante et d'un vecteur x de K tel que $x_{\varphi(n)} \xrightarrow{\|\cdot\|} x$.
 - *Introduction d'une autre suite extraite de la suite $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$.* Justifier

$$\|x_{\varphi(n)+1} - \alpha\| \xrightarrow{\|\cdot\|} \|f(x) - f(\alpha)\|$$

- *Conclusion.* Des trois points précédents, déduire que $\|x - \alpha\| = \|f(x) - f(\alpha)\|$, puis $x = \alpha$ en raisonnant par l'absurde.

Indication(s) pour l'exercice 8

1. Considérer les suites $(f^n(x))_{n \in \mathbf{N}}$ et $(f^n(y))_{n \in \mathbf{N}}$ de vecteurs de K . La partie $K \times K$ est une partie compacte de $E \times E$, muni de la norme produit.
2. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$

$$\|f^{\varphi(n+1)-\varphi(n)}(x) - x\| \leq \|f^{\varphi(n+1)}(x) - f^{\varphi(n)}(x)\|$$

puis que $\|f^{\varphi(n+1)}(x) - f^{\varphi(n)}(x)\| \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{|\cdot|} 0$.

3. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$

$$\|x - y\| \leq \|f(x) - f(y)\| \leq \|f^{\varphi(n+1)-\varphi(n)}(x) - f^{\varphi(n+1)-\varphi(n)}(y)\|$$

4.
 - *Continuité de l'application f* . D'après le cours, une application lipschitienne est (uniformément) continue.
 - *Injectivité de l'application f* . Considérer la propriété de dilatation.
 - *Surjectivité de l'application f* . Soit $x \in E$. D'après la question 2, x est limite d'une suite de vecteurs de $f(E)$. L'image d'un compact par une application continue est compacte donc fermée.

Un corrigé de l'exercice 11

1. Par l'absurde, on suppose qu'il existe une suite extraite $(x_{\varphi(n)})$ convergente. La suite $(x_{\varphi(n+1)} - x_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ converge donc vers 0. Ceci nous fournit $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p \geq N$, on ait $\|x_{\varphi(p+1)} - x_{\varphi(p)}\| \geq \varepsilon$. Contradiction.
2. Par l'absurde, on suppose que la propriété à démontrer est fautive, ceci nous fournit $\varepsilon > 0$, tel que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ et x_1, \dots, x_p éléments de E on ait $K \not\subseteq \bigcup_{i=1}^p B(x_i, \varepsilon)$. On va construire, par récurrence, une suite $(x_k)_{k \geq 1}$ à valeurs dans K telle que pour tout entier naturel $n \neq p$, on ait $\|x_p - x_n\| \geq \varepsilon$.

- Par hypothèse, on a $K \not\subseteq B(a_1, \varepsilon)$ pour tout $a_1 \in E$, ce qui nous fournit $x_1 \in K \setminus B(a_1, \varepsilon)$.
- Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On suppose construits $x_1, \dots, x_k \in K$ tel que pour tout entier naturel $n \neq p \in \llbracket 1, k \rrbracket$, on ait $\|x_p - x_n\| \geq \varepsilon$. On a alors $K \setminus \bigcup_{i=1}^k B(x_i, \varepsilon) \neq \emptyset$, ce qui nous fournit $x_{k+1} \in K$ tel que pour tout entiers naturels $n \neq p \in \llbracket 1, k+1 \rrbracket$, on ait $\|x_p - x_n\| \geq \varepsilon$.

La suite ainsi construite $(x_k)_{k \geq 1}$ vérifie pour tout entiers naturels $n \neq p$, on a $\|x_p - x_n\| \geq \varepsilon$. D'après la question 1, cette suite n'admet pas de valeur d'adhérence. Or il s'agit d'une suite à valeurs dans le compact K . Contradiction.

3. (a) Par l'absurde, on suppose que pour tout réel $\alpha > 0$, il existe $x \in K$, tel que pour tout $i \in I$, on ait $B(x, \alpha) \not\subseteq \Omega_i$. Ainsi pour $n \in \mathbb{N}^*$, ceci nous fournit $x_n \in K$ tel que pour tout $i \in I$, on ait $B(x_n, \frac{1}{n}) \not\subseteq \Omega_i$. La suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ à valeurs dans le compact K admet une suite extraite $(x_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}^*}$ qui converge vers une valeur d'adhérence $\ell \in K$. Comme $K \subseteq \bigcup_{i \in I} \Omega_i$, ceci nous fournit $j \in I$ tel que $\ell \in \Omega_j$. Comme Ω_j est un ouvert, ceci nous fournit $r > 0$ tel que $B(\ell, r) \subset \Omega_j$. Comme $(x_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers ℓ , ceci nous fournit $N_1 \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\forall n \geq N_1 \quad \|x_{\varphi(n)} - \ell\| \leq \frac{r}{3}$$

Comme $\left(\frac{1}{\varphi(n)}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0, ceci nous fournit $N_2 \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\forall n \geq N_2 \quad \frac{1}{\varphi(n)} \leq \frac{r}{3}$$

On pose $p = \max\{\varphi(N_1), \varphi(N_2)\}$. Comme $\frac{2r}{3} < r$, on a d'après l'inégalité triangulaire

$$B\left(x_p, \frac{1}{p}\right) \subset B(\ell, r)$$

d'après l'inégalité triangulaire. Contradiction avec la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

- (b) À la question 2, on pouvait obtenir de façon analogue l'existence d'un entier $p > 0$ et x_1, \dots, x_p éléments de K (preuve identique que pour E) tels que $K \not\subseteq \bigcup_{j=1}^p B(x_j, \varepsilon)$. Pour $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$, ce qui est fait à la question 3.(a), nous fournit un indice $i_j \in I$ tel que $B(x_j, \varepsilon) \not\subseteq \Omega_{i_j}$.
4. On note pour $i \in I$, $O_i = E \setminus F_i$ qui est un ouvert de E par complémentaire et on a $K \subseteq \bigcup_{i \in I} O_i$. La question 3.(b) nous fournit une sous famille finie $(O_{i_1}, \dots, O_{i_p})$ telle que $K \subseteq \bigcap_{k=1}^p O_{i_k}$. On a donc $K \cap \left(\bigcap_{k=1}^p F_{i_k}\right) = \emptyset$. Comme pour tout $i \in I$, on a $F_i \subset K$, la sous famille finie $(F_{i_1}, \dots, F_{i_p})$ vérifie $\bigcap_{k=1}^p F_{i_k} = \emptyset$.