

TD – Équations différentielles linéaires

Exercice de la banque CCINP n°32. — Soit l'équation différentielle :

$$(\mathcal{E}) \quad x(x-1)y'' + 3xy' + y = 0.$$

1. Trouver les solutions de cette équation différentielle développables en série entière sur un intervalle $]-r, r[$ de \mathbf{R} , avec $r > 0$. Déterminer la somme des séries entières obtenues.
2. Est-ce que toutes les solutions de (\mathcal{E}) sur $]0, 1[$ sont les restrictions d'une fonction développable en série entière sur $]-1, 1[$?

Exercice de la banque CCINP n°42. — On considère les deux équations différentielles suivantes :

$$(\mathcal{E}\mathcal{H}) \quad 2xy' - 3y = 0 \quad \text{et} \quad (\mathcal{E}) \quad 2xy' - 3y = \sqrt{x}.$$

1. Résoudre l'équation $(\mathcal{E}\mathcal{H})$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
2. Résoudre l'équation (\mathcal{E}) sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
3. L'équation (\mathcal{E}) admet-elle des solutions sur l'intervalle $[0, +\infty[$?

Exercice de la banque CCINP n°74. — On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Justifier que A est diagonalisable.
2. Déterminer les valeurs propres de A puis une base de vecteurs propres associés.
3. On considère le système différentiel :

$$\begin{cases} x' &= x + 2z \\ y' &= y \\ z' &= 2x + z \end{cases}$$

où x, y, z désignant trois fonctions de la variable t , dérivables sur \mathbf{R} . En utilisant la question 2 et en le justifiant, résoudre ce système.

Exercice de la banque CCINP n°75. — On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Démontrer que A n'est pas diagonalisable.
2. On note f l'endomorphisme de \mathbf{R}^2 canoniquement associé à A . Trouver une base (v_1, v_2) de \mathbf{R}^2 dans laquelle la matrice de f est de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$. On donnera explicitement les valeurs de a, b et c .
3. En déduire la résolution du système différentiel :

$$\begin{cases} x' &= -x - 4y \\ y' &= x + 3y. \end{cases}$$

Exercice 1 ★☆☆ — Résoudre sur $]1, +\infty[$ l'équation différentielle :

$$(\mathcal{E}) \quad y' + \frac{x}{x^2-1}y = 2x.$$

edlsOrdre1

Exercice 2 ★★☆☆ — Résoudre sur \mathbf{R} l'équation différentielle :

$$(\mathcal{E}) \quad t^2 y' - y = 0.$$

raccordementEdlsOrdre1Homogene

Exercice 3 ★★★ — Résoudre sur \mathbf{R} l'équation différentielle :

$$(\mathcal{E}) \quad (1-t)y' - y = t.$$

raccordementEdlsOrdre1

Exercice 4 ★★★ — Soit $a \in \mathcal{C}^0(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ une fonction intégrable sur \mathbf{R} . Démontrer que toutes les solutions de l'équation différentielle :

$$(\mathcal{E}) \quad y'(t) + a(t)y(t) = 0$$

sont bornées.

edlsOrdre1HomogeneUniqueSolutionsToutesBornees

Exercice 5 ★★★ — Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ telle que $f(x) + f'(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$. Démontrer que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.

edlsOrdre1MasqueeLimiteNulleEnInfini [corrigé]

Exercice 6 ★★★ — Soient $a \in \mathcal{C}^0(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ une fonction impaire et $b \in \mathcal{C}^0(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ une fonction paire. Démontrer que l'équation différentielle :

$$(\mathcal{E}) \quad y'(t) + a(t)y(t) = b(t)$$

possède une unique solution impaire.

edlsOrdre1UniqueSolutionImpaire

Exercice 7 ★☆☆ — Résoudre sur \mathbf{R} le système différentiel :

$$(\mathcal{S} \mathcal{H}) \quad \begin{cases} x' = 4x - 2y \\ y' = x + y. \end{cases}$$

sd1Ordre1CoefficientsConstantsHomogeneDiagonalisableFormat2

Exercice 8 ★☆☆ — Résoudre sur \mathbf{R} le système différentiel :

$$(\mathcal{S} \mathcal{H}) \quad \begin{cases} x' = y + z \\ y' = x \\ z' = x + y + z. \end{cases}$$

sd1Ordre1CoefficientsConstantsHomogeneDiagonalisableFormat3

Exercice 9 ★☆☆ — Résoudre sur \mathbf{R} le système différentiel :

$$(\mathcal{S}) \quad \begin{cases} x' = -x + 3y + e^t \\ y' = -2x + 4y. \end{cases}$$

sd1Ordre1CoefficientsConstantsDiagonalisableFormat2

Exercice 10 ★★★ — Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbf{C})$. Démontrer que toutes les solutions du système différentiel :

$$(\mathcal{S} \mathcal{H}) \quad X' = AX$$

tendent vers 0 en $+\infty$ si et seulement si les valeurs propres complexes de A ont des parties réelles strictement négatives.

sd1Ordre1CoefficientsConstantsComplexesHomogeneLimiteNulleEnInfini

Exercice 11 ★★★ — Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. On considère le système différentiel :

$$(\mathcal{S} \mathcal{H}) \quad X' = AX.$$

Démontrer que toutes les solutions de (\mathcal{S}) sont polynomiales si et seulement si la matrice A est nilpotente.

sdlOrdre1CoefficientsConstantsHomogeneToutesSolutionsPolynomiales

Exercice 12 ★★☆☆ — Considérons le système différentiel :

$$(\mathcal{S} \mathcal{H}) \quad \begin{cases} x' = y - z \\ y' = z - x \\ z' = x - y. \end{cases}$$

On cherche les solutions $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R}, \mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{R}))$ vérifiant en outre la condition $x(0) = 1$, $y(0) = 0$ et $z(0) = 0$.

1. Discuter l'existence et l'unicité de la solution.
2. Démontrer que la trajectoire de la solution est contenue dans l'intersection d'une sphère S et d'un plan P . Reconnaître $S \cap P$.
3. Résoudre le système différentiel (\mathcal{S}) , puis retrouver le résultat de la question précédente.

sdlOrdre1CoefficientsConstantsDiagonalisableComplexeFormat3Geometrie

Exercice 13 ★☆☆ — Déterminer les solutions développables en série entière au voisinage de 0 de l'équation différentielle :

$$(\mathcal{E}) \quad 4x y'' + 6y' + y = 0.$$

rechercheSolutionsDseEdlsOrdre2Homogene

Exercice 14 ★★☆☆ — Résoudre sur \mathbf{R} l'équation différentielle

$$(\mathcal{E}) \quad (t^2 + 1)x'' - 2x = t.$$

On pourra commencer par rechercher une fonction polynomiale solution de l'équation différentielle homogène associée à (\mathcal{E}) .

edlsOrdre2SolutionPolynomiale

Exercice 15 ★★☆☆ — Soit $p: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}_+$ une fonction continue, non identiquement nulle. On souhaite démontrer que toutes les solutions de l'équation différentielle :

$$(\mathcal{E}) \quad y'' + p(x)y = 0$$

s'annulent. Pour cela, on raisonne par l'absurde et on considère une solution f de (\mathcal{E}) , qui ne s'annule pas.

1. Justifier que la fonction f est de signe constant. Quitte à changer f en $-f$, nous pouvons supposer que $f > 0$ dans la suite.
2. Soit a un réel quelconque. Justifier que la courbe représentative de f est en dessous de sa tangente au point de coordonnées $(a, f(a))$.
3. En déduire que $f'(a) = 0$.
4. Conclure.

edlsOrdre2HomogeneTouteSolutionAnnulation

Exercice 16 ★★★ —

1. Résoudre sur
- \mathbf{R}
- l'équation différentielle

$$(\mathcal{E}) \quad y'' + 4y = 0.$$

2. Soit
- $g \in \mathcal{C}^2(\mathbf{R}, \mathbf{R})$
- . On introduit la fonction
- h
- définie par :

$$h \left| \begin{array}{l} \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} \\ x \longmapsto \frac{1}{2} \int_0^x g(t) \sin(2x - 2t) dt . \end{array} \right.$$

Démontrer que la fonction h est solution de l'équation différentielle :

$$(\mathcal{E}) \quad y'' + 4y = g$$

puis résoudre (\mathcal{E}) .

3. Soit
- $f \in \mathcal{C}^2(\mathbf{R}, \mathbf{R})$
- telle que
- $f'' + 4f \geq 0$
- . Démontrer que, pour tout
- $x \in \mathbf{R}$
- ,
- $f(x) + f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \geq 0$
- .

edlsOrdre2CoefficientsConstantsSolutionParticuliereFormeIntegraleEtudeQualitative1

Exercice 17 ★★★ — Soit $q \in \mathcal{C}^0(\mathbf{R}, \mathbf{R})$. On considère l'équation différentielle :

$$(\mathcal{E}) \quad y'' + y = q.$$

- Déterminer les solutions de (\mathcal{E}) sur \mathbf{R} .
- Soit f une solution de (\mathcal{E}) sur \mathbf{R} telle que, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f''(x) + f(x) \geq 0$. Démontrer que :

$$\forall x \in \mathbf{R} \quad f(x) + f(x + \pi) \geq 0.$$

3. Soit
- f
- une solution de
- (\mathcal{E})
- sur
- \mathbf{R}
- telle que, il existe
- $a \in \mathbf{R}$
- tel que
- $f(a) + f(a + \pi) = 0$
- . Démontrer que
- $f \in \text{Vect}(\cos, \sin)$
- .

edlsOrdre2CoefficientsConstantsSolutionParticuliereFormeIntegraleEtudeQualitative2

Exercice 18 ★★☆☆ — On considère l'équation différentielle

$$(\mathcal{E}) \quad x''' - 4x'' + 5x' - 2x = 0.$$

1. Déterminer une matrice
- $A \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$
- telle que, pour toute fonction
- $x \in \mathcal{C}^3(\mathbf{R}, \mathbf{R})$
- ,
- x
- est solution de
- (\mathcal{E})
- si et seulement si la fonction
- $\begin{pmatrix} x \\ x' \\ x'' \end{pmatrix} \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R}, \mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{R}))$
- est solution du système différentiel :

$$(\mathcal{S}) \quad X' = AX.$$

2. Trigonaliser
- A
- sur
- \mathbf{R}
- , puis résoudre
- (\mathcal{E})
- .

edlsOrdre3CoefficientsConstantsHomogeneTrigonalisable

Un corrigé de l'exercice 5

(a) Expression de f en fonction de $f + f'$. — Soit g la fonction continue et de limite 0 en $+\infty$ définie par :

$$g \left| \begin{array}{l} \mathbf{R} \longrightarrow \\ x \longmapsto \end{array} \right. \begin{array}{l} \mathbf{R} \\ f(x) + f'(x) \end{array}$$

La fonction f est solution de l'EDLS1 :

$$(\mathcal{E}) \quad y' + y = g(x) \quad , \quad \text{d'inconnue } y \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R}, \mathbf{R}).$$

L'EDLS1 homogène associée à (\mathcal{E}) est :

$$(\mathcal{E}\mathcal{H}) \quad y' + y = 0 \quad , \quad \text{d'inconnue } y \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R}, \mathbf{R}).$$

Nous calculons :

$$\text{Sol}(\mathcal{E}\mathcal{H}) = \text{Vect} \left(y_h \left| \begin{array}{l} \mathbf{R} \longrightarrow \\ x \longmapsto \end{array} \right. \begin{array}{l} \mathbf{R} \\ e^{-x} \end{array} \right)$$

Si $k \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R}, \mathbf{R})$, alors la fonction $k y_h$ est solution de (\mathcal{E}) si et seulement si :

$$\forall x \in \mathbf{R} \quad k'(x) = e^x g(x).$$

Nous en déduisons, grâce au théorème fondamental de l'analyse, que la fonction y_p définie par :

$$y_p \left| \begin{array}{l} \mathbf{R} \longrightarrow \\ x \longmapsto \end{array} \right. \begin{array}{l} \mathbf{R} \\ e^{-x} \int_0^x e^u g(u) du \end{array}$$

est solution de (\mathcal{E}) . Par suite :

$$\text{Sol}(\mathcal{E}) = y_p + \text{Vect} \left(y_h \left| \begin{array}{l} \mathbf{R} \longrightarrow \\ x \longmapsto \end{array} \right. \begin{array}{l} \mathbf{R} \\ e^{-x} \end{array} \right).$$

Cette étude nous livre :

$$(\star) \quad \exists k \in \mathbf{R} \quad f(x) = k e^{-x} + \underbrace{e^{-x} \int_0^x e^u g(u) du}_{y_p(x)}.$$

(b) Réduction de l'étude. — D'après (\star) , il suffit de démontrer que $y_p(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ pour établir que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.

(c) Conclusion à l'aide d'un découpage « à la Cesàro ». — Soit $\varepsilon > 0$. Comme $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$:

$$\exists A_1 > 0 \quad \forall u \geq A_1 \quad |g(u)| \leq \varepsilon.$$

Soit $x \geq A_1$.

$$\begin{aligned} |y_p(x)| &\leq e^{-x} \int_0^{A_1} e^u |g(u)| du + e^{-x} \int_{A_1}^x e^u |g(u)| du && \text{[inégalité triangulaire et relation de Chasles]} \\ &\leq e^{-x} \int_0^{A_1} e^u |g(u)| du + \varepsilon e^{-x} \int_{A_1}^x e^u du \\ &\leq e^{-x} \int_0^{A_1} e^u |g(u)| du + \varepsilon \left[\text{car } e^{-x} \int_{A_1}^x e^u du = 1 - e^{A_1-x} \leq 1 \right] \end{aligned}$$

Comme $e^{-x} \underbrace{\int_0^{A_1} e^u |g(u)| du}_{\text{constante}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$:

$$\exists A_2 > 0 \quad \forall x \geq A_2 \quad \left| e^{-x} \int_0^{A_1} e^u |g(u)| du \right| \leq \varepsilon.$$

Nous en déduisons que :

$$\forall x \geq \max\{A_1, A_2\} \quad |y_p(x)| \leq 2\varepsilon.$$