

TD – Endomorphismes remarquables des espaces euclidiens

Exercice de la banque CCINP n°63. — Soit E un espace euclidien muni d'un produit scalaire noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$. On pose, pour tout $x \in E$, $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$. Pour tout endomorphisme u de E , on note u^* l'adjoint de u .

1. Un endomorphisme u de E vérifiant, pour tout $x \in E$, $\langle u(x), x \rangle = 0$ est-il nécessairement l'endomorphisme nul ?
2. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Prouver que les trois assertions suivantes sont équivalentes.
 - i. $u \circ u^* = u^* \circ u$
 - ii. Pour tout $(x, y) \in E^2$, $\langle u(x), u(y) \rangle = \langle u^*(x), u^*(y) \rangle$.
 - iii. Pour tout $x \in E$, $\|u(x)\| = \|u^*(x)\|$.

Exercice de la banque CCINP n°66. —

1. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbf{R})$. Prouver que si $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbf{R})$ alors $\text{Spec}(A) \subset [0, +\infty[$.
2. Prouver que, pour tout $A \in \mathcal{S}_n(\mathbf{R})$, $A^2 \in \mathcal{S}_n^+(\mathbf{R})$.
3. Prouver que, pour tout $A \in \mathcal{S}_n(\mathbf{R})$, pour tout $B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbf{R})$:

$$AB = BA \implies A^2 B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbf{R}).$$

4. Soit $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbf{R})$. Prouver qu'il existe $B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbf{R})$ telle que $A = B^2$.

Exercice de la banque CCINP n°68. — Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Démontrer que A est diagonalisable de quatre manières.
 - (a) sans calcul;
 - (b) en calculant directement le déterminant $\det(\lambda I_3 - A)$, où I_3 est la matrice identité d'ordre 3, et en déterminant les sous-espaces propres;
 - (c) en utilisant le rang de la matrice;
 - (d) en calculant A^2 .
2. On suppose que A est la matrice d'un endomorphisme u d'un espace euclidien dans une base orthonormée. Trouver une base orthonormée dans laquelle la matrice de u est diagonale.

Exercice de la banque CCINP n°78. — Soit E un espace euclidien de dimension n et u un endomorphisme de E . On note $\langle x, y \rangle$ le produit scalaire de $x \in E$, $y \in E$ et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée.

1. Soit u un endomorphisme de E tel que, pour tout $x \in E$, $\|u(x)\| = \|x\|$.
 - (a) Démontrer que, pour tout $(x, y) \in E^2$, $\langle u(x), u(y) \rangle = \langle x, y \rangle$.
 - (b) Démontrer que u est bijectif.
2. On note $\mathbf{O}(E) = \{u \in \mathcal{L}(E) : \forall x \in E \quad \|u(x)\| = \|x\|\}$ l'ensemble des isométries vectorielles de E . Démontrer que $\mathbf{O}(E)$, muni de la loi \circ , est un groupe.
3. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E . Prouver que :

$$u \in \mathbf{O}(E) \iff (u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_n)) \text{ est une base orthonormée de } E.$$

Exercice 1 ★☆☆ — Soient E un espace euclidien et $f \in \mathcal{L}(E)$. Démontrer que $\det(f) = \det(f^*)$.

determinantAdjoint

Exercice 2 ★★☆☆ — Soit un entier $n \geq 2$. On munit \mathbf{R}^n de son produit scalaire usuel.

1. Soit H un hyperplan de \mathbf{R}^n . À l'aide du théorème de Riesz, démontrer qu'il existe $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbf{R}^n$ tel que :

$$H = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n : a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 0\} .$$

2. Soit F un sous-espace vectoriel de \mathbf{R}^n de dimension $p \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$. Démontrer qu'il existe une matrice $(a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n-p,n}(\mathbf{R})$ telle que :

$$F = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n : \begin{cases} a_{1,1} x_1 + \dots + a_{1,n} x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{n-p,1} x_1 + \dots + a_{n-p,n} x_n = 0 \end{cases} \right\} .$$

equationSousEspaceVectorielRn

Exercice 3 ★☆☆☆ — Soient un entier $n \geq 1$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. On munit $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ du produit scalaire :

$$\langle \cdot, \cdot \rangle \left| \begin{array}{l} \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \longrightarrow \mathbf{R} \\ (A, B) \longmapsto \text{tr}(A^\top B) . \end{array} \right.$$

1. Calculer l'adjoint de l'endomorphisme f de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ défini par :

$$f \left| \begin{array}{l} \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \\ M \longmapsto AM . \end{array} \right.$$

2. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur A pour que f soit une isométrie (resp. autoadjoint).

calculAdjointMultiplicationMatricielle

Exercice 4 ★☆☆☆ — Soient E un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$. Démontrer que $\text{Ker}(u^*) = \text{Im}(u)^\perp$ et $\text{Im}(u^*) = \text{Ker}(u)^\perp$.

noyauImageEndomorphismeAdjoint

Exercice 5 ★☆☆☆ — Démontrer que, pour tout $n \geq 2$, le groupe $(\mathbf{O}_n(\mathbf{R}), \times)$ n'est pas commutatif.

OnRAnabelien

Exercice 6 ★★☆☆ — Soient E un espace euclidien et $u \in \mathbf{O}(E)$. Posons $v = u - I_d$.

1. Démontrer que $\text{Ker}(v) = (\text{Im}(v))^\perp$.

2. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, posons $u_n := \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n u^k \in \mathcal{L}(E)$. Notons p le projecteur orthogonal sur $\text{Ker}(v)$. Démontrer que, pour tout $x \in E$:

$$u_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} p(x) .$$

projectionOrthogonaleNoyauIsometrieMoinsIdentite

Exercice 7 ★★★ — Soit un entier $n \geq 2$.

1. Justifier que $\mathbf{O}_n(\mathbf{R})$ n'est pas une partie connexe par arcs de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

2. Démontrer que $\mathbf{SO}_n(\mathbf{R})$ et $\mathbf{O}_n(\mathbf{R}) \setminus \mathbf{SO}_n(\mathbf{R})$ sont les deux composantes connexes par arcs de $\mathbf{O}_n(\mathbf{R})$.

composantesConnexesParArcsOnR

Exercice 8 ★★★ — Soit E un espace euclidien de dimension $n \geq 1$. On souhaite démontrer que $\mathbf{O}(E)$ est engendré par les réflexions.

1. On suppose que $n = 1$.
 - (a) Justifier que $\mathbf{O}(E) = \{\text{id}_E, r\}$, où r est une réflexion de E que l'on précisera.
 - (b) Démontrer que $\mathbf{O}(E)$ est engendré par r .
2. On suppose que $n = 2$.
 - (a) Soit u une isométrie de E . Démontrer que u est une réflexion si et seulement si u est une isométrie négative.
 - (b) Démontrer que toute isométrie positive de E est le produit de deux réflexions de E .
 - (c) Conclure.
3. Soit F un sous-espace vectoriel de E et r une réflexion de F . Démontrer que l'application \tilde{r} définie par :

$$\tilde{r} \left\{ \begin{array}{l} E = F \oplus F^\perp \longrightarrow E \\ x = x_F + x_{F^\perp} \longmapsto r(x_F) + x_{F^\perp} \end{array} \right. \quad [\text{prolongement canonique de } r \text{ à } E]$$

est une réflexion de E .

4. Démontrer le résultat en raisonnant par récurrence sur l'entier $n \geq 1$.

reflexionsEngendrentGroupeIsometriesVectorielles

Exercice 9 ★☆☆ — On munit \mathbf{R}^3 de sa structure euclidienne usuelle. Donner une description géométrique d'une isométrie indirecte de \mathbf{R}^3 , qui possède un plan stable.

isometrieIndirecteEspacePlanStable

Exercice 10 ★★★ — On munit \mathbf{R}^3 de sa structure euclidienne usuelle et on considère sa base canonique $\mathcal{B}_c = (e_1, e_2, e_3)$, qui l'oriente. Soit u l'endomorphisme de \mathbf{R}^3 tel que :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_c}(u) = \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{6}/4 & \sqrt{6}/4 \\ \sqrt{6}/4 & 1/4 & 3/4 \\ -\sqrt{6}/4 & 3/4 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

1. Démontrer que u est une isométrie vectorielle directe de \mathbf{R}^3 .
2. Déterminer un vecteur unitaire f_3 de l'axe de la rotation u .
3. Déterminer deux vecteurs f_1 et f_2 tels que (f_1, f_2, f_3) est une base orthonormée directe de \mathbf{R}^3 .
4. Quel est l'angle de la rotation axiale u ?

elementsCaracteristiquesIsometrieDirecteEspace

Exercice 11 ★★★ — Soient un entier $n \geq 2$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ dont les colonnes sont notées $[A]_{\bullet,1}, \dots, [A]_{\bullet,n}$. L'ensemble $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ est muni de son produit scalaire usuel et on note $\|\cdot\|$ la norme associée.

1. On suppose que $A \in \text{GL}_n(\mathbf{R})$.
 - (a) Justifier que $([A]_{\bullet,1}, \dots, [A]_{\bullet,n})$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$.
 - (b) En appliquant l'algorithme de Gram-Schmidt, démontrer qu'il existe $Q \in \mathbf{O}_n(\mathbf{R})$ et $R \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ une matrice triangulaire à coefficients diagonaux strictement positifs telles que $A = QR$.
2. Démontrer que $|\det(A)| \leq \prod_{j=1}^n \|[A]_{\bullet,j}\|$ [inégalité d'Hadamard] .

decompositionQrInegaliteHadamard

Exercice 16 ★☆☆ — Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien, a un vecteur unitaire de E et $k \in \mathbf{R} \setminus \{-1\}$. Considérons :

$$u \begin{cases} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x + k \langle x, a \rangle a . \end{cases}$$

1. Démontrer que u est un endomorphisme autoadjoint.
2. Démontrer que u est un automorphisme de E .
3. Déterminer les éléments propres de u .

elementsPropreIdentiteModifieeVecteurUnitaire

Exercice 17 ★★☆☆ — Soient A et B deux vecteurs de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ linéairement indépendants. Posons :

$$M = B \times A^\top + A \times B^\top .$$

1. Démontrer que M est diagonalisable sur \mathbf{R} .
2. Déterminer le noyau de M , puis les valeurs propres de M .

elementsPropreTransBFoisAPlusTransAFoisB

Exercice 18 ★★★ — Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Posons $S := \frac{1}{2} (A + A^\top)$.

1. Démontrer que S est diagonalisable sur \mathbf{R} .
2. Notons $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$ les valeurs propres de S . Démontrer que, pour toute valeur propre réelle μ de A , $\lambda_1 \leq \mu \leq \lambda_n$.

partieSymetriqueMatriceCoefficientsReels

Exercice 19 ★★☆☆ — Soient un entier $n \geq 1$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. On note $\| \cdot \|$ la norme euclidienne usuelle sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ et on pose :

- $\| \|A\| \| := \sup \{ \|AX\| : X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R}) \text{ et } \|X\| = 1 \}$ [norme subordonnée de la matrice A]
- $\rho(A^\top A) := \max \{ |\lambda| : \lambda \in \text{Spec}_{\mathbf{R}}(A^\top A) \}$ [rayon spectral de la matrice $A^\top A$].

Démontrer que $\| \|A\| \|^2 = \rho(A^\top A)$.

normeMatricielleSubordonneeRayonSpectral

Exercice 20 ★★★ — Soient $(A, B) \in \mathcal{S}_n(\mathbf{R})^2$ et $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction polynomiale bijective telle que $f(A) = f(B)$. Démontrer que $A = B$.

fonctionPolynomialeBijectiveMatricesSymetriques

Exercice 21 ★★★ — Soit $(A, B) \in \mathcal{S}_n(\mathbf{R})^2$ tel que $AB = BA$. Démontrer qu'il existe $P \in \mathbf{O}_n(\mathbf{R})$ telle que les matrices $P^\top A P$ et $P^\top B P$ soient diagonales.

coOrthodiagonalisationMatricesSymetriques

Exercice 22 ★★☆☆ — Soit un entier $n \geq 2$.

1. Démontrer que $\mathcal{S}_n^+(\mathbf{R})$ est une partie fermée de $\mathcal{S}_n(\mathbf{R})$. Est-elle compacte ?
2. Démontrer que $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbf{R})$ est un ouvert de $\mathcal{S}_n(\mathbf{R})$, puis déterminer son adhérence dans $\mathcal{S}_n(\mathbf{R})$.

proprietesTopologiquesMatricesSymetriquesPositivesDefiniesPositives

Exercice 23 ★★☆☆ — Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbf{R})$.

1. Démontrer que, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $a_{i,i} > 0$.
2. Démontrer que $\det(A) \leq \left(\frac{\text{tr}(A)}{n}\right)^n$.
3. En considérant la matrice $D = \text{diag}\left(\frac{1}{\sqrt{a_{1,1}}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{a_{n,n}}}\right)$ et la matrice $B = DAD$, démontrer que $\det(A) \leq a_{1,1} \cdots a_{n,n}$.
4. Soit $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Démontrer que :

$$\det(M) \leq \prod_{j=1}^n \sqrt{\sum_{i=1}^n m_{i,j}^2} \quad [\text{inégalité d'Hadamard}] .$$

inegaliteDeterminantTraceMatriceSymetriqueDefiniePositiveInegaliteHadamard

Exercice 24 ★☆☆ — Soient un entier $n \geq 2$ et $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbf{R})$.

1. Démontrer que l'application :

$$\varphi \left| \begin{array}{l} \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R}) \times \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R}) \longrightarrow \mathbf{R} \\ (X, Y) \longmapsto X^T A Y \end{array} \right.$$

est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$.

2. En considérant une base orthonormée \mathcal{B} de l'espace euclidien $(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R}), \varphi)$, démontrer qu'il existe une matrice $P \in \mathbf{GL}_n(\mathbf{R})$ telle que $A = P^T P$.

decompositionCholesky

Exercice 25 ★★★ — Soit E un espace euclidien de dimension $n \geq 2$.

1. Soit $u \in \mathcal{S}^+(E)$. Démontrer qu'il existe un unique $v \in \mathcal{S}^+(E)$ tel que $v^2 = u$.
2. Soit $u \in \mathbf{GL}(E)$. Démontrer qu'il existe un unique couple $(w, s) \in \mathbf{O}(E) \times \mathcal{S}^{++}(E)$ tel que $u = w \circ s$.
3. Soit $A \in \mathbf{GL}_n(\mathbf{R})$. Démontrer qu'il existe un unique couple $(\Omega, S) \in \mathbf{O}_n(\mathbf{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbf{R})$ tel que $A = \Omega S$.
4. Démontrer que l'application :

$$\pi \left| \begin{array}{l} \mathbf{O}_n(\mathbf{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbf{R}) \longrightarrow \mathbf{GL}_n(\mathbf{R}) \\ (\Omega, S) \longmapsto \Omega S \end{array} \right.$$

est un homéomorphisme, i.e. que π est bijective, continue et π^{-1} est continue.

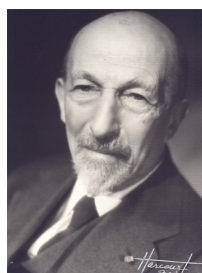
racineCarreeMatriceSymetriquePositiveDecompositionPolaire



André-Louis Cholesky
(1875-1918)



Jørgen Pedersen Gram
(1850-1916)



Jacques Hadamard
(1865-1963)



Erhard Schmidt
(1876-1959)