

## TD – Calcul différentiel 2

**Exercice de la banque CCINP n°41.** — Soient  $f$  l'application de  $\mathbf{R}^2$  dans  $\mathbf{R}$  définie par

$$f : (x, y) \mapsto 4x^2 + 12xy - y^2$$

et  $C = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 = 13\}$ .

1. Justifier que  $f$  atteint un maximum et un minimum sur  $C$ .
2. Soit  $(u, v) \in C$  un point où  $f$  atteint un de ses extrema.
  - (a) Justifier avec un théorème du programme qu'il existe un réel  $\lambda$  tel que le système (S) suivant soit vérifié :

$$(S) \quad \begin{cases} 4u + 6v = \lambda u \\ 6u - v = \lambda v. \end{cases}$$

(b) Montrer que  $(\lambda - 4)(\lambda + 1) - 36 = 0$ . En déduire les valeurs possibles de  $\lambda$ .

3. Déterminer les valeurs possibles de  $(u, v)$ , puis donner le maximum et le minimum de  $f$  sur  $C$ .

**Exercice de la banque CCINP n°56.** — Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbf{R}^2$  par :

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2 \quad f(x, y) = 2x^3 + 6xy - 3y^2 + 2.$$

1.  $f$  admet-elle des extrema locaux sur  $\mathbf{R}^2$ ? Si oui, les déterminer.
2.  $f$  admet-elle des extrema globaux sur  $\mathbf{R}^2$ ? Justifier.
3. On pose  $K = [0, 1] \times [0, 1]$ . Justifier que  $f$  admet un maximum global sur  $K$ , puis le déterminer.

**Exercice 1** ★☆☆ — Soit  $f$  la fonction définie par :

$$f \left| \begin{array}{l} \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R} \\ (x, y) \longmapsto (x^2 + y^2) e^{x^2 - y^2}. \end{array} \right.$$

1. La fonction  $f$  possède-t-elle un maximum global?
2. Justifier que la fonction  $f$  possède un minimum global, atteint en un unique point de  $\mathbf{R}^2$ .
3. Étudier les extrema locaux de la fonction  $f$  et les points en lesquels ils sont atteints.

extremaLocauxGlobauxFonctionDeuxVariables1 [indication(s)]

**Exercice 2** ★★☆☆ — Soit la fonction  $f$  définie par :

$$f \left| \begin{array}{l} \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R} \\ (x, y) \longmapsto x^4 + y^4 - 2(x - y)^2. \end{array} \right.$$

1. La fonction  $f$  possède-t-elle un maximum global?
2. Étudier les extrema locaux de la fonction  $f$  et les points en lesquels ils sont atteints.
3. Soit  $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ . Factoriser l'expression  $f(x, y) + 8$  et en déduire son signe. Qu'en déduire?

extremaLocauxGlobauxFonctionDeuxVariables2 [indication(s)]

**Exercice 3** ★★☆☆ — On considère la fonction  $f$  définie par :

$$f \left| \begin{array}{l} \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R} \\ (x, y) \longmapsto x^4 + y^4 - 4xy. \end{array} \right.$$

1. La fonction  $f$  possède-t-elle un maximum global?

2. Démontrer que :

$$f(x, y) \xrightarrow{\|(x, y)\|_\infty \rightarrow +\infty} +\infty$$

puis que la fonction  $f$  possède un minimum global.

3. Étudier les extrema locaux de la fonction  $f$  et les points en lesquels ils sont atteints.

extremaLocauxGlobauxFonctionDeuxVariables3 [indication(s)]

**Exercice 4** ★★☆☆ — Soit la fonction  $f$  définie par :

$$f \left| \begin{array}{l} \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R} \\ (a, b, c) \longmapsto \int_{-1}^1 (t^3 - a t^2 - b t - c)^2 dt . \end{array} \right.$$

1. La fonction  $f$  possède-t-elle un maximum global ?

2. Démontrer que la fonction  $f$  possède un minimum global, atteint en un unique point de  $\mathbf{R}^3$ .

3. Étudier les extrema locaux de la fonction  $f$  et les points en lesquels ils sont atteints.

extremaLocauxGlobauxFonctionTroisVariables1 [indication(s)]

**Exercice 5** ★★☆☆ — Soient  $a > 0$  et :

$$f \left| \begin{array}{l} ]0, +\infty[^n \longrightarrow \mathbf{R} \\ (x_1, \dots, x_n) \longmapsto \sum_{i=1}^n x_i \ln(x_i) \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \Sigma := \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in ]0, +\infty[^n : \sum_{i=1}^n x_i = a \right\} .$$

1. Étudier les variations et la convexité de la fonction  $\varphi$  définie par :

$$\varphi \left| \begin{array}{l} ]0, +\infty[ \longrightarrow \mathbf{R} \\ t \longmapsto t \ln(t) . \end{array} \right.$$

2. En déduire que la restriction de la fonction  $f$  à  $\Sigma$  est bornée.

3. La partie  $\Sigma$  de  $\mathbf{R}^n$  est-elle compacte ?

4. Démontrer que la restriction de la fonction  $f$  à  $\Sigma$  est minorée par  $a \ln\left(\frac{a}{n}\right)$ .

5. Étudier les extrema locaux, globaux de  $f$  sur  $\Sigma$  et les points en lesquels ils sont atteints.

extremaLies [indication(s)]

**Exercice 6** ★★★ — On munit  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$  de son produit scalaire usuel, noté  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . On note  $\|\cdot\|$  la norme euclidienne associée et  $S$  la sphère unité de  $(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R}), \|\cdot\|)$ . Soit  $f$  l'application définie par :

$$f \left| \begin{array}{l} \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})^n \longrightarrow \mathbf{R} \\ (C_1, \dots, C_n) \longmapsto \det(C_1, \dots, C_n) . \end{array} \right.$$

1. Démontrer que la restriction de la fonction  $f$  à  $S^n$  possède un maximum global et que ce dernier est strictement positif.

2. Soit  $(C_1, \dots, C_n)$  un point de  $S^n$  en lequel la restriction de la fonction  $f$  à  $S^n$  atteint son maximum. Démontrer que la matrice  $(C_1, \dots, C_n)$  est orthogonale.

3. En déduire que :

$$\forall (C_1, \dots, C_n) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})^n \quad |\det(C_1, \dots, C_n)| \leq \prod_{k=1}^n \|C_k\| \quad [\text{inégalité de Hadamard}] .$$

inegaliteHadamardExtremaLies [corrigé]