TD – Calcul différentiel 1

Exercice de la banque CCINP n°33. — *On pose :*

$$\forall\,(x,y)\in\mathbf{R}^2\setminus\{(0,0)\}\quad f(x,y)=\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

et $f(0,0)=0$.

1. *Démontrer que* f *est continue sur* $\mathbf{R}^2$.
2. *Démontrer que* f *admet des dérivées partielles en tout point de* $\mathbf{R}^2$.
3. f *est-elle de classe* $\mathscr{C}^1$ *sur* $\mathbf{R}^2$ *? Justifier.*

Exercice de la banque CCINP n°52. — *Soit* $\alpha\in\mathbf{R}$. *On considère l'application définie sur* $\mathbf{R}^2$ *par :*

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y^4}{x^2+y^2-xy} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ \alpha & \text{si } (x,y)=(0,0)\,.\end{cases}$$

1. *Prouver que, pour tout* $(x,y)\in\mathbf{R}^2$, $x^2+y^2-xy\geqslant\dfrac{1}{2}(x^2+y^2)$.
2. (a) *Justifier que le domaine de définition de* f *est bien* $\mathbf{R}^2$.
   (b) *Déterminer* α *pour que* f *soit continue sur* $\mathbf{R}^2$.
3. *Dans cette question, on suppose que* $\alpha=0$.
   (a) *Justifier l'existence de* $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ *et* $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ *sur* $\mathbf{R}^2\setminus\big\{(0,0)\big\}$ *et les calculer.*
   (b) *Justifier l'existence de* $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ *et* $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ *et donner leur valeur.*
   (c) f *est-elle de classe* $\mathscr{C}^1$ *sur* $\mathbf{R}^2$ *?*

Exercice de la banque CCINP n°57. —

1. *Soit* f *une fonction de* $\mathbf{R}^2$ *dans* $\mathbf{R}$.
   (a) *Donner, en utilisant des quantificateurs, la définition de la continuité de* f *en* $(0,0)$.
   (b) *Donner la définition de «*f *différentiable en* $(0,0)$*».*
2. *On considère l'application définie sur* $\mathbf{R}^2$ *par :*

$$f(x,y)=\begin{cases}xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & si\ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & si\ (x,y)=(0,0)\,.\end{cases}$$

   (a) *Montrer que* f *est continue sur* $\mathbf{R}^2$.
   (b) *Montrer que* f *est de classe* $\mathscr{C}^1$ *sur* $\mathbf{R}^2$.

Exercice de la banque CCINP n°58. —

1. *Soit* E *et* F *deux* $\mathbf{R}$*-espaces vectoriels normés de dimension finie. Soit* $a\in E$ *et soit* $f:E\longrightarrow F$ *une application. Donner la définition de «* f *différentiable en* a *».*
2. *Soit* $n\in\mathbb{N}^*$. *Soit* E *un* $\mathbf{R}$*-espace vectoriel de dimension finie* n. *Soit* $e=(e_1,e_2,\ldots,e_n)$ *une base de* E. *On pose :*

$$\forall x=\sum_{i=1}^{n}x_ie_i\in E\quad \|x\|_\infty=\max_{1\leqslant i\leqslant n}|x_i|$$

   et :

$$\forall(x,y)\in E\times E\quad \|(x,y)\|=\max(\|x\|_\infty,\|y\|_\infty)\,.$$

   On admet que $\|.\|_\infty$ *est une norme sur* E *et que* $\|.\|$ *est une norme sur* $E\times E$. *Soit* $B:E\times E\longrightarrow\mathbf{R}$ *une forme bilinéaire sur* E.

(a) *Prouver que :*

$$\exists C \in \mathbf{R}^+ \quad \forall (x,y) \in E \times E \quad |B(x,y)| \leqslant C \, \|x\|_\infty \, \|y\|_\infty \, .$$

(b) *Montrer que B est différentiable sur $E \times E$ et déterminer sa différentielle en tout $(u_0, v_0) \in E \times E$.*

Exercice 1 ★☆☆ — *On considère deux fonctions :*

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} 0 & si\ (x,y) = (0,0) \\ \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} & si\ (x,y) \neq (0,0) \end{cases} \end{array} \right. \qquad g \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} 0 & si\ (x,y) = (0,0) \\ \dfrac{xy}{x^2+y^2} & si\ (x,y) \neq (0,0) \end{cases} \end{array} \right.$$

Démontrer que la fonction f est continue en $(0,0)$ et que la fonction g est discontinue en $(0,0)$.

`continuiteFonctionDeuxVariables` [indication(s)]

Exercice 2 ★☆☆ — *Soient les fonctions f et g définies sur $\mathbf{R}^2$ par, pour tout $(x,y) \in \mathbf{R}^2$:*

$$f(x,y) = \begin{cases} y^2 \ln|x| & si\ x \neq 0 \\ 0 & sinon \end{cases} \qquad et \qquad g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & sinon\ . \end{cases}$$

1. *Démontrer que les fonctions f et g admettent une dérivée directionnelle suivant tout vecteur en $(0,0)$.*
2. *Démontrer que les fonctions f et g ne sont pas continues en $(0,0)$.*

`deriveeDirectionnelleDiscontinue`

Exercice 3 ★☆☆ — *Soit $P := \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbf{C}[X]$, où $n \in \mathbf{N}^*$ et $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{C}$. Posons :*

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ (x,y) & \longmapsto & P(x+iy)\,. \end{array} \right.$$

Démontrer que f possède des dérivées partielles au point $(0,0)$ et les exprimer en fonction des coefficients de P.

`deriveesPartiellesFonctionPolynomialeComplexe` [corrigé]

Exercice 4 ★☆☆ — *Soit l'application :*

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x^3 + xy + y^2 \end{array} \right.$$

et (a,b) un point de $\mathbf{R}^2$. Démontrer que l'application f est différentiable en (a,b) et préciser sa différentielle $\mathrm{d}f(a,b)$ en ce point.

`differentiabiliteDifferentiellePolynomeDeuxVariables` [corrigé]

Exercice 5 ★☆☆ — *Soient Ω une partie ouverte de $\mathbf{R}^n$, F un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension finie et deux applications $f, g \in F^\Omega$. On suppose que les applications f et g sont différentiables en un point a de Ω.*

1. *Soit $i \in [\![1,n]\!]$. Justifier que les dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ et $\dfrac{\partial g}{\partial x_i}(a)$ existent.*
2. *On suppose que, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \dfrac{\partial g}{\partial x_i}(a)$. Démontrer que les différentielles $\mathrm{d}f(a)$ et $\mathrm{d}g(a)$ sont égales.*

`applicationsDifferentiablesMemeDeriveesPartielles` [corrigé]

Exercice 6 ★★☆ — *Soit l'application :*

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^3 & \longrightarrow & \mathbf{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y+z, xyz)\,. \end{array} \right.$$

1. *Démontrer que la fonction f est différentiable en tout point $(x,y,z)\in\mathbf{R}^3$ et écrire sa matrice Jacobienne en (x,y,z).*
2. *On dit que f est une submersion en un point (x,y,z) de $\mathbf{R}^3$ si l'application $\mathrm{d}f(x,y,z)\in\mathscr{L}\left(\mathbf{R}^3,\mathbf{R}^2\right)$ est surjective. On note*

$$U:=\left\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3\ :\ f \text{ est une submersion au point } (x,y,z)\right\}.$$

   (a) *Démontrer que $\mathbf{R}^3\setminus U$ est la réunion de quatre droites que l'on explicitera.*
   (b) *Justifier que U est une partie ouverte de $\mathbf{R}^3$.*

`lieuSubmersion`

Exercice 7 ★★☆ — *On munit $\mathbf{R}^2$ de sa norme euclidienne, définie par :*

$$\forall\,(x,y)\in\mathbf{R}^2\qquad ||(x,y)||:=\sqrt{x^2+y^2}\,.$$

Soit la fonction f de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}^2$ définie par, pour tout $(x,y)\in\mathbf{R}^2$:

$$f(x,y)=(\sin(x+2y),\cos(2x+y))\,.$$

1. *Démontrer que la fonction f est différentiable en tout vecteur $(x,y)\in\mathbf{R}^2$ et écrire sa matrice Jacobienne en (x,y).*
2. *Démontrer que pour tout $(x,y)\in\mathbf{R}^2$, l'application $\mathrm{d}f(x,y)\in\mathscr{L}\left(\mathbf{R}^2,\mathbf{R}^2\right)$ est 3-lipschitzienne.*

`differentielleLipschitzienne`

Exercice 8 ★★☆ — *Soient $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien, u un endomorphisme de E et $a\in E$. Démontrer que l'application :*

$$f\ \left|\ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbf{R}\\ x & \longmapsto & \langle u(x),x\rangle\end{array}\right.$$

est différentiable en a et calculer sa différentielle en a.

`differentiabiliteDifferentielleProduitScalaireTordu`

Exercice 9 ★★☆ — *Soient $a=(a_1,a_2)\in\mathbf{R}^2$, r un réel strictement positif $\Omega:=]a_1-r,a_1+r[\times]a_2-r,a_2+r[\subset\mathbf{R}^2$ et une application*

$$f\ \left|\ \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \mathbf{R}\\ (x_1,x_2) & \longmapsto & f(x_1,x_2)\end{array}\right.$$

On suppose que

(H1) *pour tout $x\in\Omega$, la fonction f admet une dérivée partielle en x suivant la variable x_1 et suivant la variable x_2 ;*

(H2) *pour tout $x\in\Omega$, $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x)=\dfrac{\partial f}{\partial x_2}(x)=0_{\mathbf{R}}$.*

1. *Démontrer que Ω est un ouvert de $\mathbf{R}^2$.*
2. *Justifier que la fonction f est différentiable sur Ω et préciser sa différentielle.*
3. *Démontrer que l'application f est constante sur Ω.*

`deriveesPartiellesNullesSurCarre`

Exercice 10 ★★☆ — *Soient $n\geqslant 2$ un nombre entier et Tr l'application trace sur $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$. Déterminer toutes les applications $f:\mathscr{M}_n(\mathbf{R})\longrightarrow\mathbf{R}$, différentiables sur $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$, telles que :*

$$\forall\,A\in\mathscr{M}_n(\mathbf{R})\quad \mathrm{d}f(A)=\mathrm{Tr}\,.$$

`applicationsDifferentiablesDifferentielleEgaleTrace`

Exercice 11 ★★☆ — *Soit :*

$$f\ \left|\ \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R}\\ (x,y) & \longmapsto & f(x,y)\end{array}\right.$$

une application différentiable sur $\mathbf{R}^2$.

1. *Soit* $(x,y) \in \mathbf{R}^2$ *fixé. On définit la fonction* g *par :*

$$g \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & f(tx,ty)\,. \end{array} \right.$$

Démontrer que g *est dérivable sur* $\mathbf{R}$ *et calculer sa dérivée.*

2. *On suppose que* f *est homogène, i.e. que :*

$$\forall (x,y,t) \in \mathbf{R}^3 \quad f(tx,ty) = t\,f(x,y)\,.$$

(a) *Démontrer que pour tout* $(x,y,t) \in \mathbf{R}^3$ *:*

$$f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(tx,ty)\,x + \frac{\partial f}{\partial y}(tx,ty)\,y\,.$$

(b) *En déduire qu'il existe deux réels* α *et* β *tels que :*

$$\exists (\alpha,\beta) \in \mathbf{R}^2 \quad \forall (x,y) \in \mathbf{R}^2 \quad f(x,y) = \alpha x + \beta y\,.$$

`fonctionsHomogenes`

Exercice 12 ★★☆ — *On se propose de déterminer toutes les fonctions* $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ *différentiables sur* $\mathbf{R}^2$ *et qui vérifient :*

$$\forall (x,y,t) \in \mathbf{R}^3 \quad f(x+t,y+t) = f(x,y)\,.$$

1. *Soient* $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ *une application différentiable sur* $\mathbf{R}^2$ *et* $(x,y) \in \mathbf{R}^2$ *fixé. Démontrer que l'application :*

$$\tau \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & f(x+t,y+t) \end{array} \right.$$

est dérivable sur $\mathbf{R}$ *et que pour tout* $t \in \mathbf{R}$ *:*

$$\tau'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x+t,y+t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x+t,y+t)\,.$$

2. *Soit* $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ *une fonction différentiable sur* $\mathbf{R}^2$ *telle que :*

$$\forall (x,y,t) \in \mathbf{R}^3 \quad f(x+t,y+t) = f(x,y)\,.$$

(a) *Démontrer que pour tout* $(x,y) \in \mathbf{R}^2$ *:*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0\,.$$

(b) *Soient* a,b,c,d *quatre réels fixés et soit l'application :*

$$g \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (u,v) & \longmapsto & f(au+bv,cu+dv)\,. \end{array} \right.$$

Démontrer que l'application g *est différentiable sur* $\mathbf{R}^2$ *et calculer, pour tout* $(u,v) \in \mathbf{R}^2$, $\dfrac{\partial g}{\partial v}(u,v)$ *en fonction des dérivées partielles de* f.

(c) *En choisissant* $a,b,c,d \in \mathbf{R}$ *de telle sorte que :*

(H1) *pour tout* $(u,v) \in \mathbf{R}^2$, $\dfrac{\partial g}{\partial v}(u,v) = 0$ *;*

(H2) *la matrice* $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbf{GL}_2(\mathbf{R})$ *;*

démontrer qu'il existe une fonction $\varphi : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$, *dérivable sur* $\mathbf{R}$, *telle que :*

$$\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2 \quad f(x,y) = \varphi(x-y)\,.$$

3. *Soit une fonction* $\varphi : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$, *dérivable sur* $\mathbf{R}$. *On lui associe la fonction* f *définie par :*

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \varphi(x-y)\,. \end{array} \right.$$

Démontrer que l'application f *est différentiable sur* $\mathbf{R}^2$ *et que :*

$$\forall (x,y,t) \in \mathbf{R}^3 \quad f(x+t,y+t) = f(x,y)\,.$$

4. *Formuler une conclusion soignée pour répondre à l'objectif exposé au début de l'exercice.*

`applicationsInvariantesTranslationPremiereBissectrice`

Exercice 13 ★★★ — *Soient $(a,b)\in\mathbf{R}^2$. Déterminer toutes les fonctions $f\in\mathscr{C}^1(\mathbf{R}^2,\mathbf{R})$ telles que :*

$$\forall (x,y)\in\mathbf{R}^2 \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+a\,\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=b\ .$$

`equationDeriveesPartiellesLineaireOrdre1`

Exercice 14 ★★☆ — *Soit $f\in\mathscr{C}^2(\,]-1,1[\,,\mathbf{R})$.*

1. *Démontrer que l'ensemble de définition $\mathscr{D}$ de l'application :*

$$g:(x,y)\longmapsto f\left(\frac{\cos(x)}{\mathrm{ch}(y)}\right)$$

est un ouvert de $\mathbf{R}^2$.

2. *Déterminer f pour que :*

$$\forall (x,y)\in\mathscr{D} \quad \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y)+\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y)=0\ .$$

`rechercheCnsFonctionHarmonique`

Exercice 15 ★★☆ — *Soit $f\in\mathscr{C}^2(\mathbf{R}^2,\mathbf{R})$. Démontrer que :*

$$\forall (x,y)\in\mathbf{R}^2 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(x,y)=y\ .$$

si et seulement s'il existe $\varphi,\psi\in\mathscr{C}^2(\mathbf{R},\mathbf{R})$ telle que :

$$\forall (x,y)\in\mathbf{R}^2 \quad f(x,y)=\frac{x\,y^2}{2}+\varphi(x)+\psi(y)\ .$$

`equationDeriveesPartiellesBasiqueOrdre2`

Exercice 16 ★★★ — *Soit $\Omega:=\,]0,+\infty[\,\times\,]0,+\infty[$. Déterminer les applications $f\in\mathscr{C}^2(\Omega,\mathbf{R})$ telles que :*

$$\forall (x,y)\in\Omega \quad x^2\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)-y^2\,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=0\ .$$

On pourra considérer le changement de variables donné par $u=x\,y$, $v=\dfrac{x}{y}$.

`equationDeriveesPartiellesOrdre2` [corrigé]

---

continuiteFonctionDeuxVariables [énoncé]

Indication(s) pour l'exercice 1

- Démontrer $f(x,y) \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{\|\cdot\|_2} f(0,0) = 0$, i.e.

$$\frac{x^2y^2}{x^2+y^2} \xrightarrow[\|(x,y)\|_2\to 0]{} 0$$

en commençant par majorer x^2y^2 par une quantité dépendant de $\|(x,y)\|_2$.

- Démontrer la discontinuité de g en $(0,0)$ à l'aide du critère séquentiel. Pour cela, exhiber deux suites de nombres réels (x_n) et (y_n) qui convergent vers 0, mais telles que la quantité $g(x_n, y_n)$ ne tend pas vers $g(0,0) = 0$ lorsque n tend vers $+\infty$.

deriveesPartiellesFonctionPolynomialeComplexe [énoncé]

Un corrigé de l'exercice 3

On note (e_1, e_2) la base canonique de $\mathbf{R}^2$.

- *Dérivée partielle par rapport à la variable x, i.e. dérivée directionnelle par rapport au vecteur e_1.*
  Soit $t \in \mathbf{R}^*$.

$$\frac{f((0,0)+t\,e_1)-f(0,0)}{t} = \frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \frac{P(t)-P(0)}{t} = \frac{1}{t}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\,t^k - a_0\right) = \sum_{k=1}^{n} a_k\,t^{k-1}$$

  Nous en déduisons

$$\frac{f((0,0)+t\,e_1)-f(0,0)}{t} = \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1}\,t^k \xrightarrow[t\to 0]{} a_1$$

  Donc la fonction f admet une dérivée partielle première en $(0,0)$ dont la valeur est donnée par

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = a_1$$

- *Dérivée partielle par rapport à la variable y, i.e. dérivée directionnelle par rapport au vecteur e_2.*
  Soit $t \in \mathbf{R}^*$.

$$\frac{f((0,0)+t\,e_2)-f(0,0)}{t} = \frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = \frac{P(i\,t)-P(0)}{t} = \frac{1}{t}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\,(i\,t)^k - a_0\right) = \sum_{k=1}^{n} a_k\,i^k\,t^{k-1}$$

  Nous en déduisons

$$\frac{f((0,0)+t\,e_2)-f(0,0)}{t} = \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1}\,i^{k+1}\,t^k \xrightarrow[t\to 0]{} a_1\,i$$

  Donc la fonction f admet une dérivée partielle seconde en $(0,0)$ dont la valeur est donnée par

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = a_1\,i$$

differentiabiliteDifferentiellePolynomeDeuxVariables [énoncé]

Un corrigé de l'exercice 4

(a) *Différentiabilité de l'application f sur $\mathbf{R}^2$.*
Nous vérifions les hypothèses du critère $\mathscr{C}^1$.

- La fonction
$$f(\cdot\,,b)\colon x \longmapsto f(x,b) = x^3 + xb + b^2$$
est polynomiale, donc dérivable en a. Ainsi la dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b)$ existe et
$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = f(\cdot\,,b)'(a) = 3a^2 + b$$
- La fonction
$$f(a,\cdot)\colon y \longmapsto f(a,y) = a^3 + ay + y^2$$
est polynomiale, donc dérivable en b. Ainsi la dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)$ existe et
$$\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = f(a,\cdot)'(b) = a + 2b$$
- Des deux points précédents, nous déduisons que la fonction f admet des dérivées partielles en tout point de $\mathbf{R}^2$ données par
$$\frac{\partial f}{\partial x}\left|\begin{array}{ccc}\mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R}\\ x & \longmapsto & 3x^2+y\end{array}\right. \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}\left|\begin{array}{ccc}\mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R}\\ x & \longmapsto & x+2y\end{array}\right.$$
Comme ces deux applications sont polynomiales, elles sont continues sur $\mathbf{R}^2$.

Le critère $\mathscr{C}^1$ s'applique et livre le caractère $\mathscr{C}^1$ de f sur $\mathbf{R}^2$. L'application f est donc différentiable au point (a,b).

(b) *Différentielle de l'application f en (a,b).*
Comme l'application $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ est différentiable en (a,b), nous savons que, pour tout $(h_1,h_2) \in \mathbf{R}^2$
$$\mathrm{d}f(a,b)\cdot(h_1,h_2) = \langle \nabla(f)(a,b)\,,(h_1,h_2)\rangle = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)h_2 = (3a^2+b)h_1 + (a+2b)h_2$$
où $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$ désigne le produit scalaire usuel sur $\mathbf{R}^2$.

applicationsDifferentiablesMemeDeriveesPartielles [énoncé]

Un corrigé de l'exercice 5

1. Notons $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbf{R}^n$, qui est orthonormée pour le produit scalaire usuel sur $\mathbf{R}^n$, et fixons une norme N_F sur F. Comme f est différentiable en a

$$f(a+h) \underset{h \to 0_{\mathbf{R}^n}}{=} f(a) + \mathrm{d}f(a) \cdot h + \mathrm{o}(\|h\|_2)$$

i.e.

$$\frac{f(a+h) - f(a) - \mathrm{d}f(a) \cdot h}{\|h\|_2} \xrightarrow[h \to 0_{\mathbf{R}^n}]{} 0_F$$

Comme $t\,e_i \xrightarrow[t \to 0_{\mathbf{R}}]{} 0_{\mathbf{R}^n}$, nous en déduisons, par composition de limites, que

$$\frac{f(a+t\,e_i) - f(a) - \mathrm{d}f(a) \cdot (t\,e_i)}{\|t\,e_i\|_2} \xrightarrow[t \to 0_{\mathbf{R}}]{} 0_F$$

Comme $\mathrm{d}f(a)$ est linéaire et $\|e_i\|_2 = 1$, il vient

$$\frac{f(a+t\,e_i) - f(a) - t\;\mathrm{d}f(a) \cdot e_i}{|t|} \xrightarrow[t \to 0_{\mathbf{R}}]{} 0_F$$

i.e.

$$N_F\left(\frac{f(a+t\,e_i) - f(a)}{t} - \mathrm{d}f(a) \cdot e_i\right) \xrightarrow[t \to 0_{\mathbf{R}}]{} 0_{\mathbf{R}}$$

Ainsi

$$\frac{f(a+t\,e_i) - f(a)}{t} \xrightarrow[t \to 0_{\mathbf{R}}]{} \mathrm{d}f(a) \cdot e_i$$

Nous en déduisons que $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ existe et

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \mathrm{d}f(a) \cdot e_i$$

De même, $\dfrac{\partial g}{\partial x_i}(a)$ existe et

$$\frac{\partial g}{\partial x_i}(a) = \mathrm{d}g(a) \cdot e_i$$

2. D'après la question 1 et l'hypothèse sur les dérivées partielles de f et g en a, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$

$$\mathrm{d}f(a) \cdot e_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \frac{\partial g}{\partial x_i}(a) = \mathrm{d}g(a) \cdot e_i$$

Ainsi, les applications linéaires $f, g \in \mathscr{L}(\mathbf{R}^n, F)$ coïncident sur la base canonique de $\mathbf{R}^n$. Elles sont donc identiques.

equationDeriveesPartiellesOrdre2 [énoncé]

Un corrigé de l'exercice 16

Soit $f \in \mathscr{C}^2(\Omega, \mathbf{R})$ telle que

$$\forall (x,y) \in \Omega \quad x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) - y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0$$

(a) Pour tout $(x,y) \in \Omega$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} u & = & xy \\ v & = & x/y \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & \sqrt{uv} \\ y & = & \sqrt{u/v} \end{array} \right.$$

Aussi introduit-on l'application

$$h \left| \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \Omega \\ (u,v) & \longmapsto & \left(\sqrt{uv}, \sqrt{\dfrac{u}{v}}\right) \end{array} \right.$$

Cette dernière est de classe $\mathscr{C}^2$, car ses applications composantes

$$h_1 \left| \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (u,v) & \longmapsto & \sqrt{uv} \end{array} \right. \quad \text{et} \quad h_2 \left| \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (u,v) & \longmapsto & \sqrt{\dfrac{u}{v}} \end{array} \right.$$

sont des composées des fonctions

$$\left| \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \mathbf{R}_+^* \\ (u,v) & \longmapsto & uv \end{array} \right. \qquad \left| \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \mathbf{R}_+^* \\ (u,v) & \longmapsto & \dfrac{u}{v} \end{array} \right. \qquad \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbf{R}_+^* \\ t & \longmapsto & \sqrt{t} \end{array} \right.$$

qui sont toutes $\mathscr{C}^2$. En effet un polynôme en deux variables est de classe $\mathscr{C}^2$ sur un ouvert, une fonction rationnelle en deux variables est de classe $\mathscr{C}^2$ sur un ouvert où son dénominateur ne s'annule pas et la racine carrée est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbf{R}_+^*$.

(b) La fonction

$$g = f \circ h \left| \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (u,v) & \longmapsto & f(h_1(u,v), h_2(u,v)) \end{array} \right.$$

est de classe $\mathscr{C}^2$ sur Ω comme composée d'applications de classe $\mathscr{C}^2$.

(c) Posons

$$* := h(u,v) = (h_1(u,v), h_2(u,v)) = \left(\sqrt{uv}, \sqrt{\frac{u}{v}}\right)$$

et fixons $(u,v) \in \Omega$. D'après la règle de la chaîne

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial v}(u,v) &= \frac{\partial f}{\partial x}(*)\, \frac{\partial h_1}{\partial v}(u,v) + \frac{\partial f}{\partial y}(*)\, \frac{\partial h_2}{\partial v}(u,v) \\ &= \frac{1}{2}\, \frac{\partial f}{\partial x}(*) \sqrt{\frac{u}{v}} - \frac{1}{2}\, \frac{\partial f}{\partial y}(*)\, \frac{\sqrt{u}}{v^{3/2}} \end{aligned}$$

En appliquant à présent, non seulement la règle de la chaîne, mais aussi le théorème de Schwarz, il vient

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(u,v) &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(*)\, \frac{\partial h_1}{\partial u}(u,v) + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(*)\, \frac{\partial h_2}{\partial u}(u,v) \right) \sqrt{\frac{u}{v}} + \frac{1}{4}\, \frac{\partial f}{\partial x}(*)\, \frac{1}{\sqrt{uv}} \\ &\quad - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(*)\, \frac{\partial h_1}{\partial u}(u,v) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(*)\, \frac{\partial h_2}{\partial u}(u,v) \right) \frac{\sqrt{u}}{v^{3/2}} - \frac{1}{4}\, \frac{\partial f}{\partial y}(*)\, \frac{1}{\sqrt{u}\, v^{3/2}} \\ &= \frac{1}{4}\, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(*) + \frac{1}{4}\, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(*)\, \frac{1}{v} + \frac{1}{4}\, \frac{\partial f}{\partial x}(*)\, \frac{1}{\sqrt{uv}} - \frac{1}{4}\, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(*)\, \frac{1}{v} - \frac{1}{4}\, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(*)\, \frac{1}{v^2} - \frac{1}{4}\, \frac{\partial f}{\partial y}(*)\, \frac{1}{\sqrt{u}\, v^{3/2}} \\ &= \frac{1}{4}\, \frac{\partial f}{\partial x}(*)\, \frac{1}{\sqrt{uv}} - \frac{1}{4}\, \frac{\partial f}{\partial y}(*)\, \frac{1}{\sqrt{u}\, v^{3/2}} + \frac{1}{4}\, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(*) - \frac{1}{4}\, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(*)\, \frac{1}{v^2} \\ &= \frac{1}{2u} \left(\frac{1}{2}\, \frac{\partial f}{\partial x}(*) \sqrt{\frac{u}{v}} - \frac{1}{2}\, \frac{\partial f}{\partial y}(*)\, \frac{\sqrt{u}}{v^{3/2}} \right) + \frac{1}{4}\, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(*) - \frac{1}{4}\, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(*)\, \frac{1}{v^2} \\ &= \frac{1}{2u}\, \frac{\partial g}{\partial v}(u,v) + \underbrace{\frac{1}{4}\, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(*) - \frac{1}{4}\, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(*)\, \frac{1}{v^2}}_{=:k(u,v)} \end{aligned}$$

D'après l'hypothèse faite sur f

$$k(u,v)=\frac{1}{4uv}\underbrace{\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\sqrt{uv},\sqrt{\frac{u}{v}}\right)uv-\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\sqrt{uv},\sqrt{\frac{u}{v}}\right)\frac{u}{v}\right)}_{=0}=0$$

Cette étude nous livre

$$\forall\,(u,v)\in\Omega\quad \frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}(u,v)=\frac{1}{2u}\,\frac{\partial g}{\partial v}(u,v)$$

(d) Fixons $v_0\in\,]0,+\infty[$. La fonction

$$\left|\begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ u & \longmapsto & \dfrac{\partial g}{\partial v}(u,v_0)\end{array}\right.$$

étant solution de l'équation différentielle

$$y'-\frac{1}{2u}\,y=0$$

d'inconnue $y\in\mathscr{C}^1(\,]0,+\infty[\,,\mathbf{R})$, il vient

$$\forall\,u\in\,]0,+\infty[\quad \frac{\partial g}{\partial v}(u,v_0)=\frac{\partial g}{\partial v}(1,v_0)\,\sqrt{u}$$

L'étude ayant été réalisée pour un réel strictement positif v_0 quelconque, nous en déduisons

$$\forall\,(u,v)\in\Omega\quad \frac{\partial g}{\partial v}(u,v)=\frac{\partial g}{\partial v}(1,v)\,\sqrt{u}$$

(e) Fixons $(u_0,v_0)\in\Omega$. D'après le théorème fondamental de l'analyse

$$g(u_0,v_0)-g(u_0,1)=\int_1^{v_0}\frac{\partial g}{\partial v}(u_0,v)\,\mathrm{d}v=\sqrt{u_0}\int_1^{v_0}\frac{\partial g}{\partial v}(1,v)\,\mathrm{d}v=\sqrt{u_0}\,\left(g(1,v_0)-g(1,1)\right)$$

L'étude ayant été réalisée pour un couple $(u_0,v_0)\in\Omega$ quelconque, nous en déduisons

$$\forall\,(u,v)\in\Omega\quad g(u,v)=g(u,1)+\sqrt{u}\,\left(g(1,v)-g(1,1)\right)$$

(f) Soit $(x,y)\in\Omega$. D'après ce qui précède

$$f(x,y)=g\left(xy,\frac{x}{y}\right)=g(xy,1)+\sqrt{xy}\left(g\left(1,\frac{x}{y}\right)-g(1,1)\right)=\varphi(xy)+\sqrt{xy}\;\psi\left(\frac{x}{y}\right)$$

où les applications φ et ψ sont définies par

$$\varphi\left|\begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & g(t,1)\end{array}\right.\qquad \psi\left|\begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & g(1,t)-g(1,1)\end{array}\right.$$

Comme les applications

$$\left|\begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & (t,1)\end{array}\right.\qquad \left|\begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & (1,t)\end{array}\right.$$

sont de classe $\mathscr{C}^2$, les applications φ et ψ sont de classe $\mathscr{C}^2$ (composées d'applications de classe $\mathscr{C}^2$).

(g) Conclusion. Si $f\in\mathscr{C}^2(\Omega,\mathbf{R})$ vérifie

$$\forall\,(x,y)\in\Omega\quad x^2\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)-y^2\,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=0$$

alors il existe deux applications $\varphi,\psi\in\mathscr{C}^2(\,]0,+\infty[\,,\mathbf{R})$ telles que

$$\forall\,(x,y)\in\Omega\quad f(x,y)=\varphi(xy)+\sqrt{xy}\;\psi\left(\frac{x}{y}\right)$$