Un corrigé du devoir surveillé n°3 — piste carmin

1. Questions de cours

1. Démontrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t$ converge et calculer sa valeur.

2. Démontrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ est convergente, mais non absolument convergente.

Dans la suite de cette partie, (E, N_E) désigne un $\mathbf{R}$-espace vectoriel normé et A une partie compacte de E.

3. Démontrer que la partie A est fermée et bornée.

4. Soit $(a_n)_{n\in\mathbf{N}} \in A^{\mathbf{N}}$ une suite qui possède une unique valeur d'adhérence. Démontrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge.

5. Soient (F, N_F) un $\mathbf{R}$-espace vectoriel normé et $f : A \longrightarrow F$ une application continue. Démontrer que $f(A)$ est compacte.

2. Intégrales de Wallis et de Gauß

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on note :

$$W_n = \int_0^{\pi/2} (\sin(t))^n\,\mathrm{d}t.$$

On se propose de déterminer un équivalent de W_n, quand n tend vers $+\infty$.

6. Établir pour $n \in \mathbf{N}$ une relation simple entre W_{n+2} et W_n.

Soit $n \in \mathbf{N}$.

$$W_{n+2} = \int_0^{\pi/2} \sin(t)\,(\sin(t))^{n+1}\,\mathrm{d}t\,.$$

Les fonctions :

$$t \longmapsto -\cos(t) \qquad \text{et} \qquad t \longmapsto (\sin(t))^{n+1}$$

sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Par intégration par parties, il vient :

$$W_{n+2} = \underbrace{\left[-\cos(t)\,(\sin(t))^{n+1}\right]_0^{\pi/2}}_{=0} + (n+1)\int_0^{\pi/2} \underbrace{\cos^2(t)}_{=1-\sin^2(t)}\,(\sin(t))^n\,\mathrm{d}t = (n+1)W_n - (n+1)W_{n+2}$$

et ainsi :

$$W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}\,W_n\,.$$

7. En déduire que pour tout $n \in \mathbf{N}$:

$$W_n W_{n+1} = \frac{\pi}{2(n+1)}.$$

D'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbf{N}$:

$$(n+2)\, W_{n+1}\, W_{n+2} = (n+1)\, W_n W_{n+1}\ .$$

La suite $((n+1)\, W_n W_{n+1})_{n\in\mathbf{N}}$ est donc constante. Comme $W_0 = \dfrac{\pi}{2}$ et $W_1 = 1$, nous en déduisons :

$$\forall\, n \in \mathbf{N}, \qquad (n+1)\, W_n W_{n+1} = \frac{\pi}{2}\ .$$

8. Démontrer que la suite $(W_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est strictement décroissante et qu'elle converge.

- Soit $n \in \mathbf{N}$. Par linéarité et croissance de l'intégrale :

$$W_{n+1} - W_n = \int_0^{\pi/2} (\sin(t))^{n+1}\ \mathrm{d}t - \int_0^{\pi/2} (\sin(t))^n\ \mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \underbrace{(\sin(t))^n}_{\geqslant 0}\underbrace{(\sin(t)-1)}_{\leqslant 0}\ \mathrm{d}t \leqslant 0\ .$$

  La suite $(W_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est donc décroissante.
- Démontrons que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $W_n \neq W_{n+1}$, en raisonnant par l'absurde. Supposons qu'il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que $W_{n+1} - W_n = 0$. La fonction :

$$g_n : t \longmapsto (\sin(t))^n\, (\sin(t)-1)$$

  est continue et de signe constant sur l'intervalle $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Par hypothèse :

$$0 = W_{n+1} - W_n = \int_0^{\pi/2} g_n(t)\ \mathrm{d}t\ .$$

  La fonction g_n est donc nulle (propriété de séparation de l'intégrale). Or :

$$g_n\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right) \neq 0$$

  d'où une contradiction. Ainsi, la suite $(W_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est-elle strictement décroissante.
- Par croissance de l'intégrale :

$$W_n = \int_0^{\pi/2} \underbrace{(\sin(t))^n}_{\geqslant 0}\ \mathrm{d}t \geqslant 0\ .$$

  Donc la suite $(W_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est minorée par 0.
- D'après ce qui précède et le théorème de la limite monotone, la suite $(W_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge et sa limite, notée ℓ, vérifie $\ell \geqslant 0$.

9. Déterminer la limite de la suite $(W_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et donner un équivalent de cette suite.

Soit $n \in \mathbf{N}$. Comme $W_{n+1} \leqslant W_n \leqslant W_{n-1}$ et $W_n \geqslant 0$:

$$W_{n+1} W_n \leqslant W_n^2 \leqslant W_{n-1} W_n\ .$$

D'après la question 7 :

$$\frac{\pi}{2(n+1)} = W_{n+1} W_n \leqslant W_n^2 \leqslant W_{n-1} W_n = \frac{\pi}{2n}$$

et donc :

$$\sqrt{\frac{n}{n+1}} \leqslant \sqrt{\frac{2n}{\pi}}\, W_n \leqslant 1\ .$$

Par théorème d'encadrement, il vient :

$$W_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$$

et donc $W_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

On se propose de démontrer que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$.

10. Justifier que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ est convergente et que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x\ .$$

- La fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^{-x^2}$ est continue par morceaux et positive sur $]-\infty,+\infty[$.
- On observe que, d'après les résultats sur les croissances comparées :

$$\mathrm{e}^{-x^2} \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)\ .$$

  D'après le critère de Riemann, la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$. Par théorème de comparaison, la fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^{-x^2}$ est également intégrable au voisinage de $+\infty$.
- La fonction :

$$\left|\begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \longrightarrow &]-\infty,0[\\ x & \longmapsto & -x \end{array}\right.$$

  est une bijection de classe $\mathscr{C}^1$ qui est strictement décroissante. Comme nous savons que l'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ converge, le théorème de changement de variable nous livre la convergence de l'intégrale :

$$\int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$$

  ainsi que l'identité :

$$\int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x\ .$$

- D'après ce qui précède, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ converge et :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x := \int_{-\infty}^{0} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x\ .$$

11. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, pour tout réel x vérifiant $0 \leqslant x \leqslant \sqrt{n}$:

$$\left(1-\frac{x^2}{n}\right)^n \leqslant \mathrm{e}^{-x^2} \leqslant \left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-n}\ .$$

Soit $n \in \mathbf{N}^*$.

- Si $x = \sqrt{n}$, alors l'inégalité à établir s'écrit $0 \leqslant \mathrm{e}^{-n} \leqslant 2^{-n}$. Elle découle de $2 \leqslant \mathrm{e}$.
- Soit $x \in \left[0, \sqrt{n}\right[$.
  — Comme $-\dfrac{x^2}{n} > -1$, nous déduisons de la concavité du logarithme que :

$$\ln\left(1-\frac{x^2}{n}\right) \leqslant -\frac{x^2}{n}$$

  puis, comme la fonction $u \longmapsto \exp(nu)$ est croissante sur $\mathbf{R}$:

$$(\star) \qquad \left(1-\frac{x^2}{n}\right)^n = \exp\left(n\ \ln\left(1-\frac{x^2}{n}\right)\right) \leqslant \exp\left(n\ \left(-\frac{x^2}{n}\right)\right) = e^{-x^2}\ .$$

— Comme $\dfrac{x^2}{n} > -1$, nous déduisons de la de la concavité du logarithme que :

$$\ln\left(1+\frac{x^2}{n}\right) \leqslant \frac{x^2}{n}$$

puis, comme la fonction $u \longmapsto \exp(-nu)$ est décroissante sur $\mathbf{R}$:

$$(\star\star) \qquad \mathrm{e}^{-x^2} = \exp\left(-n\,\frac{x^2}{n}\right) \leqslant \exp\left(-n\,\ln\left(1+\frac{x^2}{n}\right)\right) = \left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-n}.$$

De $(\star)$ et $(\star\star)$, nous déduisons :

$$\left(1-\frac{x^2}{n}\right)^n \leqslant \mathrm{e}^{-x^2} \leqslant \left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-n}.$$

12. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Déduire de la question précédente :

$$\sqrt{n}\,W_{2n+1} \leqslant \int_0^{\sqrt{n}} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x \leqslant \sqrt{n}\int_{\pi/4}^{\pi/2} (\sin(t))^{2n-2}\,\mathrm{d}t.$$

On pourra considérer les changements de variables $x = \sqrt{n}\cos(t)$ et $x = \dfrac{\sqrt{n}}{\tan(t)}$.

Soit $n \in \mathbf{N}^*$.

- Par croissance de l'intégrale, nous déduisons de la question précédente que :

$$(\star) \qquad \underbrace{\int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{x^2}{n}\right)^n \mathrm{d}x}_{=:I_n} \quad\leqslant\quad \int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x \quad\leqslant\quad \underbrace{\int_0^{\sqrt{n}} \left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-n} \mathrm{d}x}_{=:J_n}.$$

- Calculons I_n. À l'aide du changement de variable $x = \sqrt{n}\cos(t)$, il vient :

$$(\star\star) \qquad I_n = \int_{\pi/2}^{0} \left(1-\cos^2(t)\right)^n\,\sqrt{n}\,(-\sin(t))\,\mathrm{d}t = \sqrt{n}\int_0^{\pi/2} (\sin(t))^{2n+1}\,\mathrm{d}t = \sqrt{n}\,W_{2n+1}.$$

- Calculons J_n, que l'on peut considérer comme l'intégrale convergente de la fonction continue par morceaux

$$\left|\begin{array}{ccc}]0,\sqrt{n}] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \left(1+\dfrac{x^2}{n}\right)^{-n} \end{array}\right.$$

sur l'intervalle semi-ouvert $]0,\sqrt{n}]$. On lui applique le théorème de changement de variable pour $x = \dfrac{\sqrt{n}}{\tan(t)}$.
Il livre la convergence de l'intégrale :

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} \left(1+\frac{1}{\tan^2(t)}\right)^{-n} (-\sqrt{n})\,\left(1+\tan^2(t)\right)\,\frac{1}{\tan^2(t)}\,\mathrm{d}t$$

ainsi que l'identité :

$$(\star\star\star) \qquad \begin{aligned} \int_0^{\sqrt{n}} \left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-n} \mathrm{d}x &= \int_{\pi/2}^{\pi/4} \left(1+\frac{1}{\tan^2(t)}\right)^{-n} (-\sqrt{n})\,\left(1+\tan^2(t)\right)\,\frac{1}{\tan^2(t)}\,\mathrm{d}t \\ &= \sqrt{n}\int_{\pi/4}^{\pi/2} (\sin(t))^{2n-2}\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

- De $(\star)$, $(\star\star)$ et $(\star\star\star)$, on déduit :

$$\sqrt{n}\,W_{2n+1} \leqslant \int_0^{\sqrt{n}} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x \leqslant \sqrt{n}\int_{\pi/4}^{\pi/2} (\sin(t))^{2n-2}\,\mathrm{d}t.$$

13. En déduire la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\ \mathrm{d}x$.

- D'après la question 9, W_n est équivalent à $\sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$:

$$(\star) \qquad \sqrt{n}\, W_{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

- Par définition de la valeur d'une intégrale convergente et par composition de limites :

$$(\star\star) \qquad \int_0^{\sqrt{n}} \mathrm{e}^{-x^2}\ \mathrm{d}x \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\ \mathrm{d}x\ .$$

- Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} (\sin(t))^{2n-2}\ \mathrm{d}t = W_{2n-2} - \int_0^{\pi/4} (\sin(t))^{2n-2}\ \mathrm{d}t\ .$$

On observe que pour tout $t \in [0, \pi/4]$, $0 \leqslant \sin(t) \leqslant \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. On en déduit :

$$0 \leqslant \int_0^{\pi/4} (\sin(t))^{2n-2}\ \mathrm{d}t \leqslant \frac{\pi}{4}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2n-2}\ .$$

Donc $\displaystyle\int_0^{\pi/4} (\sin(t))^{2n-2}\ \mathrm{d}t = \mathrm{O}\left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2n-2}\right)$. Comme $-1 < \dfrac{\sqrt{2}}{2} < 1$, les résultats sur les croissances comparées livrent :

$$\int_0^{\pi/4} (\sin(t))^{2n-2}\ \mathrm{d}t = \mathrm{o}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

De cette étude et de la question 9, on déduit :

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} (\sin(t))^{2n-2}\ \mathrm{d}t = \sqrt{\frac{\pi}{4n-4}} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

puis :

$$(\star\star\star) \qquad \sqrt{n}\int_{\pi/4}^{\pi/2} (\sin(t))^{2n-2}\ \mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

- En faisant tendre n vers $+\infty$ dans l'inégalité de la question 12 et en appliquant $(\star)$, $(\star\star)$ et $(\star\star\star)$, il vient :

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\ \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\ .$$

À l'aide de la question 10, nous en déduisons :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\ \mathrm{d}x = \sqrt{\pi}\ .$$

3. Groupe orthogonal

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On munit $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ de la norme $||\cdot||_\infty$ et on considère :

$$\mathbf{O}_n(\mathbf{R}) := \left\{A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})\ :\ A \times A^\top = I_n\right\} \qquad \text{et} \qquad \mathbf{SO}_n(\mathbf{R}) := \{A \in \mathbf{O}_n(\mathbf{R})\ :\ \det(A) = 1\}\ .$$

14. Démontrer que $\mathbf{O}_n(\mathbf{R})$ est un sous-groupe de $(\mathscr{GL}_n(\mathbf{R}), \times)$.

- Une matrice de $\mathbf{O}_n(\mathbf{R})$ est inversible à droite donc inversible (cette matrice est carrée). Ainsi $\mathbf{O}_n(\mathbf{R}) \subset \mathscr{GL}_n(\mathbf{R})$.
- Clairement $I_n \in \mathbf{O}_n(\mathbf{R})$.
- Soient $A, B \in \mathbf{O}_n(\mathbf{R})$. Alors $B^{-1} = B^\top$ et :

$$A \times B^{-1} \times \left(A \times B^{-1}\right)^\top = A \times B^{-1} \times \left(B^{-1}\right)^\top \times A^\top = A \times B^{-1} \times B \times A^\top = A \times A^\top = I_n\ .$$

Donc $A \times B^{-1} \in \mathbf{O}_n(\mathbf{R})$.

15. Démontrer que $\mathbf{O}_n(\mathbf{R})$ est compact.

- D'après le cours sur $(\mathscr{M}_n(\mathbf{R}), ||\cdot||_\infty)$, il suffit de démontrer que $\mathbf{O}_n(\mathbf{R})$ est fermée et bornée.
- L'application :

$$f \left| \begin{array}{ccc} (\mathscr{M}_n(\mathbf{R}), ||\cdot||_\infty) & \longrightarrow & (\mathscr{M}_n(\mathbf{R}), ||\cdot||_\infty) \\ A & \longmapsto & A \times A^\top \end{array} \right.$$

est continue car, pour tout $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$, les coefficients de $f(A)$ sont des polynômes en les coefficients de A. Comme $\{I_n\}$ est un fermé de $(\mathscr{M}_n(\mathbf{R}), ||\cdot||_\infty)$:

$$\mathbf{O}_n(\mathbf{R}) = f^{-1}(\{I_n\})$$

est fermée dans $(\mathscr{M}_n(\mathbf{R}), ||\cdot||_\infty)$, comme image inverse d'une partie fermée par une application continue.
- Soit $A \in \mathbf{O}_n(\mathbf{R})$.
Pour tout $(k,\ell) \in [\![1,n]\!]^2$:

$$[A]_{k,\ell}^2 \leqslant \sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} [A]_{i,j}^2 = \operatorname{tr}\left(A \times A^\top\right) = n$$

Par croissance de la fonction racine carrée sur $\mathbf{R}_+$:

$$\left|[A]_{k,\ell}\right| \leqslant \underbrace{\sqrt{n}}_{\text{indépendant de } (k,\ell)\in[\![1,n]\!]^2}\ .$$

Par passage au maximum sur l'ensemble des $(k,\ell) \in [\![1,n]\!]^2$, il vient :

$$||A||_\infty \leqslant \underbrace{\sqrt{n}}_{\text{indépendant de } A\in\mathbf{O}_n(\mathbf{R})}\ .$$

La partie $\mathbf{O}_n(\mathbf{R})$ de $(\mathscr{M}_n(\mathbf{R}), ||\cdot||_\infty)$ est donc bornée.

16. Démontrer que $\mathbf{O}_n(\mathbf{R})$ n'est pas connexe par arcs.

Démontrons par l'absurde que $\mathbf{O}_n(\mathbf{R})$ est n'est pas connexe par arcs.
Supposons donc $\mathbf{O}_n(\mathbf{R})$ connexe par arcs.
Comme l'application :

$$\det \left| \begin{array}{ccc} (\mathscr{M}_n(\mathbf{R}), ||\cdot||_\infty) & \longrightarrow & (\mathbf{R}, |\cdot|) \\ A & \longmapsto & \displaystyle\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{k=1}^{n} [A]_{k,\sigma(k)} \end{array} \right.$$

est continue (le déterminant d'une matrice est un polynôme en les coefficients de cette matrice), $\det(\mathbf{O}_n(\mathbf{R}))$ est une partie connexe par arcs de $\mathbf{R}$ (image continue d'un connexe par arcs).
Ainsi $\det(\mathbf{O}_n(\mathbf{R}))$ est un intervalle de $\mathbf{R}$ (les connexes par arcs de $\mathbf{R}$ sont les intervalles).
Comme I_n et $\operatorname{diag}(-1,1,\ldots,1)$ appartiennent à $\mathbf{O}_n(\mathbf{R})$, les nombres $1 = \det(I_n)$ et $-1 = \operatorname{diag}(-1,1,\ldots,1)$ appartiennent à l'intervalle $\det(\mathbf{O}_n(\mathbf{R}))$.
Donc $0 \in [-1,1]$ appartient à $\det(\mathbf{O}_n(\mathbf{R}))$. Ainsi existe-t-il $A \in \mathbf{O}_n(\mathbf{R})$ tel que $\det(A) = 0$.
Contradiction (une matrice orthogonale est inversible).

17. Démontrer que $\mathbf{SO}_n(\mathbf{R})$ est compact.

Comme l'application :

$$\det \left| \begin{array}{ccc} (\mathscr{M}_n(\mathbf{R}), ||\cdot||_\infty) & \longrightarrow & (\mathbf{R}, |\cdot|) \\ A & \longmapsto & \displaystyle\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{k=1}^{n} [A]_{k,\sigma(k)} \end{array} \right.$$

est continue et $\{1\}$ est un fermé de $\mathbf{R}$:

$$\mathbf{SL}_n(\mathbf{R}) = \det^{-1}(\{1\}) \qquad \text{[groupe spécial linéaire]}$$

est fermé de $(\mathscr{M}_n(\mathbf{R}), ||\cdot||_\infty)$ (image inverse d'une partie fermée par une application continue).
Alors $\mathbf{SO}_n(\mathbf{R}) = \mathbf{O}_n(\mathbf{R}) \cap \mathbf{SL}_n(\mathbf{R})$ est fermé dans $(\mathscr{M}_n(\mathbf{R}), ||\cdot||_\infty)$ (intersection de fermés).
Comme $\mathbf{O}_n(\mathbf{R})$ est compact, nous en déduisons que $\mathbf{SO}_n(\mathbf{R}) \subset \mathbf{O}_n(\mathbf{R})$ est compact (un fermé d'un compact est compact).

18. On admet que :

$$\mathbf{SO}_2(\mathbf{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \,:\, \theta \in \mathbf{R} \right\}.$$

Démontrer que $\mathbf{SO}_2(\mathbf{R})$ est connexe par arcs.

L'application :

$$\rho \left| \begin{array}{ccc} (\mathbf{R}, |\cdot|) & \longrightarrow & (\mathscr{M}_2(\mathbf{R}), ||\cdot||_\infty) \\ \theta & \longmapsto & \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

est continue, car ses applications composantes $(\cos, -\sin, \sin, \cos)$ le sont.
L'ensemble $\mathbf{R}$ est connexe par arcs (convexe).
Nous en déduisons que :

$$\mathbf{SO}_2(\mathbf{R}) = \rho(\mathbf{R})$$

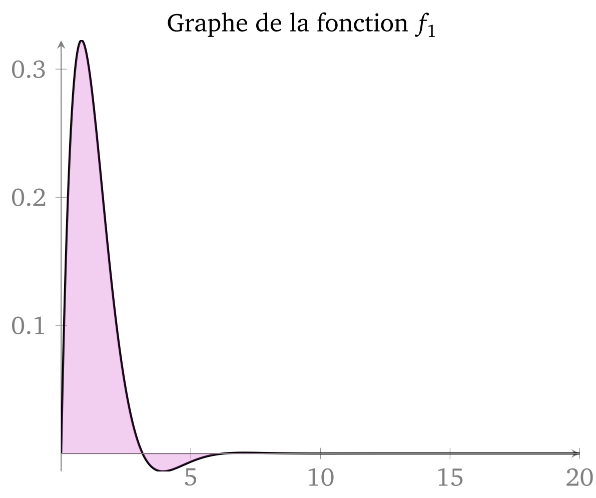
est connexe par arcs (image continue d'un connexe par arcs).

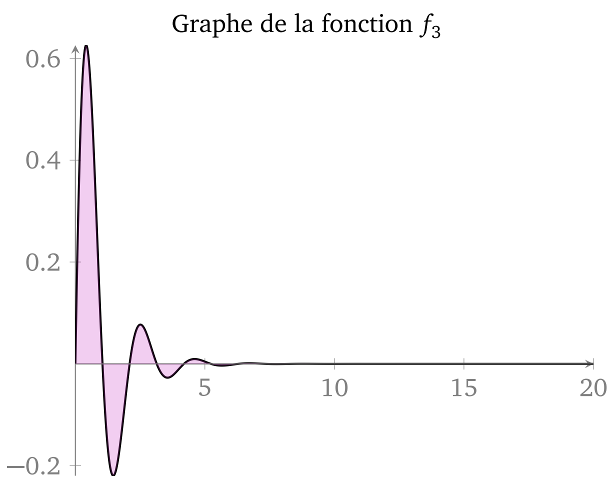
4. Lemme de Riemann-Lebesgue

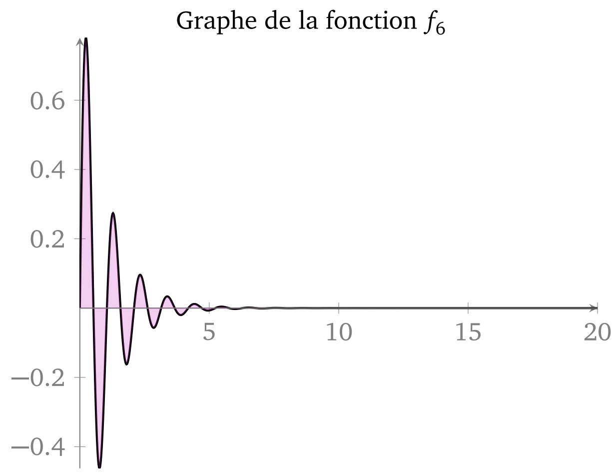
Nous nous proposons de démontrer :

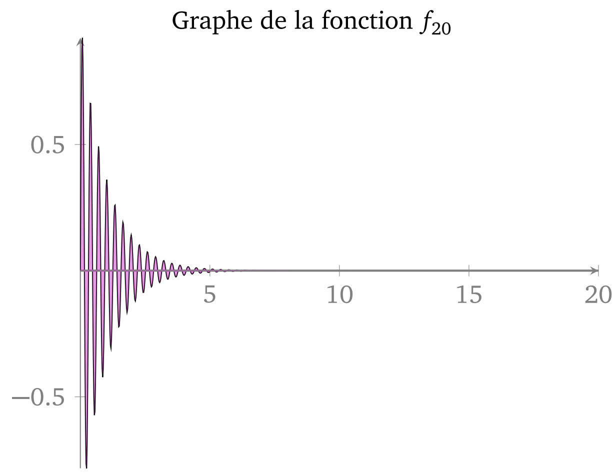
$$\forall f \in L^1([0,+\infty[,\mathbf{R}) \qquad \int_0^{+\infty} f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0\,. \qquad \text{[lemme de Riemann-Lebesgue]}$$

Ce résultat peut s'interpréter comme un phénomène asymptotique de compensation d'aires algébriques, que nous illustrons ci-dessous, en considérant quelques fonctions $f_n : t \longmapsto e^{-t}\sin(nt)$, où $n \in \mathbf{N}^*$.









Soient a et b des réels tels que $a < b$. On note $\mathscr{E}([a,b],\mathbf{R})$ l'ensemble des fonctions en escalier de $[a,b]$ dans $\mathbf{R}$, $\mathscr{CM}([a,b],\mathbf{R})$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux de $[a,b]$ dans $\mathbf{R}$ et $\mathscr{C}^0([a,b],\mathbf{R})$ l'ensemble des fonctions continues de $[a,b]$ dans $\mathbf{R}$. Enfin, $L^1([0,+\infty[\,,\mathbf{R})$ désigne l'ensemble des fonctions continues par morceaux de $[0,+\infty[$ dans $\mathbf{R}$, intégrables sur $[0,+\infty[$.

19. Démontrer que :

$$\forall f \in \mathscr{E}([a,b],\mathbf{R}) \qquad \int_a^b f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0\,.$$

Soit $f \in \mathscr{E}([a,b],\mathbf{R})$. Il existe donc un entier $p \in \mathbf{N}^*$, des réels $a_0,\ldots,a_p$ tels que :

- $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_p = b$;
- pour tout $i \in [\![0,p-1]\!]$, il existe $c_i \in \mathbf{R}$ tel que, pour tout $t \in \,]a_i,a_{i+1}[\,$, $f(t) = c_i$.

Soit $n \in \mathbf{N}^*$.

$$\int_a^b f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{p-1}\int_{a_k}^{a_{k+1}} c_k\sin(nt)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{p-1} c_k\,\frac{\cos(a_k n)-\cos(a_{k+1}n)}{n}$$

Nous en déduisons que :

$$0 \leqslant \left|\int_a^b f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{p-1}|c_k|\,\left(|\cos(a_k n)| + |\cos(a_{k+1}n)|\right) \leqslant \left(\sum_{k=0}^{p-1}|c_k|\right)\frac{2}{n} \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right).$$

Par théorème d'encadrement, il vient :

$$\int_a^b f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0\,.$$

20. Soit $f \in \mathscr{C}^0([a,b],\mathbf{R})$. Démontrer, à l'aide du théorème de Heine, que :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \varphi_\varepsilon \in \mathscr{E}([a,b],\mathbf{R}) \qquad \|f-\varphi_\varepsilon\|_\infty \leqslant \varepsilon\,.$$

Soit $\varepsilon > 0$.

- L'application f est continue sur le compact $[a,b]$. Elle est donc uniformément continue. Ainsi, il existe $\alpha > 0$ tel que :

$$\forall (t_1,t_2) \in [a,b]^2 \quad |t_1-t_2| \leqslant \alpha \implies |f(t_1)-f(t_2)| \leqslant \varepsilon\,.$$

Comme $\mathbf{R}$ est archimédien, il existe $p \in \mathbf{N}^*$ tel que $\dfrac{b-a}{p} \leqslant \alpha$. Posons alors, pour tout $k \in [\![0,p-1]\!]$:

$$a_k := a + k\,\frac{b-a}{p}$$

et $a_p := b$, de sorte que :

$$a = a_0 < a_1 < \ldots < a_p = b\,.$$

- Soit φ_ε la fonction définie sur $[a,b]$ par :

$$\forall\, k \in [\![0, p-1]\!] \quad \forall\, t \in [a_k, a_{k+1}[\quad \varphi_\varepsilon(t) = f(a_k)$$

et $\varphi_\varepsilon(b) = f(b)$. Cette fonction est en escalier, par construction.

- Soit $t \in [a,b]$.
  — S'il existe $k \in [\![0, p-1]\!]$ tel que $t \in [a_k, a_{k+1}[$, alors :

$$|t - a_k| = t - a_k \leqslant a_{k+1} - a_k = \leqslant \frac{b-a}{p} \leqslant \alpha$$

  et donc :

$$|f(t) - \varphi_\varepsilon(t)| = |f(t) - f(a_k)| \leqslant \varepsilon\ .$$

  — Si $t = b$, alors :

$$|f(t) - \varphi_\varepsilon(t)| = 0 \leqslant \varepsilon\ .$$

  Ainsi :

$$\forall\, t \in [a,b] \quad |f(t) - \varphi_\varepsilon(t)| \leqslant \underbrace{\varepsilon}_{\text{indépendant de } t \in [a,b]}\ .$$

  Par passage à la borne supérieure sur l'ensemble des $t \in [a,b]$, il vient :

$$\|f - \varphi_\varepsilon\|_\infty := \sup_{t \in [a,b]} |f(t) - \varphi_\varepsilon(t)| \leqslant \varepsilon\ .$$

21. Démontrer alors que :

$$\forall\, f \in \mathscr{C}^0([a,b], \mathbf{R}) \quad \int_a^b f(t) \sin(nt)\ \mathrm{d}t \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

puis :

$$\forall\, f \in \mathscr{CM}([a,b], \mathbf{R}) \quad \int_a^b f(t) \sin(nt)\ \mathrm{d}t \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0\ .$$

- Soit $f \in \mathscr{C}^0([a,b], \mathbf{R})$.
  Fixons $\varepsilon > 0$.
  D'après la question précédente, il existe $\varphi_\varepsilon \in \mathscr{E}([a,b], \mathbf{R})$ tel que $\|f - \varphi_\varepsilon\|_\infty \leqslant \varepsilon$.
  Soit $n \in \mathbf{N}$. D'après l'inégalité triangulaire dans $\mathbf{R}$:

$$(\star) \qquad \left| \int_a^b f(t) \sin(nt)\ \mathrm{d}t \right| \leqslant \left| \int_a^b (f(t) - \varphi_\varepsilon(t)) \sin(nt)\ \mathrm{d}t \right| + \left| \int_a^b \varphi_\varepsilon(t) \sin(nt)\ \mathrm{d}t \right|$$

  D'après l'inégalité triangulaire pour l'intégrale :

$$(\star\star) \qquad \left| \int_a^b (f(t) - \varphi_\varepsilon(t)) \sin(nt)\ \mathrm{d}t \right| \leqslant \int_a^b \underbrace{|f(t) - \varphi_\varepsilon(t)|}_{\leqslant \|f - \varphi_\varepsilon\|_\infty}\ \mathrm{d}t \leqslant \int_a^b \varepsilon\ \mathrm{d}t = \varepsilon(b-a)\ .$$

  D'après la question 19, il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que :

$$(\star\star\star) \qquad \forall\, n \geqslant N \quad \left| \int_a^b \varphi_\varepsilon(t) \sin(nt)\ \mathrm{d}t \right| \leqslant \varepsilon\ .$$

  De $(\star)$, $(\star\star)$ et $(\star\star\star)$ nous déduisons que :

$$\forall\, n \geqslant N \quad \left| \int_a^b f(t) \sin(nt)\ \mathrm{d}t \right| \leqslant \varepsilon(b-a+1)\ .$$

  Ainsi :

$$\int_a^b f(t) \sin(nt)\ \mathrm{d}t \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0\ .$$

- Soit $f \in \mathscr{CM}([a,b],\mathbf{R})$.
  Il existe donc un entier $p \in \mathbf{N}^*$, des réels $a_0, \dots, a_p$ tels que :
  — $a = a_0 < a_1 < \dots < a_p = b$;
  — pour tout $i \in [\![0, p-1]\!]$, la fonction $f_{]a_i, a_{i+1}[}$ est prolongeable par continuité à $[a_i, a_{i+1}]$.
  Pour tout $i \in [\![0, p-1]\!]$, nous noterons $f_i : [a_i, a_{i+1}] \longrightarrow \mathbf{R}$ le prolongement par continuité de $f_{]a_i,a_{i+1}[}$ au segment $[a_i, a_{i+1}]$.
  Par définition de l'intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment, pour tout $n \in \mathbf{N}$:
  $$\int_a^b f(t)\sin(nt)\, \mathrm{d}t = \sum_{i=0}^{p-1} \int_a^b f_i(t)\sin(nt)\, \mathrm{d}t\ .$$
  Comme pour tout $i \in [\![0, p-1]\!]$, la fonction f_i est continue sur le segment $[a_i, a_{i+1}]$, le point précédent livre :
  $$\int_{a_i}^{a_{i+1}} f_i(t)\sin(nt)\, \mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0\ .$$
  Par opération sur les limites, nous en déduisons (p est fixe, indépendant de n) :
  $$\int_a^b f(t)\sin(nt)\, \mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0\ .$$

22. Démontrer enfin que :
$$\forall f \in L^1([0,+\infty[,\mathbf{R}) \quad \int_0^{+\infty} f(t)\sin(nt)\, \mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0\ .$$

Soit $f \in L^1([0,+\infty[,\mathbf{R})$.
Fixons $\varepsilon > 0$.

- Comme l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f(t)|\, \mathrm{d}t$ converge :
  $$\int_A^{+\infty} |f(t)|\, \mathrm{d}t \xrightarrow[A\to+\infty]{} 0\ .$$
  Il existe donc un réel $A_\varepsilon \geqslant 0$ tel que :
  $$(\star) \qquad \forall A \geqslant A_\varepsilon \quad \int_A^{+\infty} |f(t)|\, \mathrm{d}t\ .$$
- D'après la question 21, il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que :
  $$(\star\star) \qquad \forall\, n \geqslant N \quad \left| \int_0^{A_\varepsilon} f(t)\sin(nt)\, \mathrm{d}t \right| \leqslant \varepsilon\ .$$
- Soit $n \geqslant N$. D'après $(\star)$ et $(\star\star)$:

$$\begin{aligned}\left|\int_0^{+\infty} f(t)\sin(nt)\ \mathrm{d}t\right| &= \left|\int_0^{A_\varepsilon} f(t)\sin(nt)\ \mathrm{d}t + \int_{A_\varepsilon}^{+\infty} f(t)\sin(nt)\ \mathrm{d}t\right| \\ &\leqslant \left|\int_0^{A_\varepsilon} f(t)\sin(nt)\ \mathrm{d}t\right| + \left|\int_{A_\varepsilon}^{+\infty} f(t)\sin(nt)\ \mathrm{d}t\right| \\ &\leqslant \varepsilon + \int_{A_\varepsilon}^{+\infty} |f(t)\sin(nt)|\ \mathrm{d}t \\ &\leqslant \varepsilon + \int_{A_\varepsilon}^{+\infty} |f(t)|\ \mathrm{d}t \\ &\leqslant 2\varepsilon\end{aligned}$$

donc :

$$\int_0^{+\infty} f(t)\sin(nt)\ \mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0\ .$$

5. Théorème du point fixe de Markov-Kakutani

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension $n \geqslant 1$ dont le produit scalaire est noté $\langle\cdot\,,\,\cdot\rangle$ et la norme euclidienne est notée $\|\cdot\|$.

On note $\mathscr{L}(E)$ l'espace vectoriel des endomorphismes de E et $\mathscr{GL}(E)$ le groupe des automorphismes de E.

Pour tout endomorphisme u de E, on note u^i l'endomorphisme $u\circ u\circ\cdots\circ u$ (i fois) avec la convention $u^0 = \mathrm{Id}_E$ (identité). L'ensemble vide est noté $\emptyset$.

On rappelle qu'un sous-ensemble C de E est *convexe* si pour tous x, y dans C et tout $\lambda \in [0,1]$, on a $\lambda x + (1-\lambda)y \in C$. De plus, pour toute famille $a_1,\dots,a_p$ d'éléments de C convexe et tous nombres réels positifs ou nuls $\lambda_1,\dots,\lambda_p$ dont la somme est égale à 1, on a $\displaystyle\sum_{i=1}^{p}\lambda_i a_i \in C$.

Soit $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'éléments de E pour laquelle il existe un réel $\varepsilon > 0$ tel que pour tous entiers naturels $n \neq p$, on ait $\|x_n - x_p\| \geqslant \varepsilon$.

23. Démontrer que cette suite n'admet aucune suite extraite convergente.

Par l'absurde, on suppose qu'il existe une suite extraite $\left(x_{\varphi(n)}\right)$ convergente.
Ainsi la suite $\left(x_{\varphi(n+1)} - x_{\varphi(n)}\right)$ converge vers 0.
Ceci nous fournit $N \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $p \geqslant N$, on ait $\|x_{\varphi(p+1)} - x_{\varphi(p)}\| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$.
Absurde.
Ainsi cette suite n'admet aucune suite extraite convergente

Soit K un sous-ensemble compact de E. On note $B(x,r)$ la boule ouverte de centre $x\in E$ et de rayon r.

24. Montrer que pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un entier $p > 0$ et $x_1,\dots,x_p$ éléments de E tels que $K \subseteq \displaystyle\bigcup_{i=1}^{p} B(x_i,\varepsilon)$. On pourra raisonner par l'absurde.

Par l'absurde, on suppose que la propriété à démontrer est fausse.
Ceci nous fournit $\varepsilon > 0$, tel que pour tout $p \in \mathbf{N}^*$ et $x_1,\dots,x_p$ éléments de E on ait $K \not\subset \displaystyle\bigcup_{i=1}^{p} B(x_i,\varepsilon)$.

On va construire par récurrence une suite $(x_k)_{k\geqslant 1}$ à valeurs dans K telle que pour tout entier naturel $n \neq p$, on ait $\|x_p - x_n\| \geqslant \varepsilon$.
Par hypothèse, on a $K \not\subset B(a_1, \varepsilon)$ pour tout $a_1 \in E$, ce qui nous fournit $x_1 \in K \setminus B(a_1, \varepsilon)$.
Soit $k \in \mathbf{N}^*$.
On suppose construits $x_1, \ldots, x_k \in K$ tel que, pour tout entier naturel $n \neq p \in [\![1, k]\!]$, on ait $\|x_p - x_n\| \geqslant \varepsilon$.
On a alors $K \setminus \bigcup_{i=1}^{p} B(x_i, \varepsilon) \neq \emptyset$.
Ceci nous fournit $x_{k+1} \in K$ tel que pour tout entiers naturels $n \neq p \in [\![1, k+1]\!]$, on ait $\|x_p - x_n\| \geqslant \varepsilon$.
La suite ainsi construite $(x_k)_{k\geqslant 1}$ vérifie pour tout entiers naturels $n \neq p$, on a $\|x_p - x_n\| \geqslant \varepsilon$.
D'après la question précédente, cette suite n'admet pas de valeur d'adhérence ?
Or il s'agit d'une suite à valeurs dans le compact K, ce qui est absurde.
Ainsi,pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un entier $p > 0$ et $x_1, \ldots, x_p$ éléments de E tels que $K \subseteq \bigcup_{i=1}^{p} B(x_i, \varepsilon)$.

On considère une famille $(\Omega_i)_{i\in I}$ de sous-ensembles ouverts de E, I étant un ensemble quelconque, telle que $K \subseteq \bigcup_{i\in I} \Omega_i$.

25. Montrer qu'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in K$, il existe $i \in I$ tel que $B(x, \alpha)$ soit contenue dans l'ouvert Ω_i. (On pourra raisonner par l'absurde pour construire une suite d'éléments de K n'ayant aucune suite extraite convergente.)
En déduire qu'il existe une sous-famille finie $(\Omega_{i_1}, \ldots, \Omega_{i_p})$ de la famille $(\Omega_i)_{i\in I}$ telle que $K \subseteq \bigcup_{k=1}^{p} \Omega_{i_k}$.

Par l'absurde, on suppose que pour tout réel $\alpha > 0$, il existe $x \in K$, tel que pour tout $i \in I$, on ait $B(x, \alpha) \not\subset \Omega_i$.
Ainsi pour $n \in \mathbf{N}^*$, ceci nous fournit $x_n \in K$ tel que, pour tout $i \in I$, on ait $B(x_n, 1/n) \not\subset \Omega_i$.
La suite (x_n) à valeurs dans le compact K admet une suite extraite $(x_{\varphi(n)})$ qui converge vers une valeur d'adhérence $\ell \in K$.
Comme $K \subseteq \bigcup_{i\in I} \Omega_i$, ceci nous fournit $j \in I$ tel que $\ell \in \Omega_j$.
Comme Ω_j est un ouvert, ceci nous fournit $r > 0$ tel que $B(\ell, r) \subset \Omega_j$.
Comme $(x_{\varphi(n)})$ converge vers ℓ, ceci nous fournit $N_1 \in \mathbf{N}$ tel que :

$$\forall n \geqslant N_1 \qquad \|x_{\varphi(n)} - \ell\| \leqslant r/3\ .$$

Comme $\left(\dfrac{1}{\varphi(n)}\right)$ converge vers 0, ceci nous fournit $N_2 \in \mathbf{N}$ tel que :

$$\forall n \geqslant N_2 \qquad \frac{1}{\varphi(n)} \leqslant r/3\ .$$

On pose $p = \max(\varphi(N_1), \varphi(N_2))$ et comme $2r/3 < r$, on a d'après l'inégalité triangulaire $B\left(x_p, \frac{1}{p}\right) \subset B(\ell, r)$ ce qui absurde par construction de de la suite (x_n).
Ainsi il existe un réel noté $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in K$, il existe $i \in I$ tel que $B(x, \alpha)$ soit contenue dans l'ouvert Ω_i.
Lors de la question précédente, on pouvait obtenir de façon analogue l'existence d'un entier $p > 0$ et $x_1, \ldots, x_p$ éléments de K (*preuve identique que pour* E) tels que $K \subseteq \bigcup_{j=1}^{p} B(x_j, \varepsilon)$.
Pour $j \in [\![1, p]\!]$, ce qui est fait au dessus nous fournit $i_j \in I$ tel que $B(x_j, \alpha) \subseteq \Omega_{i_j}$.
D'où l'existence d'une sous-famille finie $(\Omega_{i_1}, \ldots, \Omega_{i_p})$ de la famille $(\Omega_i)_{i\in I}$ telle que $K \subseteq \bigcup_{k=1}^{p} \Omega_{i_k}$.

Soit $(F_i)_{i\in I}$ une famille de fermés de E contenus dans K et d'intersection vide, i.e. $\bigcap_{i\in I} F_i = \emptyset$.

26. Montrer qu'il existe une sous famille finie $(F_{i_1}, \ldots, F_{i_p})$ de la famille $(F_i)_{i\in I}$ telle que $\bigcap_{k=1}^{p} F_{i_k} = \emptyset$.

Je note pour $i \in I$, $O_i = E \setminus F_i$ qui est un ouvert de E par complémentaire et on a $K \subseteq \bigcup_{i\in I} O_i$.

La question précédente nous fournit une sous famille finie $(O_{i_1}, \ldots, O_{i_p})$ telle que $K \subseteq \bigcap_{k=1}^{p} O_{i_k}$.

On a donc $K \bigcap \left(\bigcap_{k=1}^{p} F_{i_k} \right) = \emptyset$

Comme pour tout $i \in I$, on a $F_i \subset K$, la sous famille finie $(F_{i_1}, \ldots, F_{i_p})$ vérifie $\bigcap_{k=1}^{p} F_{i_k} = \emptyset$.

Pour toute la suite du problème, nous admettrons le :

Théorème. — Toute application linéaire entre deux **R**-espaces vectoriels de dimension finie est continue.

qui sera démontré la semaine prochaine en classe.

Ce résultat nous permet en outre de justifier que l'application :

$$|||\cdot||| \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{L}(E) & \longrightarrow & \mathbf{R}^+ \\ u & \longmapsto & \sup\limits_{x \in \overline{B(0_E,1)}} ||u(x)|| \end{array} \right.$$

est bien définie. Nous admettons qu'il s'agit d'une norme et nous munissons $\mathscr{L}(E)$ de celle-ci.

Soient G un sous-groupe compact de $\mathscr{GL}(E)$ et, pour tout $x \in E$, $N_G(x) := \sup\limits_{u \in G} \|u(x)\|$.

27. Montrer que N_G est bien définie et que c'est une norme sur E.

Soit $x, y \in E$ et $\lambda \in \mathbf{R}$. Montrons : $\left\{ \begin{array}{ll} \text{(i)} & N_G(x) \text{ existe dans } \mathbf{R}^+ \textit{ (aspect bien défini et positivité)} \\ \text{(ii)} & N_G(x+y) \leqslant N_G(x) + N_G(y) \textit{ (inégalité triangulaire)} \\ \text{(iii)} & N_G(\lambda x) = |\lambda| \cdot N_G(x) \textit{ (homgénéité)} \\ \text{(iv)} & N_G(x) = 0 \Longrightarrow x = 0 \textit{ (caractère défini)} \end{array} \right.$

(i) L'application :

$$\left| \begin{array}{ccc} (\mathscr{L}(E), |||\cdot|||) & \longrightarrow & (E, ||\cdot||) \\ u & \longmapsto & u(x) \end{array} \right.$$

est linéaire. Comme $\dim(\mathscr{L}(E)) < +\infty$ et $\dim(E) < +\infty$, elle est continue.
Ainsi cette application est bornée sur le compact G.
Donc $\{\|u(x)\| \ : \ u \in G\}$ est une partie non vide et majorée de $\mathbf{R}^+$.
D'où l'existence dans $\mathbf{R}^+$ de $N_G(x) = \sup\limits_{u \in G} \|u(x)\|$.

(ii) Soit $u \in G$. On a $\|u(x+y)\| = \|u(x) + u(y)\| \leqslant \|u(x)\| + \|u(y)\|$.
Donc $\|u(x+y)\| \leqslant N_G(x) + N_G(y)$.
Comme c'est vrai pour tout $u \in G$, on a bien $N_G(x+y) \leqslant N_G(x) + N_G(y)$ (passage à la borne supérieure).

(iii) Si $\lambda = 0$, on a l'égalité car $N_G(\lambda x) = 0 = |\lambda| \cdot N_G(x)$.
On suppose $\lambda \neq 0$.
Soit $u \in G$.
On a $\|u(\lambda x)\| = |\lambda| \cdot \|u(x)\| \leqslant |\lambda| \cdot N_G(x)$?
Comme c'est vrai pour tout u de G, on obtient : $N_G(\lambda x) \leqslant |\lambda| \cdot N_G(x)$ (passage à la borne supérieure).
On applique cette inégalité au scalaire $1/\lambda$ et au vecteur λx : $N_G(x) \leqslant |1/\lambda| \cdot N_G(\lambda x)$.
Donc $N_G(\lambda x) \geqslant |\lambda| \cdot N_G(x)$
D'où l'égalité.

(iv) On suppose $N_G(x) = 0$.
Donc pour tout ,$u \in G$, $\|u(x)\| = 0$.
En particulier pour $u = \mathrm{id}_E$ car G sous groupe de $\mathscr{GL}(E)$.
Donc $x = 0$.

On a montré que N_G est bien définie et que c'est une norme sur E.

28. Montrer en outre que N_G vérifie les deux propriétés suivantes :
   - pour tous $u \in G$ et $x \in E$, $N_G(u(x)) = N_G(x)$;
   - pour tous $x, y \in E$ avec x non nul, $N_G(x+y) = N_G(x) + N_G(y)$ si et seulement si $\lambda x = y$ où $\lambda \in \mathbf{R}^+$.

   Pour la deuxième propriété, on pourra utiliser le fait que si $z \in E$, l'application qui à $u \in G$ associe $\|u(z)\|$ est continue.

- Soit $u \in G$ et $x \in E$.
  L'application $v \longmapsto v \circ u$ est une bijection du groupe G dans lui-même, de bijection réciproque $v \longmapsto v \circ u^{-1}$.
  Donc $N_G(u(x)) = \sup_{v \in G} \|v \circ u(x)\| = \sup_{w \in G} \|w(x)\| = N_G(x)$.
  Ainsi, pour tous $u \in G$ et $x \in E$, $N_G(u(x)) = N_G(x)$.
- Soit $x, y \in E$ tel que x est non nul.
  $\boxed{\Longleftarrow}$ On suppose qu'il existe $\lambda \in \mathbf{R}^+$ tel que $\lambda x = y$.
  Pour tout $u \in G$, on a $\|u(x+y)\| = (1+\lambda) \cdot \|u(x)\|$ car $1 + \lambda \geqslant 0$.
  En faisant comme pour l'homogénéité, on obtient $N_G(x+y) = (1+\lambda) N_G(x)$
  Donc $N_G(x+y) = N_G(x) + N_G(y)$ car $\lambda \geqslant 0$ et N_G est une norme.
  $\boxed{\Longrightarrow}$ On suppose que $N_G(x+y) = N_G(x) + N_G(y)$.
  Le théorème des bornes atteintes, avec l'application $u \longmapsto \|u(x)\|$ continue définie sur le compact G, nous fournit $v \in G$ tel que $N_G(x+y) = \|v(x+y)\|$.
  On note $x' = v(x)$ et $y' = v(y)$ de sorte que $N_G(x+y) = \|x' + y'\|$.
  Avec ce qui précède, on a $N_G(x) + N_G(y) = N_G(x') + N_G(y')$.
  Donc $\|x' + y'\| = N_G(x') + N_G(y')$.
  Ainsi $N_G(x') + N_G(y') \leqslant \|x'\| + \|y'\|$ en utilisant l'inégalité triangulaire pour $\|\cdot\|$.
  Or $N_G(x') \geqslant \|x'\|$ et $N_G(y') \geqslant \|y'\|$ car $\mathrm{id}_E \in G$.
  Donc $\|x' + y'\| = N_G(x') + N_G(y') = \|x'\| + \|y'\|$.
  En élevant au carré on trouve après simplification :
  $$(\star) \qquad 2 \left\langle x', y' \right\rangle = 2\|x'\| \times \|y'\| \,.$$
  Donc (x', y') lié d'après le cas d'égalité de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
  Comme $x' \neq 0$ car $v \in \mathscr{GL}(E)$, ceci nous fournit $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que :
  $$(\star\star) \qquad \lambda x' = y' \,.$$
  En injectant dans $(\star)$, $2\lambda \cdot \|x'\|^2 = 2|\lambda| \cdot \|x'\|^2$.
  D'où $\lambda \in \mathbf{R}^+$ car $\|x'\|^2 > 0$.
  En appliquant v^{-1} à $(\star\star)$, on a $\lambda x = y$.
  On a bien, pour tous $x, y \in E$ avec x non nul, $N_G(x+y) = N_G(x) + N_G(y)$ si et seulement si $\lambda x = y$ où $\lambda \in \mathbf{R}^+$.

Soit K un sous-ensemble non vide, compact et *convexe* de E. On considère un élément $u \in \mathscr{L}(E)$, et on suppose que K est stable par u, c'est à dire que $u(K)$ est inclus dans K. Pour tout $x \in K$ et $n \in \mathbf{N}^*$, on pose $x_n = \dfrac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} u^i(x)$. Enfin, on appelle *diamètre* de K le réel $\delta(K) = \sup_{x,y \in K} \|x - y\|$, qui est bien défini car K est borné.

29. Montrer que la suite $(x_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ est à valeurs dans K et en déduire qu'il en existe une suite extraite convergente vers un élément a de K. Montrer par ailleurs que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\|u(x_n) - x_n\| \leqslant \dfrac{\delta(K)}{n}$. En déduire que l'élément a de K est un point fixe de u.

Soit $x \in K$.
Comme K est stable par u, on montre par récurrence sur i que $u^i(x) \in K$ pour tout $i \in \mathbf{N}$.
Ainsi x_n est le barycentre du système pondéré $\big((u^i(x), 1/n)\big)_{0 \leqslant i \leqslant n-1}$ à coefficients positifs.
Comme K est convexe, on a $x_n \in K$.
Comme K est compact, la suite $(x_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ qui est à valeurs dans K admet une suite extraite convergente vers un élément a de K.

Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On a $\|u(x_n) - x_n\| = \frac{1}{n}\|u^n(x) - x\|$.
Donc $\|u(x_n) - x_n\| \leqslant \dfrac{\delta(K)}{n}$, car x et $u^n(x) \in K$.
Notons φ une extractrice telle que $\left(x_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge vers a.
Donc pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on a :

$$\|u(x_{\varphi(n)}) - x_{\varphi(n)}\| \leqslant \frac{\delta(K)}{\varphi(n)}$$

et de plus $\dfrac{\delta(K)}{\varphi(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Comme l'application

$$\left|\begin{array}{ccc} (E, \|\cdot\|) & \longrightarrow & (E, \|\cdot\|) \\ y & \longmapsto & u(y) - y \end{array}\right.$$

est continue (linéaire entre espaces de dimension finie), $\left(u(x_{\varphi(n)}) - x_{\varphi(n)}\right)$ converge vers $u(a) - a = 0$,
Ainsi l'élément a de K est un point fixe de u.

On suppose maintenant que le compact non vide convexe K est stable par tous les éléments de G. Soit $r \geqslant 1$ un entier, $u_1, u_2, \ldots, u_r$ des éléments de G et $u = \dfrac{1}{r}\displaystyle\sum_{i=1}^{r} u_i$.

30. Montrer que K est stable par u et en déduire l'existence de $a \in K$ tel que $u(a) = a$.

Soit $x \in K$.
$u(x)$ est le barycentre $((u_i(x), 1/r))_{1\leqslant i\leqslant r}$ de points de K affectés de coefficients positifs.
Donc $u(x) \in K$ car K convexe ainsi **K** est stable par u.
Comme $u \in \mathscr{L}(E)$, par combinaison linéaire, on peut appliquer la question précédente, pour en déduire l'existence de $a \in K$ tel que $u(a) = a$.

31. Montrer que $N_G\left(\dfrac{1}{r}\displaystyle\sum_{i=1}^{r} u_i(a)\right) = \dfrac{1}{r}\displaystyle\sum_{i=1}^{r} N_G(u_i(a))$. En déduire que pour tout $j \in \{1, \ldots, r\}$, on a :

$$N_G\left(u_j(a) + \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{r} u_i(a)\right) = N_G(u_j(a)) + N_G\left(\sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{r} u_i(a)\right).$$

Comme $u(a) = a$, on a $N_G\left(\dfrac{1}{r}\displaystyle\sum_{i=1}^{r} u_i(a)\right) = N_G\left(u(a)\right) = N_G(a)$.
D'après le premier point de la question 28, on a $N_G(u_i(a)) = N_G(a)$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant r$.
D'où $\dfrac{1}{r}\displaystyle\sum_{i=1}^{r} N_G(u_i(a)) = \dfrac{r}{r} N_G(a)$. On a bien $N_G\left(\dfrac{1}{r}\displaystyle\sum_{i=1}^{r} u_i(a)\right) = \dfrac{1}{r}\displaystyle\sum_{i=1}^{r} N_G(u_i(a))$.
Ainsi par homogénéité, $N_G\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{r} u_i(a)\right) = \displaystyle\sum_{i=1}^{r} N_G(u_i(a))$ car $r \geqslant 0$.
Soit $j \in \{1, \ldots, r\}$. Avec ce qui précède et en utilisant l'inégalité triangulaire pour N_G, on a :

$$N_G\left(u_j(a) + \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{r} u_i(a)\right) \leqslant N_G(u_j(a)) + N_G\left(\sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{r} u_i(a)\right) \leqslant \sum_{i=1}^{r} N_G\left(u_i(a)\right) = N_G\left(u_j(a) + \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{r} u_i(a)\right).$$

Donc on a bien $N_G\left(u_j(a) + \displaystyle\sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{r} u_i(a)\right) = N_G(u_j(a)) + N_G\left(\displaystyle\sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{r} u_i(a)\right)$.

32. En déduire, pour tout $j \in \{1, \dots, r\}$, l'existence d'un nombre réel $\lambda_j \geqslant 0$ tel que $u(a) = \dfrac{\lambda_j + 1}{r} u_j(a)$.

Soit $j \in \{1, \dots, r\}$.

- On suppose dans un premier temps que $u_j(a)$ est un vecteur non nul de E.
  En appliquant le deuxième point de la question 28, à la question précédente, on obtient l'existence de $\lambda_j \geqslant 0$ tel que $\displaystyle\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{r} u_i(a) = \lambda_j u_j(a)$.
  Donc $ru(a) = \lambda_j u_j(a) + u_j(a)$ ce qui permet de conclure dans ce cas car $r > 0$.
- Dans un deuxième temps, si $u_j(a)$ est le vecteur nul de E alors $a = 0$ car $u_j \in \mathscr{GL}(E)$.
  En prenant $\lambda_j = 1$ on a $u(a) = 0$ et $\dfrac{\lambda_j + 1}{r} u_j(a) = 0$ car u et u_j linéaires.

Pour tout $j \in \{1, \dots, r\}$, on a l'existence d'un nombre réel $\lambda_j \geqslant 0$ tel que $u(a) = \dfrac{\lambda_j + 1}{r} u_j(a)$ dans tous les cas.

33. Déduire de la question précédente que a est un point fixe de tous les endomorphismes u_i où $i \in \{1, \dots, r\}$.

On suppose par l'absurde qu'il existe $i \in \{1, \dots, r\}$ tel que a ne soit pas un point fixe de l'endomorphisme u_i.
On a $a = u(a) = \dfrac{\lambda_i + 1}{r} u_i(a)$ donc $u_i(a) = \mu a$ où $\mu = \dfrac{r}{\lambda_i + 1} > 0$ car $r > 0$ et $\lambda_i \geqslant 0$.
On a donc $\mu \neq 1$ et $a \neq 0$.

- Premier cas. — Si $\mu > 1$, alors pour tout $k \in \mathbf{N}$, $u_i^k(a) = \mu^k a$.
  Comme K est stable par u_i alors la suite $(u_i^k(a))_k$ est à valeurs dans K (récurrence immédiate).
  Comme K est bornée car compact, alors cette suite est bornée. Or $\|u_i^k(a)\| = \mu^k \cdot \|a\| \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
  Absurde.
- Deuxième cas. — Si $\mu < 1$, alors on a $u_i^{-1}(a) = \frac{1}{\lambda} a$ où $\frac{1}{\lambda} > 1$ et K est stable par l'automorphisme u_i^{-1}.
  En faisant comme dans le cas précédent avec u_i^{-1}, on arrive à une absurdité de façon analogue.

Ainsi a est un point fixe de tous les endomorphismes u_i où $i \in \{1, \dots, r\}$.

34. En utilisant le résultat de la question 26, démontrer qu'il existe $a \in K$ tel que, pour tout $u \in G$, $u(a) = a$.

On note, pour $u \in G$, $F_u = \{a \in K\} u(a) = a$.
Comme pour $u \in G$, $u - \mathrm{id}_E$ est continue (linéaire entre espaces de dimension finie).
Alors $F_u = (u - \mathrm{id}_E)^{-1}(\{0\})$ est un fermé de K (image réciproque de fermé par une application continue).
Comme K est un fermé de E (car compact de E) et $F_u \subset K$, alors F_u est un fermé de E (on aurait pu aussi remarquer que $F_u = K \cap \{a \in E \ : \ u(a) = a\}$).
On suppose par l'absurde que $\displaystyle\bigcap_{u \in G} F_u = \emptyset$.
La question 26, nous fournit $p \in \mathbf{N}^*$ et $u_1, \dots, u_p \in G$ tels que $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{p} F_{u_i} = \emptyset$.
Ceci est contradictoire avec la question précédente ainsi $\displaystyle\bigcap_{u \in G} F_u \neq \emptyset$.
Ce qui nous fournit $a \in \displaystyle\bigcap_{u \in G} F_u$.
Ainsi, il existe bien $a \in K$ tel que pour tout $u \in G$, $u(a) = a$.

Nous avons ainsi démontré le théorème de Markov-Kakutani.

Andreï Markov (1856-1922)

Théorème. — Soient E est un espace euclidien, G un sous-groupe compact de $\mathscr{L}(E)$ et K une partie de E qui est non vide, convexe et stable par tous les éléments de G. Alors il existe $x \in K$ tel que, pour tout $u \in G$, $u(x) = x$.

Shizuo Kakutani (1911-2004)