

## Devoir maison n°9

pour le vendredi 16 janvier

### Dernière visite en 0 d'une marche aléatoire

1. Loi de $S_n$ .....	2
2. Somme de variables aléatoires et égalité en loi .....	2
3. Principe de réflexion .....	2
4. Loi de $T_n$ .....	2
5. Raffinement de la formule de Stirling .....	3
6. Une convergence en loi .....	3

Un point se déplace sur un axe gradué.

Au départ, il se trouve à l'origine et à chaque étape il se déplace suivant le résultat du lancer d'une pièce de monnaie qui est supposée équilibrée.

Le déplacement du point est formalisé de la manière suivante. Dans l'espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ , on considère une suite de variables aléatoires  $(X_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$  à valeurs dans  $\{-1, 1\}$ , indépendantes, et telles que, pour tout  $n \in \mathbf{N}^*$  :

$$\mathbf{P}(X_n = 1) = \mathbf{P}(X_n = -1) = \frac{1}{2} .$$

Les variables aléatoires  $(X_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$  représentent les résultats des lancers successifs de la pièce de monnaie.

Pour tout  $n \in \mathbf{N}$ , on note  $S_n$  l'abscisse du point à l'issue du  $n$ -ième lancer. Ainsi,  $S_0 = 0$  et, pour tout  $n \in \mathbf{N}^*$  :

$$S_n = \sum_{k=1}^n X_k .$$

Pour  $n \in \mathbf{N}^*$ , on appelle chemin de longueur  $n$  toute ligne polygonale reliant les points  $(0, S_0), (1, S_1), \dots, (n, S_n)$ .

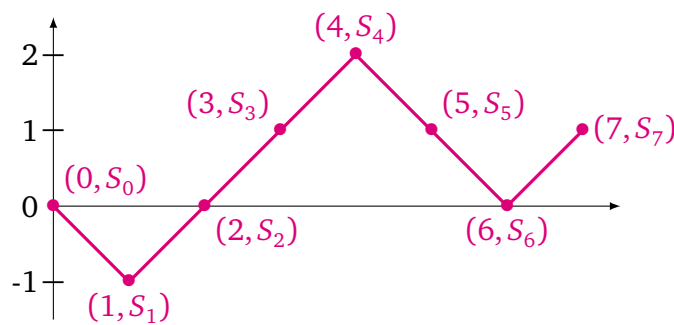


FIGURE 1 – Un chemin de longueur 7

Tous les « chemins » de la marche aléatoire sont équiprobables, i.e., pour tout  $n \in \mathbf{N}^*$  :

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \{-1, 1\}^n \quad \mathbf{P}([S_1 = x_1] \cap [S_2 = x_1 + x_2] \cap \dots \cap [S_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n]) = \frac{1}{2^n} .$$

Pour un entier naturel  $n$  fixé, on s'intéresse au moment de la dernière visite en 0 de la marche aléatoire au cours des  $n$  premiers pas, c'est-à-dire à la variable aléatoire  $T_n$  définie par :

$$T_n = \max \{k \in \llbracket 0, n \rrbracket \mid S_k = 0\} .$$

## 1. Loi de $S_n$

Soient  $n$  et  $x$  des entiers naturels tels que  $n \neq 0$  et  $x \neq 0$ .

On note  $N_{n,x}$  le nombre de chemins reliant le point  $(0, 0)$  au point  $(n, x)$ .

**Q1** Vérifier que si  $x \in \llbracket -n, n \rrbracket$  et  $n - x$  est un entier pair alors :

$$N_{n,x} = \binom{n}{a} \quad \text{où} \quad a = \frac{n+x}{2}$$

et que  $N_{n,x} = 0$  dans le cas contraire.

**Q2** En déduire  $\mathbf{P}(S_n = x)$ .

**Q3** Retrouver la loi de  $S_n$  en introduisant une variable aléatoire de loi binomiale.

## 2. Somme de variables aléatoires et égalité en loi

**Q4** Soient  $X_1, X_2, Y_1, Y_2$  des variables aléatoires discrètes définies sur un même espace probabilisé. Si  $X_1 \sim Y_1$  et  $X_2 \sim Y_2$ , a-t-on nécessairement  $X_1 + X_2 \sim Y_1 + Y_2$  ?

**Q5** Soit  $(Y_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$  est une suite de variables aléatoires discrètes indépendantes et suivant toutes la même loi. Démontrer que pour tout entier  $n \geq 2$ , quel que soit l'entier  $k$  compris entre 1 et  $n - 1$ , les variables aléatoires  $\sum_{i=1}^{n-k} Y_i$  et  $\sum_{i=k+1}^n Y_i$  suivent la même loi.

## 3. Principe de réflexion

Soient  $n, x$  et  $y$  des entiers naturels tels que  $n \neq 0, x \neq 0$  et  $y \neq 0$ .

**Q6** Démontrer que le nombre de chemins reliant  $(0, x)$  à  $(n, y)$ , tout en passant au moins une fois par un point d'ordonnée 0, est égal au nombre de chemins quelconques reliant  $(0, -x)$  à  $(n, y)$ .

## 4. Loi de $T_n$

Soient  $n$  et  $x$  des entiers naturels tels que  $n \neq 0$  et  $x \neq 0$ .

**Q7** Démontrer que  $T_n$  est une variable aléatoire discrète, définie sur le même espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$  que la suite de variables aléatoires  $(S_m)_{m \in \mathbf{N}}$ .

**Q8** En utilisant le principe de réflexion, montrer que le nombre de chemins reliant  $(1, 1)$  à  $(n, x)$  sans jamais rencontrer l'axe des abscisses est égal à :

$$N_{n-1, x-1} - N_{n-1, x+1}.$$

**Q9** En déduire que pour tout  $k \in \mathbf{N}^*$  :

$$\mathbf{P}([S_1 > 0] \cap \dots \cap [S_{2n-1} > 0] \cap [S_{2n} = 2k]) = \frac{1}{2} (\mathbf{P}(S_{2n-1} = 2k - 1) - \mathbf{P}(S_{2n-1} = 2k + 1)) .$$

**Q10** Démontrer que :

$$\mathbf{P}([S_1 > 0] \cap \dots \cap [S_{2n-1} > 0] \cap [S_{2n} > 0]) = \frac{1}{2} \mathbf{P}(S_{2n} = 0)$$

puis que :

$$\mathbf{P}([S_1 \neq 0] \cap \dots \cap [S_{2n-1} \neq 0] \cap [S_{2n} \neq 0]) = \mathbf{P}(S_{2n} = 0) .$$

**Q11** Démontrer que pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$  :

$$\mathbf{P}(T_{2n} = 2k) = \mathbf{P}(S_{2k} = 0) \times \mathbf{P}([S_1 \neq 0] \cap \dots \cap [S_{2n-2k} \neq 0]) .$$

**Q12** En déduire que pour  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$  :

$$\mathbf{P}(T_{2n} = 2k) = \binom{2k}{k} \binom{2n-2k}{n-k} \frac{1}{4^n} .$$

### 5. Raffinement de la formule de Stirling

On pose, pour tout  $n \in \mathbf{N}^*$ ,  $a_n = \frac{n! e^n}{n^n \sqrt{n}}$ .

**Q13** Démontrer que la série numérique  $\sum (\ln(a_{n+1}) - \ln(a_n))$  converge.

**Q14** En déduire que  $n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1 + \frac{1}{12n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$ .

### 6. Une convergence en loi

Soient  $\alpha$  et  $\beta$  deux nombres réels tels que  $0 < \alpha < \beta < 1$ .

**Q15** On définit la fonction  $f$  par :

$$f \left\{ \begin{array}{l} [0, 1] \longrightarrow \mathbf{R} \\ t \longmapsto \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}} & \text{si } t \in [\alpha, \beta] \\ f(\alpha) & \text{si } t \in [0, \alpha[ \\ f(\beta) & \text{si } t \in ]\beta, 1] . \end{cases} \end{array} \right.$$

Démontrer que :

$$\sum_{k=\lfloor n\alpha \rfloor + 1}^{\lfloor n\beta \rfloor} \frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{n-k}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}} dt .$$

**Q16** Démontrer que :

$$\binom{2n}{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{4^n}{\sqrt{n\pi}} - \frac{4^n}{8n\sqrt{n\pi}} + o\left(\frac{4^n}{8n\sqrt{n\pi}}\right).$$

**Q17** En déduire que :

$$\left( \sum_{k=\lfloor n\alpha \rfloor + 1}^{\lfloor n\beta \rfloor} \binom{2k}{k} \binom{2n-2k}{n-k} \frac{1}{4^n} - \frac{1}{\pi} \sum_{k=\lfloor n\alpha \rfloor + 1}^{\lfloor n\beta \rfloor} \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}} \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

**Q18** Montrer alors que :

$$\mathbf{P}\left(\frac{T_{2n}}{2n} \in [\alpha, \beta]\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{\pi} \left( \arcsin(\sqrt{\beta}) - \arcsin(\sqrt{\alpha}) \right).$$