

Devoir maison n°6

pour le jeudi 27 novembre

1. Nature d'une série dépendant de trois paramètres [oral Mines-Télécom MPI]	1
2. Réorganisation des termes de la série harmonique alternée [oral Mines-Télécom MPI]	1
3. Topologie matricielle [oral Mines-Ponts MPI]	1
4. Raffinement de la formule de Stirling [oral Mines-Ponts MPI]	2
5. Une condition suffisante pour qu'une suite réelle converge vers 0 [oral X MPI]	2

1. Nature d'une série dépendant de trois paramètres [oral Mines-Télécom MPI]

Soient a, b, c des réels. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on pose $u_n = a \ln(n) + b \ln(n + 1) + c \ln(n + 2)$.

Q1. — À quelles conditions sur a, b, c la série numérique $\sum u_n$ converge-t-elle ?

2. Réorganisation des termes de la série harmonique alternée [oral Mines-Télécom MPI]

Soit l'application $\sigma : \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{N}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad \begin{cases} \sigma(3n) &= 4n ; \\ \sigma(3n + 1) &= 4n + 2 ; \\ \sigma(3n + 2) &= 2n + 1 . \end{cases}$$

Q2. — Démontrer que l'application σ est bijective.

Q3. — Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on pose $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$. Démontrer que la série numérique $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge et calculer sa somme.

Q4. — Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on pose $v_n = u_{\sigma(n)}$. Démontrer que la série numérique $\sum_{n \geq 1} v_n$ converge et calculer sa somme.

3. Topologie matricielle [oral Mines-Ponts MPI]

Soit un entier $n \geq 3$. On note A l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ dont le polynôme caractéristique est scindé à racines simples.

Q5. — L'ensemble A est-il ouvert dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$?

Q6. — L'ensemble A est-il fermé dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$?

4. Raffinement de la formule de Stirling [oral Mines-Ponts MPI]

On pose, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $a_n = \frac{n! e^n}{n^n \sqrt{n}}$.

Q7. — Démontrer que la série numérique $\sum (\ln(a_{n+1}) - \ln(a_n))$ converge.

Q8. — Donner un équivalent de $\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Q9. — Démontrer que $n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1 + \frac{1}{12n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$.

5. Une condition suffisante pour qu'une suite réelle converge vers 0 [oral X MPI]

Q10. — Soit $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite telle que $u_{n+1} - \frac{u_n}{2} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$. Démontrer que $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$.