Un corrigé du devoir maison n°10

Espaces préhilbertiens réels

1. Un calcul d'orthogonal

Soient $E := \mathscr{C}^1([0,1],\mathbf{R})$ et l'application φ définie par :

$$\varphi \left| \begin{array}{ccc} E^2 & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (f,g) & \longmapsto & \displaystyle\int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^1 f'(t)g'(t)\,\mathrm{d}t\,. \end{array} \right.$$

On considère le sous-espace vectoriel $G := \left\{ f \in \mathscr{C}^2([0,1],\mathbf{R}) \ : \ f'' = f \right\}$ de E.

Q1 Démontrer que φ est un produit scalaire sur E.

(a) *Linéarité à gauche.* — Soient $f_1, f_2, g \in E$ et $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}$. Comme la dérivation est linéaire :

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2, g) &= \int_0^1 (\lambda_1 f_1(t) + \lambda_2 f_2(t))\, g(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^1 \left(\lambda_1 f_1'(t) + \lambda_2 f_2'(t)\right) g'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 (\lambda_1 f_1(t)g(t) + \lambda_2 f_2(t)g(t))\,\mathrm{d}t + \int_0^1 \left(\lambda_1 f_1'(t)g(t) + \lambda_2 f_2'(t)g(t)\right)\mathrm{d}t\,. \end{aligned}$$

La linéarité de l'intégrale nous livre alors que $\varphi(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2, g)$ égale :

$$\underbrace{\lambda_1 \int_0^1 f_1(t)g(t)\,\mathrm{d}t + \lambda_1 \int_0^1 f_1'(t)g'(t)\,\mathrm{d}t}_{\lambda_1 \varphi(f_1,g)} + \underbrace{\lambda_2 \int_0^1 f_2(t)g(t)\,\mathrm{d}t + \lambda_2 \int_0^1 f_2'(t)g'(t)\,\mathrm{d}t}_{\lambda_2 \varphi(f_2,g)}\,.$$

Ainsi $\boxed{\varphi(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2, g) = \lambda_1 \varphi(f_1,g) + \lambda_2 \varphi(f_2,g)\,.}$

(b) *Symétrie.* — Soient $f, g \in E$. Comme la multiplication est commutative dans $\mathbf{R}$:

$$\begin{aligned} \varphi(f,g) &= \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^1 f'(t)g'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 g(t)f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^1 g'(t)f'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \varphi(g,f)\,. \end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{\varphi(f,g) = \varphi(g,f)\,.}$

(c) *Linéarité à droite.* — Comme la forme φ est linéaire à gauche et symétrique, $\boxed{\text{la forme } \varphi \text{ est linéaire à droite.}}$

(d) *Caractère positif.* — Soit $f \in E$. En remarquant que le carré d'un nombre réel est positif et en appliquant la positivité de l'intégrale, il vient :

$$\int_0^1 f(t)^2 \, \mathrm{d}t \geqslant 0 \qquad \text{et} \qquad \int_0^1 \left(f'(t)\right)^2 \, \mathrm{d}t \geqslant 0$$

puis $\boxed{\varphi(f,f) = \int_0^1 f(t)^2 \, \mathrm{d}t + \int_0^1 \left(f'(t)\right)^2 \, \mathrm{d}t \geqslant 0 \,.}$

(e) *Caractère défini.* — Soit $f \in E$ telle que :

$$\varphi(f,f) = \underbrace{\int_0^1 f(t)^2 \, \mathrm{d}t}_{\geqslant 0} + \underbrace{\int_0^1 \left(f'(t)\right)^2 \, \mathrm{d}t}_{\geqslant 0} = 0 \,.$$

Comme la somme de deux nombres réels positifs est nulle si et seulement si les deux nombres sont nuls, il vient :

$$\int_0^1 f(t)^2 \, \mathrm{d}t = 0 \,.$$

La fonction f^2 est continue, positive et d'intégrale nulle sur $[0,1]$. Par propriété de séparation de l'intégrale, nous en déduisons que :

$$\forall\, t \in [0,1] \quad f(t)^2 = 0 \,.$$

Comme $\mathbf{R}$ est intègre, ceci implique que $\boxed{\text{la fonction } f \text{ est nulle sur } [0,1].}$

Q2 Déterminer une base de G.

L'ensemble G est l'ensemble solution de l'équation différentielle linéaire homogène de degré 2 à coefficients constants :

$$y'' - y = 0 \,, \ \text{d'inconnue } y \in \mathscr{C}^1([0,1], \mathbf{R}) \,.$$

Son équation caractéristique est $r^2 - 1 = 0$. Elle possède deux racines réelles distinctes : -1 et 1. D'après le cours, nous savons que G est le plan vectoriel de E ayant pour base :

$$\boxed{\left(g_1 \left| \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & e^{-t} \end{array} \right. , \ g_2 \left| \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & e^{t} \end{array} \right. \right) .}$$

Q3 Démontrer que :

$$\forall\, (f,g) \in E \times G \quad \varphi(f,g) = f(1)g'(1) - f(0)g'(0) \,.$$

Soit $(f,g) \in E \times G$. Alors la fonction $f g'$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$. D'après le théorème fondamental de l'analyse :

$$f(1)g'(1) - f(0)g'(0) = \int_0^1 \left(f g'\right)'(t) \, \mathrm{d}t = \int_0^1 f'(t)g'(t) + f(t)g''(t) \, \mathrm{d}t \,.$$

Comme $g \in G$, $g'' = g$ et donc :

$$f(1)g'(1) - f(0)g'(0) = \int_0^1 f'(t)g'(t) + f(t)g''(t) \, \mathrm{d}t \,.$$

Par linéarité de l'intégrale, $\boxed{\varphi(f,g) = f(1)g'(1) - f(0)g'(0) \,.}$

Q4 Démontrer que $G^\perp = \{f \in E \ : \ f(0) = f(1) = 0\}$.

Soit $f \in E$.

$$\begin{aligned}
f \in G^\perp &\iff f \in \operatorname{Vect}(g_1, g_2)^\perp \qquad [\text{d'après } \mathbf{Q2}] \\
&\iff \varphi(f, g_1) = \varphi(f, g_2) = 0 \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcrcl} f(1)g_1'(1) & - & f(0)g_1'(0) & = & 0 \\ f(1)g_2'(1) & - & f(0)g_2'(0) & = & 0 \end{array}\right. \qquad [\text{d'après } \mathbf{Q3}] \\
&\iff \begin{pmatrix} e^{-1} & -1 \\ e & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(1) \\ f(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Comme la matrice $\begin{pmatrix} e^{-1} & -1 \\ e & -1 \end{pmatrix}$ a déterminant $e - e^{-1} = 2\,\operatorname{sh}(1) \neq 0$, elle est inversible. Ainsi :

$$f \in G^\perp \iff f(0) = f(1) = 0$$

et $\boxed{G^\perp = \{f \in E \ : \ f(0) = f(1) = 0\} .}$

2. Bases orthonormées, coordonnées et produit scalaire

Soient $(E, \langle \cdot \, , \cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \geqslant 1$ et $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E.

Q5 Soit x un vecteur de E. Démontrer que :

$$x = \sum_{i=1}^{n} \langle x \, , e_i \rangle \, e_i \, .$$

Notons $\mathscr{B}^* = \left(e_1^*, \ldots, e_n^*\right)$ la base duale de la base $\mathscr{B}$ de E. Il s'agit d'une base de $\mathscr{L}(E, \mathbf{R})$ telle que, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$:

$$e_i^*(x) \text{ est la } i\text{-ème coordonnées de } x \text{ dans la base } \mathscr{B}$$

de sorte que :

$$(\star) \qquad x = \sum_{i=1}^{n} e_i^*(x)\, e_i \, .$$

Soit $j \in [\![1, n]\!]$. Par linéarité à gauche du produit scalaire :

$$\langle x \, , e_j \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} e_i^*(x)\, e_i \, , e_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} e_i^*(x) \, \langle e_i \, , e_j \rangle \, .$$

Comme la base $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est orthonormée :

$$(\star\star) \qquad \langle x \, , e_j \rangle = \sum_{i=1}^{n} e_i^*(x)\, \delta_{i,j} = e_j^*(x) \, .$$

D'après $(\star)$ et $(\star\star)$, $\boxed{x = \sum_{i=1}^{n} \langle x \, , e_i \rangle \, e_i \, .}$

Dans un espace euclidien, les coordonnées d'un vecteur dans une base orthonormée admettent une expression simple, en termes de produit scalaire.

Q6 Soient $u_1,\dots,u_n,v_1,\dots,v_n$ des vecteurs de E, $\alpha_1,\dots,\alpha_n,\beta_1,\dots,\beta_n$ des réels. Démontrer que :

$$\left\langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i \,,\, \sum_{j=1}^{n} \beta_j v_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i \langle u_i \,,\, v_i \rangle + \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \underbrace{\alpha_i \beta_j \langle u_i \,,\, v_j \rangle}_{\text{terme croisé}}$$

en détaillant le calcul et en justifiant chacune de ses étapes avec une propriété idoine du produit scalaire.

Nous calculons :

$$\begin{aligned}
\left\langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i \,,\, \sum_{j=1}^{n} \beta_j v_j \right\rangle &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left\langle u_i \,,\, \sum_{j=1}^{n} \beta_j v_j \right\rangle \qquad \text{[linéarité à gauche du produit scalaire]} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \sum_{j=1}^{n} \beta_j \langle u_i \,,\, v_j \rangle \qquad \text{[linéarité à droite du produit scalaire]} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left(\beta_i \langle u_i \,,\, v_i \rangle + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \beta_j \langle u_i \,,\, v_j \rangle \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i \langle u_i \,,\, v_i \rangle + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \beta_j \langle u_i \,,\, v_j \rangle
\end{aligned}$$

pour obtenir finalement $\boxed{\left\langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i \,,\, \sum_{j=1}^{n} \beta_j v_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i \langle u_i \,,\, v_i \rangle + \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \alpha_i \beta_j \langle u_i \,,\, v_j \rangle .}$

Q7 Soient $(x_1,\dots,x_n) \in \mathbf{R}^n$ et $(y_1,\dots,y_n) \in \mathbf{R}^n$. On pose :

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \qquad \text{et} \qquad y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i .$$

Démontrer que :

$$\langle x \,,\, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i .$$

Par définition même de x et y :

$$\langle x \,,\, y \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \,,\, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j \right\rangle .$$

Il faut choisir des noms d'indices différents pour chacune des deux sommes exprimant x et y.

D'après **Q6** :

$$\langle x \,,\, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \langle e_i \,,\, e_i \rangle + \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} x_i y_j \langle e_i \,,\, e_j \rangle .$$

Comme la base $\mathscr{B} = (e_1,\dots,e_n)$ est orthonormée, nous obtenons finalement :

$$\boxed{\langle x \,,\, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \delta_{i,i} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} x_i y_j \delta_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i .}$$

Dans un espace euclidien, le produit scalaire de deux vecteurs admet une expression simple en fonction des coordonnées de ceux-ci dans une base orthonormée.

3. Produit scalaire usuel sur $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ et compacité du groupe orthogonal

Soit un entier $n \geqslant 2$.

Q8 Soient $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et $B = (b_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ des matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$. Donner une expression du réel $\mathrm{tr}\left(A \times B^\top\right)$ en fonction des coefficients de A et B.

Par définition de la trace et du produit matriciel :

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}\left(A\times B^\top\right) &= \sum_{i=1}^{n} \left[A\times B^\top\right]_{i,i} \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \underbrace{[A]_{i,j}}_{a_{i,j}} \times \underbrace{\left[B^\top\right]_{j,i}}_{b_{i,j}}.\end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{\mathrm{tr}\left(A\times B^\top\right) = \sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} a_{i,j}\times b_{i,j}\ .}$

Q9 Démontrer que :

$$\langle \cdot\,,\,\cdot \rangle \ \left|\ \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbf{R})\times\mathscr{M}_n(\mathbf{R}) & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (A,B) & \longmapsto & \mathrm{tr}\left(A\times B^\top\right)\end{array}\right.$$

est un produit scalaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$.

(a) *Linéarité à gauche.* — Soient $A_1, A_2, B \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ et $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}$. Par linéarité de la trace :

$$\begin{aligned}\langle \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2\,,\,B\rangle &= \mathrm{tr}\left((\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2)\times B^\top\right) \\ &= \mathrm{tr}\left((\lambda_1 A_1)\times B^\top + (\lambda_2 A_2)\times B^\top\right) \\ &= \lambda_1 \underbrace{\mathrm{tr}\left(A_1\times B^\top\right)}_{\langle A_1\,,\,B\rangle} + \lambda_2 \underbrace{\mathrm{tr}\left(A_2\times B^\top\right)}_{\langle A_2\,,\,B\rangle}\end{aligned}$$

d'où $\boxed{\langle \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2\,,\,B\rangle = \lambda_1\langle A_1\,,\,B\rangle + \lambda_2\langle A_2\,,\,B\rangle.}$

(b) *Symétrie.* — Soient $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et $B = (b_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ des matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$. D'après **Q8** et la commutativité de la multiplication dans $\mathbf{R}$:

$$\boxed{\langle A\,,\,B\rangle = \sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} a_{i,j}\times b_{i,j} = \sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} b_{i,j}\times a_{i,j} = \langle B\,,\,A\rangle\quad.}$$

(c) *Linéarité à droite.* — Comme la forme $\langle \cdot\,,\,\cdot\rangle$ est linéaire à gauche et symétrique, $\boxed{\text{la forme } \langle \cdot\,,\,\cdot\rangle \text{ est linéaire à droite.}}$

(d) *Caractère positif.* — Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$. Comme le carré d'un nombre réel est positif, en nous aidant de **Q8** il vient :

$$\boxed{\langle A\,,\,A\rangle = \sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} \underbrace{a_{i,j}^2}_{\geqslant 0} \geqslant 0\ .}$$

(e) *Caractère défini.* — Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ telle que :

$$\langle A\,,\,A\rangle = \sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} \underbrace{a_{i,j}^2}_{\geqslant 0} = 0\ .$$

Comme une somme de nombres réels positifs est nulle si et seulement si tous ses termes sont nuls, nous en déduisons que :

$$\forall\,(i,j)\in[\![1,n]\!]^2 \quad a_{i,j}^2 = 0\ .$$

Comme $\mathbf{R}$ est intègre, nous en déduisons que $\boxed{A = 0_{\mathscr{M}_n(\mathbf{R})}.}$

On rappelle que le groupe orthogonal $\mathbf{O}_n(\mathbf{R})$ est défini par :

$$\mathbf{O}_n(\mathbf{R}) = \left\{A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R}) \ : \ A \times A^\top = I_n\right\} \ .$$

Q10 Démontrer que $\mathbf{O}_n(\mathbf{R})$ est une partie compacte de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$.

(a) *Du choix de la norme.* — Comme $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension $n^2 < \infty$, toutes les normes sur $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ sont équivalentes. Les propriétés topologiques de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ ne dépendent donc pas du choix de la norme.

(b) *Caractérisation des compacts de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$.* — Comme $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension $n^2 < \infty$

une partie de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ est compacte si et seulement si elle est fermée et bornée dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$.

(c) *Caractère fermé de $\mathbf{O}_n(\mathbf{R})$.* — L'application :

$$f \ \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbf{R}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_n(\mathbf{R}) \\ A & \longmapsto & A \times A^\top \end{array} \right.$$

est continue car, pour tout $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$:

$$\left[A \times A^\top\right]_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} [A]_{i,k} \times \left[A^\top\right]_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} [A]_{i,k} \times [A]_{j,k}$$

est une expression polynomiale en les coefficients de A. Donc :

$$\boxed{\mathbf{O}_n(\mathbf{R}) = f^{-1}(\{I_n\}) \text{ est une partie fermée de } \mathscr{M}_n(\mathbf{R})}$$

comme image réciproque du fermée $\{I_n\}$ de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ par l'application continue f.

(d) *Caractère borné de $\mathbf{O}_n(\mathbf{R})$.* — D'après **Q9**, l'application :

$$|| \cdot ||_2 \ \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbf{R}) & \longrightarrow & \mathbf{R}_+ \\ A & \longmapsto & \sqrt{\operatorname{tr}(A \times A^\top)} \end{array} \right.$$

est une norme sur $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$. Comme :

$$\forall A \in \mathbf{O}_n(\mathbf{R}) \quad ||A||_2 = \sqrt{\operatorname{tr}(I_n)} = \underbrace{\sqrt{n}}_{\text{indépendant de } A}$$

il vient que :

$$\boxed{\mathbf{O}_n(\mathbf{R}) \text{ est inclus dans la sphère } S_{||\cdot||_2}\left(0_{\mathscr{M}_n(\mathbf{R})}, \sqrt{n}\right) \text{ donc } \mathbf{O}_n(\mathbf{R}) \text{ est bornée.}}$$

4. Bases orthonormées et matrices orthogonales

Soit un entier $n \geqslant 2$.

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ une matrice dont les colonnes sont notées $C_1, \ldots, C_n$. Ces dernières appartiennent au $\mathbf{R}$-espace vectoriel $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$, que nous munissons de son produit scalaire usuel, noté $\langle \cdot \, , \, \cdot \rangle$.

Q11 Justifier que $A \in \mathbf{O}_n(\mathbf{R})$ si et seulement si la famille $(C_1, \ldots, C_n)$ est une base orthonormée de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$.

Le point clé est l'observation suivante. Pour tout $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$:

$$(\star)\qquad \left[A^\top\times A\right]_{i,j}=\sum_{k=1}^{n}\left[A^\top\right]_{i,k}\times[A]_{k,j}=\sum_{k=1}^{n}[A]_{k,i}\times[A]_{k,j}=\left\langle\begin{pmatrix}[A]_{1,i}\\ \vdots\\ [A]_{n,i}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}[A]_{1,j}\\ \vdots\\ [A]_{n,j}\end{pmatrix}\right\rangle=\left\langle C_i\,,\,C_j\right\rangle .$$

N.B. Soient $B\in\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ et $C\in\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$. D'après le cours de Sup, les trois conditions suivantes sont équivalentes.
(a) La matrice B est inversible et $B^{-1}=C$, i.e. $BC=CB=I_n$.
(b) $BC=I_n$
(c) $CB=I_n$.

Soit $A\in\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$.

$$\begin{aligned}A\times A^\top=I_n &\iff A^\top\times A=I_n\\ &\iff \forall\,(i,j)\in[\![1,n]\!]^2\quad \left[A^\top\times A\right]_{i,j}=\delta_{i,j}\\ &\iff \forall\,(i,j)\in[\![1,n]\!]^2\quad \left\langle C_i\,,\,C_j\right\rangle=\delta_{i,j}\qquad[\text{d'après }(\star)]\end{aligned}$$

Nous en déduisons que

$$\boxed{A\in\mathbf{O}_n(\mathbf{R})\text{ si et seulement si la famille }(C_1,\dots,C_n)\text{ est une base orthonormée de }\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R}).}$$

Une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ est orthogonale si et seulement si ses vecteurs colonnes forment une BON de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$.

Soient $(E,\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle)$ un espace euclidien de dimension $n\geqslant 1$ et $\mathscr{B}=(e_1,\dots,e_n)$ une base orthonormée de E.

Q12 Soit $\mathscr{C}=(f_1,\dots,f_n)$ une base de E. Démontrer que la base $\mathscr{C}$ de E est orthonormée si et seulement si la matrice de passage $P_{\mathscr{B}\to\mathscr{C}}=\mathrm{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{B}}(\mathrm{id})$ appartient à $\mathbf{O}_n(\mathbf{R})$.

Par définition de la matrice $P_{\mathscr{B}\to\mathscr{C}}$:

$$\forall\,j\in[\![1,n]\!]\quad f_j=\sum_{k=1}^{n}[P_{\mathscr{B}\to\mathscr{C}}]_{k,j}\;e_k\ .$$

Comme la base $\mathscr{B}=(e_1,\dots,e_n)$ est orthonormée, nous en déduisons, avec l'aide de **Q7**, que, pour tout $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$:

$$\begin{aligned}\left\langle f_i\,,\,f_j\right\rangle &= \sum_{k=1}^{n}[P_{\mathscr{B}\to\mathscr{C}}]_{k,i}\times[P_{\mathscr{B}\to\mathscr{C}}]_{k,j}\\ &= \sum_{k=1}^{n}\left[(P_{\mathscr{B}\to\mathscr{C}})^\top\right]_{i,k}\times[P_{\mathscr{B}\to\mathscr{C}}]_{k,j}\\ &= \left[(P_{\mathscr{B}\to\mathscr{C}})^\top\times P_{\mathscr{B}\to\mathscr{C}}\right]_{i,j}\ .\end{aligned}$$

D'après ce calcul, la base $\mathscr{C}=(f_1,\dots,f_n)$ est orthonormée si et seulement si $(P_{\mathscr{B}\to\mathscr{C}})^\top\times P_{\mathscr{B}\to\mathscr{C}}=I_n$. Comme :

$$(P_{\mathscr{B}\to\mathscr{C}})^\top\times P_{\mathscr{B}\to\mathscr{C}}=I_n\iff P_{\mathscr{B}\to\mathscr{C}}\times(P_{\mathscr{B}\to\mathscr{C}})^\top=I_n$$

il vient $\boxed{\text{la base }\mathscr{C}\text{ de }E\text{ est orthonormée si et seulement si la matrice de passage }P_{\mathscr{B}\to\mathscr{C}}\in\mathbf{O}_n(\mathbf{R}).}$

Une matrice de passage entre deux bases orthonormées est une matrice orthogonale.

Q13 Soit $A\in\mathbf{O}_n(\mathbf{R})$. Construire une base orthonormée $\mathscr{C}=(f_1,\dots,f_n)$ de E telle que $P_{\mathscr{B}\to\mathscr{C}}=A$.

Si une telle base $\mathscr{C} = (f_1, \dots, f_n)$ existe, alors $P_{\mathscr{B}\to\mathscr{C}} = A$ implique que, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$:

$$f_j = \sum_{k=1}^{n} [A]_{k,j} e_k \,.$$

Vérifions que la famille :

$$\boxed{\mathscr{C} := \left(f_1 = \sum_{k=1}^{n} [A]_{k,1} e_k \,,\, f_2 = \sum_{k=1}^{n} [A]_{k,2} e_k \,,\, \dots \,,\, f_n = \sum_{k=1}^{n} [A]_{k,n} e_k \right)}$$

convient.

(a) *$\mathscr{C}$ est une base de E.* — D'après la définition de $\mathscr{C}$:

$$\operatorname{rg}(\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(f_1, \dots, f_n)) = \operatorname{rg}(A) = n$$

puisque la matrice A est inversible (d'inverse sa transposée). La famille $\mathscr{C}$ comporte $n = \dim(E)$ vecteurs et est de rang n. Ainsi :

$$\boxed{\text{la famille } \mathscr{C} = (f_1, \dots, f_n) \text{ est une base de } E.}$$

(b) *Matrice $P_{\mathscr{B}\to\mathscr{C}}$.* — D'après la défintion de $\mathscr{C}$:

$$\boxed{P_{\mathscr{B}\to\mathscr{C}} = A.}$$

(c) *Caractère orthonormé de la base $\mathscr{C}$.* — D'après **Q12**, comme $P_{\mathscr{B}\to\mathscr{C}} =\in \mathbf{O}_n(\mathbf{R})$:

$$\boxed{\text{la base } \mathscr{C} \text{ de } E \text{ est orthonormée.}}$$

Toute matrice orthogonale est une matrice de passage entre deux bases orthonormées.

5. Algorithme de Gram-Schmidt appliqué à une base de $\mathbf{R}^3$

On munit $\mathbf{R}^3$ de son produit scalaire usuel, noté $\langle \cdot\,,\,\cdot \rangle$. On introduit trois vecteurs u_1, u_2, u_3 de $\mathbf{R}^3$ définis par :

$$u_1 = (0, 1, 1) \quad , \quad u_2 = (1, 0, 1) \quad , \quad u_3 = (1, 1, 0) \,.$$

Q14 Démontrer que la famille $\mathscr{B} = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbf{R}^3$.

La famille $\mathscr{B}$ est libre. En effet, pour tous réels $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$:

$$\begin{aligned}
\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = 0_{\mathbf{R}^3} \quad &\iff \left\{ \begin{array}{ccccccc} & & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 & & & + & \lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 & + & \lambda_2 & & & = & 0 \end{array} \right. \\
&\iff \left\{ \begin{array}{cccccc} & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 & & + & \lambda_3 & = & 0 \\ & \lambda_2 & - & \lambda_3 & = & 0 \end{array} \right. \qquad L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \\
&\iff \left\{ \begin{array}{cccccc} & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 & & + & \lambda_3 & = & 0 \\ & & - & 2\lambda_3 & = & 0 \end{array} \right. \qquad L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\
&\iff \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \,.
\end{aligned}$$

Comme $\mathscr{B}$ est libre et possède $3 = \dim\left(\mathbf{R}^3\right)$ vecteurs, $\boxed{\mathscr{B} \text{ est une base de } \mathbf{R}^3.}$

Q15 Appliquer l'algorithme de Gram-Schmidt à la base $\mathscr{B}$ de $\mathbf{R}^3$ pour obtenir une base orthonornée de $\mathbf{R}^3$, que nous noterons $\mathscr{C} = (v_1, v_2, v_3)$ dans la suite.

Nous appliquons l'algorithme de Gram-Schmidt à la famille $\mathscr{B}$, pour obtenir une base orthonormée $\mathscr{C} = (v_1, v_2, v_3)$ de $\mathbf{R}^3$. Calculons, l'un après l'autre, les vecteurs v_1, v_2, v_3.

(a) *Premier vecteur.* — Nous calculons $||\, u_1 \,|| = \sqrt{2}$ et posons :

$$\boxed{v_1 = \frac{u_1}{||\, u_1 \,||} = \frac{1}{\sqrt{2}} (0,1,1)\,.}$$

(b) *Deuxième vecteur.* — Nous calculons :

$$u_2 - \langle\, u_2\,,\, v_1 \,\rangle\; v_1 = (1,0,1) - \frac{\langle (1,0,1)\,,\,(0,1,1) \rangle}{2} (0,1,1) = \left(1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

dont la norme est $\sqrt{\frac{3}{2}}$. Nous posons donc :

$$\boxed{v_2 = \sqrt{\frac{2}{3}} \left(1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\,.}$$

(c) *Troisième vecteur.* — Nous calculons $u_3 - \langle\, u_3\,,\, v_1 \,\rangle\; v_1 - \langle\, u_3\,,\, v_2 \,\rangle\; v_2$ qui égale :

$$(1,1,0) - \frac{\langle (1,1,0)\,,\,(0,1,1) \rangle}{2} (0,1,1) - \frac{2\left\langle (1,1,0)\,,\, \left(1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \right\rangle}{3} \left(1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)\,.$$

Comme sa norme vaut $\frac{2}{\sqrt{3}}$, nous posons :

$$\boxed{v_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} (1,1,-1)\,.}$$

Notons $\mathscr{B}_c = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbf{R}^3$.

Q16 Explicitez la matrice $P := P_{\mathscr{B}_c \to \mathscr{C}}$ puis calculer le produit $P \times P^\top$.

Comme :

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (0,1,1)\,,\; v_2 = \sqrt{\frac{2}{3}} \left(1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\,,\; v_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} (1,1,-1)$$

il vient :

$$\boxed{P = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}}\,.$$

Nous calculons en outre $\boxed{P \times P^\top = I_3.}$

Q17 Commenter le résultat de la question précédente.

Comme $P \times P^\top = I_3$, $\boxed{P \in \mathbf{O}_3(\mathbf{R}).}$

Ce résultat, obtenu par un calcul direct, aurait également pu être obtenu en appliquant **Q12**. En effet :

$$\boxed{\text{la matrice } P \text{ est une matrice de passage entre deux bases orthonormées de } \mathbf{R}^3.}$$

6. Algorithme de Gram-Schmidt et décomposition d'Iwasawa

Soit un entier $n \geqslant 2$.

On note $\mathscr{T}_n^{>0}(\mathbf{R})$ l'ensemble des matrices supérieures de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ dont les coefficients diagonaux sont strictement positifs.

On note $\langle \cdot\,,\,\cdot \rangle$ le produit scalaire usuel sur $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$. La norme associée est :

$$\|\cdot\| \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R}) & \longrightarrow & \mathbf{R}_+ \\ X & \longmapsto & \sqrt{X^\top \times X}\,. \end{array} \right.$$

Soit A une matrice de $\mathbf{GL}_n(\mathbf{R})$ dont les colonnes sont notées $C_1, \ldots, C_n$.

Q18 Justifier que la famille $(C_1, \ldots, C_n)$ est une base de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$.

La famille $(C_1, \ldots, C_n)$ est libre. En effet, pour tous réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \lambda_k C_k = 0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})} &\iff A \times \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = 0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})} \qquad \left[\text{car } A \times \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^n \lambda_k C_k\right] \\ &\iff \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}\,(A) \\ &\iff \lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0 \qquad \left[A \text{ est inversible donc } \mathrm{Ker}\,(A) = \left\{0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})}\right\}\right]. \end{aligned}$$

Comme $(C_1, \ldots, C_n)$ est libre et possède $n = \dim\left(\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})\right)$ vecteurs, $\boxed{(C_1, \ldots, C_n) \text{ est une base de } \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R}).}$

Q19 En appliquant l'algorithme de Gram-Schmidt à la base $(C_1, \ldots, C_n)$ de l'espace euclidien $\left(\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R}), \langle \cdot\,,\,\cdot \rangle\right)$ démontrer que :

$$\exists\, (Q, R) \in \mathbf{O}_n(\mathbf{R}) \times \mathscr{T}_n^{>0}(\mathbf{R}) \quad A = QR \qquad [\text{décomposition d'Iwasawa}]\,.$$

Notons :

- $\mathbf{C} := (C_1, \ldots, C_n)$ la base de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ formée par les colonnes de la matrice A;
- $\mathscr{B}$ la base orthonormée de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ obtenue en appliquant l'algorithme de Gram-Schmidt à la base $\mathscr{C} = (C_1, \ldots, C_n)$;
- $\mathscr{B}_c$ la base canonique de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$.

Nous observons que :

(a) $P_{\mathscr{B}_c \to \mathscr{C}} := \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}, \mathscr{B}_c}\left(\mathrm{id}_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})}\right) = A$;

(b) $P_{\mathscr{C} \to \mathscr{B}} := \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}, \mathscr{C}}\left(\mathrm{id}_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})}\right) \in \mathscr{T}_n^{>0}(\mathbf{R})$ [propriété de l'algorithme de Gram-Schmidt] ;

(c) $P_{\mathscr{B}_c \to \mathscr{B}} := \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}, \mathscr{B}_c}\left(\mathrm{id}_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})}\right) \in \mathbf{O}_n(\mathbf{R})$ [$\mathscr{B}_c$ et $\mathscr{B}$ sont deux bases orthonormées de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ et **Q12** .]

Notons que, comme $\mathscr{T}_n^{++}(\mathbf{R})$ est un sous-groupe de $\mathbf{GL}_n(\mathbf{R})$, nous déduisons de (b) que :

$$P_{\mathscr{B}\to\mathscr{C}} = (P_{\mathscr{C}\to\mathscr{B}})^{-1} \in \mathscr{T}_n^{>0}(\mathbf{R})\,.$$

Par théorème de changement de base :

$$\boxed{A = P_{\mathscr{B}_c\to\mathscr{C}} = \underbrace{P_{\mathscr{B}_c\to\mathscr{B}}}_{=:Q\in\mathbf{O}_n(\mathbf{R})} \times \underbrace{P_{\mathscr{B}\to\mathscr{C}}}_{=:R\in\mathscr{T}_n^{>0}(\mathbf{R})}\,.}$$

Q20 Démontrer que la décomposition de A obtenue en **Q19** est unique.

Soient $Q_1, Q_2 \in \mathbf{O}_n(\mathbf{R})$ et $R_1, R_2 \in \mathscr{T}_n^{>0}(\mathbf{R})$ des matrices telles que :

$$Q_1R_1 = A = Q_2R_2\,.$$

Nous souhaitons démontrer que $Q_1 = Q_2$ et $R_1 = R_2$.

(a) *Structures algébriques de* $\mathbf{O}_n(\mathbf{R})$ *et* $\mathscr{T}_n^{++}(\mathbf{R})$. — Rappelons que $\mathbf{O}_n(\mathbf{R})$ et $\mathscr{T}_n^{++}(\mathbf{R})$ sont deux sous-groupes de $\mathbf{GL}_n(\mathbf{R})$.

(b) *Réduction du problème.* — En multipliant chacun des membres de l'identité $Q_1R_1 = Q_2R_2$ par Q_1^{-1} à gauche et par R_2^{-1} à droite, il vient :

$$\underbrace{R_1R_2^{-1}}_{\in\mathscr{T}_n^{>0}(\mathbf{R})} = \underbrace{Q_1^{-1}Q_2}_{\in\mathbf{O}_n(\mathbf{R})}\,.$$

Il suffit de démontrer que $\mathbf{O}_n(\mathbf{R}) \cap \mathscr{T}_n^{>0}(\mathbf{R}) \subset \{I_n\}$ pour pouvoir conclure (l'autre inclusion est par ailleurs évidente).

(c) *L'intersection* $\mathbf{O}_n(\mathbf{R}) \cap \mathscr{T}_n^{>0}(\mathbf{R})$. — Soit $M \in \mathbf{O}_n(\mathbf{R}) \cap \mathscr{T}_n^{>0}(\mathbf{R})$.
Comme $M \in \mathscr{T}_n^{>0}(\mathbf{R})$ et que $\mathscr{T}_n^{++}(\mathbf{R})$ est un sous-groupe de $\mathbf{GL}_n(\mathbf{R})$, $M^{-1} \in \mathscr{T}_n^{>0}(\mathbf{R})$.
Comme $M \in \mathbf{O}_n(\mathbf{R})$, $M^{-1} = M^\top$.
Nous en déduisons que $M^\top \in \mathscr{T}_n^{>0}(\mathbf{R})$ et donc M est une matrice triangulaire inférieure.
Comme la matrice M est par ailleurs triangulaire supérieure, avec des coefficients diagonaux positifs, nous en déduisons que :

$$M = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \quad \text{où} \quad \lambda_1 > 0\,, \ldots\,, \lambda_n > 0\,.$$

La matrice M étant orthogonale, ses vecteurs colonnes forment une base orthogonale de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$, muni de son produit scalaire usuel (**Q11**). Nous en déduisons que :

$$\lambda_1 = \pm 1\,, \ldots\,, \lambda_n = \pm 1$$

puis, par considération de signes :

$$\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 1$$

et finalement $M = I_n$.

D'après (b) et (c), $R_1R_2^{-1} \in \mathbf{O}_n(\mathbf{R}) \cap \mathscr{T}_n^{>0}(\mathbf{R}) \subset \{I_n\}$ et $Q_1^{-1}Q_2 \in \mathbf{O}_n(\mathbf{R}) \cap \mathscr{T}_n^{>0}(\mathbf{R}) \subset \{I_n\}$. Ainsi $\boxed{R_1 = R_2 \text{ et } Q_1 = Q_2.}$

Q21 Démontrer que l'application :

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{O}_n(\mathbf{R}) \times \mathscr{T}_n^{>0}(\mathbf{R}) & \longrightarrow & \mathbf{GL}_n(\mathbf{R}) \\ (Q,R) & \longmapsto & QR \end{array} \right.$$

est un homéomorphisme, i.e. que f est continue, bijective et que f^{-1} est continue. On pourra s'aider de la compacité de $\mathbf{O}_n(\mathbf{R})$ (cf. **Q10**) pour établir la continuité de f^{-1}.

(a) *Surjectivité.* — La surjectivité de l'application f découle de **Q19**.

(b) *Injectivité.* — L'injectivité de l'application f découle de **Q20**.

(c) *Continuité de f.* — Comme l'application :

$$\mu \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbf{R}) \times \mathscr{M}_n(\mathbf{R}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_n(\mathbf{R}) \\ (M_1, M_2) & \longmapsto & M_1 \times M_2 \end{array} \right.$$

est bilinéaire, de source un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension finie, elle est continue. Nous en déduisons que :

$$f = \mu_{|\mathbf{O}_n(\mathbf{R}) \times \mathscr{T}_n^{>0}(\mathbf{R})}^{|\mathbf{GL}_n(\mathbf{R})}$$

est continue comme restriction-correctriction d'une application continue.

(d) *Continuité de f^{-1}, avec le critère séquentiel.* — Soit $(A_k)_{k \in \mathbf{N}}$ une suite de matrices de $\mathbf{GL}_n(\mathbf{R})$ qui converge vers une matrice $A \in \mathbf{GL}_n(\mathbf{R})$. Nous allons démontrer que :

$$\underbrace{f^{-1}(A_k) =: (Q_k, R_k)}_{\text{donc } A_k = Q_k R_k} \xrightarrow[k \to +\infty]{} \underbrace{f^{-1}(A) =: (Q, R)}_{\text{donc } A = QR}$$

i.e. que :

$$Q_k \xrightarrow[k \to +\infty]{} Q \quad \text{et} \quad R_k \xrightarrow[k \to +\infty]{} R \qquad [\text{espace vectoriel normé produit}] .$$

- Comme $\mathbf{O}_n(\mathbf{R})$ est compact (cf. **Q10**), il nous suffit de démontrer que Q est la seule valeur d'adhérence dans $\mathbf{O}_n(\mathbf{R})$ de la suite $(Q_k)_{k \in \mathbf{N}}$ pour savoir que :

$$Q_k \xrightarrow[k \to +\infty]{} Q .$$

- Soit $P \in \mathbf{O}_n(\mathbf{R})$ une valeur d'adhérence de la suite $(Q_k)_{k \in \mathbf{N}}$. Il existe donc une application $\varphi : \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{N}$ strictement croissante telle que :

$$Q_{\varphi(k)} \xrightarrow[k \to +\infty]{} P .$$

La transposée de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ vers $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ est linéaire, de source un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Elle est donc continue. Ainsi :

$$\left(Q_{\varphi(k)}\right)^\top = \left(Q_{\varphi(k)}\right)^{-1} \xrightarrow[k \to +\infty]{} P^\top = P^{-1} .$$

Comme $\left(A_{\varphi(k)}\right)_{k \in \mathbf{N}}$ est une suite extraite de la suite $(A_k)_{k \in \mathbf{N}}$ qui converge vers A :

$$A_{\varphi(k)} \xrightarrow[k \to +\infty]{} A .$$

La continuité de la multiplication matricielle μ livre alors :

$$\left(Q_{\varphi(k)}\right)^{-1} \times A_{\varphi(k)} = R_{\varphi(k)} \xrightarrow[k \to +\infty]{} P^{-1} \times A =: S .$$

On vérifie que :

$$\overline{\mathscr{T}_n^{>0}(\mathbf{R})} = \left\{ M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R}) \ : \ M \text{ est triangulaire supérieure et } [M]_{1,1} \geqslant 0 \,, \ldots , [M]_{n,n} \geqslant 0 \right\} .$$

La matrice $S \in \overline{\mathscr{T}_n^{>0}(\mathbf{R})}$, comme limite d'une suite de matrices de $\mathscr{T}_n^{>0}(\mathbf{R})$ qui converge.
Or la matrice S est inversible, comme produit des matrices P^{-1} et A, toutes deux inversibles.
Comme S est triangulaire et inversible, ses coefficients diagonaux sont nécessairement non nuls. Ainsi $S \in \mathscr{T}_n^{>0}(\mathbf{R})$.
Nous en déduisons que :

$$A = PS \ \text{ où } P \in \mathbf{O}_n(\mathbf{R}) \text{ et } S \in \mathscr{T}_n^{>0}(\mathbf{R}) .$$

Par unicité de la décomposition d'Iwasawa de A (cf. **Q20**), il vient $Q = P$ et $R = S$.

- Nous savons que la suite $(Q_k)_{k \in \mathbf{N}}$ converge vers Q. Par continuité de la transposée et du produit matriciel, nous en déduisons que :

$$R_k = Q_k^\top \times A_k \xrightarrow[k \to +\infty]{} Q^\top \times A = R .$$

De cette étude nous déduisons que $\boxed{\text{l'application } f \text{ est un homémorphisme de } \mathbf{O}_n(\mathbf{R}) \times \mathscr{T}_n^{>0}(\mathbf{R}) \text{ sur } \mathbf{GL}_n(\mathbf{R}).}$

L'application réciproque d'une application bijective continue n'est pas nécessairement continue. Par exemple, l'application :

$$\rho \left| \begin{array}{ccc} [0,2\pi[& \longrightarrow & \mathbf{U} \\ \theta & \longmapsto & e^{i\theta} \end{array} \right.$$

est bijective et continue, mais l'application :

$$\rho^{-1} \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{U} & \longrightarrow & [0,2\pi[\\ z & \longmapsto & \text{l'unique } \theta \in [0,2\pi[\text{ tel que } z = e^{i\theta} \end{array} \right.$$

n'est pas continue en 1. En effet :

$$e^{i(2\pi - \frac{1}{n})} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

mais :

$$\rho^{-1}\left(e^{i(2\pi-\frac{1}{n})}\right) = 2\pi - \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2\pi \neq 0 = \rho^{-1}(1)\,.$$

Q22 Soit $(C_1,\dots,C_n)$ une famille de vecteurs de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$. Démontrer que :

$$|\det(C_1,\dots,C_n)| \leqslant ||\,C_1\,|| \times \dots \times ||\,C_n\,|| \qquad [\text{inégalité de Hadamard}]\,.$$

Si la famille $(C_1,\dots,C_n)$ est liée, alors $\det(C_1,\dots,C_n)=0$ et l'inégalité à établir est triviale.
Désormais, nous supposons la famille $(C_1,\dots,C_n)$ est libre. Comme elle possède $n=\dim\left(\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})\right)$ vecteurs, cette famille $(C_1,\dots,C_n)$ est une base de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$.

(a) *Décomposition d'Iwasawa de la matrice $A=(C_1\,|\,C_2\,|\,\dots\,|\,C_n)$.* — La matrice $A=(C_1\,|\,C_2\,|\,\dots\,|\,C_n)\in\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ est inversible. D'après **Q19** :

$$\exists\,(Q,R)\in\mathbf{O}_n(\mathbf{R})\times\mathscr{T}_n^{>0}(\mathbf{R}) \quad A=QR \qquad [\text{décomposition d'Iwasawa}]\,.$$

(b) *Le déterminant d'une matrice orthogonale vaut ±1.* — Comme $Q\in\mathbf{O}_n(\mathbf{R})$ et $\det(Q)=\det\left(Q^\top\right)$, il vient :

$$1=\det(I_n)=\det\left(Q\times Q^\top\right)=\det(Q)\times\det\left(Q^\top\right)=\det(Q)^2\,.$$

Ainsi $\det(Q)=\pm1$.

(c) *Simplification de $|\det(C_1,\dots,C_n)|$.* — D'après (d) et $R\in\mathscr{T}_n^{>0}(\mathbf{R})$:

$$|\det(C_1,\dots,C_n)|=|\det(A)|=\underbrace{|\det(Q)|}_{=1}\times|\det(R)|=|\det(R)|=\prod_{k=1}^{n}[R]_{k,k}\,.$$

(d) *Réduction du problème.* — D'après (d), il nous suffit de démontrer que :

$$\forall\,k\in[\![1,n]\!] \quad [R]_{k,k}\leqslant||\,C_k\,||$$

pour conclure à l'inégalité d'Hadamard.

(e) *La majoration clé.* — De l'identité $A=QR$, nous déduisons que :

$$R=Q^{-1}A=Q^\top A=Q^\top(C_1\,|\,C_2\,|\,\dots\,|\,C_n)=\left(Q^\top C_1\,|\,Q^\top C_2\,|\,\dots\,|\,Q^\top C_n\right)\,.$$

Soit $k\in[\![1,n]\!]$. D'après l'identité précédente, la k-ième colonne $R_{\bullet k}$ de R est $Q^\top C_k$.

$$R_{k,k}^2\leqslant\underbrace{\sum_{i=1}^{n}R_{i,k}^2}_{=||R_{\bullet k}||^2}\leqslant\left|\left|Q^\top\times C_k\right|\right|^2=\left(Q^\top C_k\right)^\top\times Q^\top\times C_k=C_k^\top\times\underbrace{Q\times Q^\top}_{=I_n}\times C_k=C_k^\top\times C_k=||\,C_k\,||^2\,.$$

Comme la racine carrée est croissante sur $\mathbf{R}_+$ et $R_{k,k}>0$, nous en déduisons que :

$$R_{k,k}\leqslant||\,C_k\,||\,.$$

D'après (c) et (e) :

$$\boxed{|\det(C_1,\dots,C_n)|\leqslant||\,C_1\,||\times\dots\times||\,C_n\,||\,.}$$

7. Identité de polarisation et isométrie vectorielle

Soit $(E, \langle \cdot\,,\,\cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \geqslant$ et :

$$\|\cdot\| \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{\langle x\,,\,x \rangle} \end{array} \right.$$

la norme sur E associée au produit scalaire $\langle \cdot\,,\,\cdot \rangle$.

Q23 Rappeler l'identité de polarisation.

Pour tout $(x, y) \in E^2$:

$$\boxed{\langle x\,,\,y \rangle = \frac{\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2}{4} \qquad \text{[identité de polarisation]}\ .}$$

D'après l'identité de polarisation, la connaissance de l'application norme $\|\cdot\|$ permet de retrouver le produit scalaire $\langle \cdot\,,\,\cdot \rangle$ auquel elle est associée.

Soit f un endomorphisme de E.

On dit que f est une isométrie de E, si :

$$\forall\, x \in E \quad \|f(x)\| = \|x\| \qquad [f \text{ préserve la norme}]\ .$$

Q24 Démontrer que f est une isométrie de E si et seulement si :

$$\forall\, (x, y) \in E^2 \quad \langle f(x)\,,\,f(y) \rangle = \langle x\,,\,y \rangle \qquad [f \text{ préserve le produit scalaire}]\ .$$

- *Sens direct.* — Supposons que f est une isométrie. Fixons $x, y \in E$.

$$\begin{aligned} \langle f(x)\,,\,f(y) \rangle &= \frac{\|f(x)+f(y)\|^2 - \|f(x)-f(y)\|^2}{4} && \text{[identité de polarisation]} \\ &= \frac{\|f(x+y)\|^2 - \|f(x-y)\|^2}{4} && \text{[linéarité de } f\text{]} \\ &= \frac{\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2}{4} && [f \text{ est une isométrie}] \\ &= \langle x\,,\,y \rangle && \text{[identité de polarisation]} \end{aligned}$$

  Ainsi $\boxed{f \text{ préserve le produit scalaire.}}$

- *Sens réciproque.* — Supposons que f préserve le produit scalaire. Fixons $x \in E$.

$$\begin{aligned} \|f(x)\| &= \sqrt{\langle f(x)\,,\,f(x) \rangle} \\ &= \sqrt{\langle x\,,\,x \rangle} && [f \text{ préserve le produit scalaire}] \\ &= \|x\| \end{aligned}$$

  Ainsi $\boxed{f \text{ est une isométrie.}}$

Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E.

Q25 Démontrer que f est une isométrie de E si et seulement si $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est une base orthonormée de E.

- *Sens direct.* — Supposons que f est une isométrie. D'après **Q24** et le caractère orthonormé de la base $(e_1, \ldots, e_n)$ de E :
$$\forall\,(i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \quad \big\langle f(e_i)\,,\, f(e_j) \big\rangle = \big\langle e_i\,,\, e_j \big\rangle = \delta_{i,j}\,.$$
La famille $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est orthonormée, donc libre. Comme elle possède $n = \dim(E)$ vecteurs, elle est une base de E. Ainsi $\boxed{(f(e_1), \ldots, f(e_n)) \text{ est une base orthonormée de } E.}$

- *Sens réciproque.* — Supposons que $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est une base orthonormée de E. Fixons $x \in E$. D'après **Q5** :
$$(\star) \qquad x = \sum_{i=1}^{n} \langle x\,,\, e_i \rangle\, e_i\,.$$
Comme les vecteurs $\langle x\,,\, e_1 \rangle\, e_1\,, \ldots, \langle x\,,\, e_n \rangle\, e_n$ sont deux à deux orthogonaux, le théorème de Pythagore livre :
$$\|\, x \,\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|\, \langle x\,,\, e_i \rangle\, e_i \,\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle x\,,\, e_i \rangle^2\, \underbrace{\|\, e_i \,\|^2}_{=1} = \sum_{i=1}^{n} \langle x\,,\, e_i \rangle^2\,.$$
D'après $(\star)$ et la linéarité de f :
$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle x\,,\, e_i \rangle\, f(e_i)\,.$$
Comme les vecteurs $\langle x\,,\, e_1 \rangle\, f(e_1)\,, \ldots, \langle x\,,\, e_n \rangle\, f(e_n)$ sont deux à deux orthogonaux, le théorème de Pythagore livre :
$$\|\, f(x) \,\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|\, \langle x\,,\, e_i \rangle\, f(e_i) \,\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle x\,,\, e_i \rangle^2\, \underbrace{\|\, f(e_i) \,\|^2}_{=1} = \sum_{i=1}^{n} \langle x\,,\, e_i \rangle^2\,.$$
D'après cette étude :
$$\|\, x \,\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle x\,,\, e_i \rangle^2 = \|\, f(x) \,\|^2\,.$$
Comme les nombres réels $\|\, x \,\|$ et $\|\, f(x) \,\|$ sont positifs, nous en déduisons que $\|\, x \,\| = \|\, f(x) \,\|$. Ceci étant établi pour un vecteur x de E quelconque, $\boxed{\text{l'application } f \text{ est une isométrie.}}$

Q26 Démontrer que f est une isométrie de E si et seulement si $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \in \mathbf{O}_n(\mathbf{R})$.

(a) *Coefficients de la matrice* $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$. — D'après **Q5**, pour tout $j \in [\![1,n]\!]$:
$$f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} \big\langle f(e_j)\,,\, e_i \big\rangle\, e_i$$
d'où, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$:
$$\boxed{[\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)]_{i,j} = \big\langle f(e_j)\,,\, e_i \big\rangle = \big\langle e_i\,,\, f(e_j) \big\rangle\,.}$$

(b) *Coefficients de la matrice* $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)^\top \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$. — Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$.
$$\begin{aligned}
\big[\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)^\top \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)\big]_{i,j} &= \sum_{k=1}^{n} \big[\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)^\top\big]_{i,k} \times [\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)]_{k,j} \\
&= \sum_{k=1}^{n} [\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)]_{k,i} \times [\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)]_{k,j} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \langle e_k\,,\, f(e_i) \rangle\, \big\langle e_k\,,\, f(e_j) \big\rangle\,.
\end{aligned}$$
À l'aide de **Q5** et **Q7**, nous en déduisons que :
$$\boxed{\big[\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)^\top \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)\big]_{i,j} = \big\langle f(e_i)\,,\, f(e_j) \big\rangle\,.}$$

(c) *Conclusion.* — D'après **Q25**, f est une isométrie de E si et seulement si la famille $(f(e_1),\ldots,f(e_n))$ est une base orthonormée de E.
Comme la famille $(f(e_1),\ldots,f(e_n))$ comporte $n=\dim(E)$ vecteurs, f est une isométrie de E si et seulement si la famille $(f(e_1),\ldots,f(e_n))$ est orthonormée.
D'après (b), f est donc une isométrie de E si et seulement si $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)^{\top}\times\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)=I_n$.
Or, une matrice carrée est inversible à droite si et seulement si elle est inversible à gauche et, si tel est le cas, inverse à gauche et inverse à droite sont uniques et coïncident. Donc :

$$\boxed{f \text{ est une isométrie de } E \text{ si et seulement si } \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)\in\mathbf{O}_n(\mathbf{R})\,.}$$

Q27 Démontrer que :

$$f \text{ est une isométrie} \quad\Longrightarrow\quad \det(f)\in\{-1,1\}$$

mais que la réciproque est fausse.

(a) *Une isométrie vectorielle a déterminant* ±1. — Soit f une isométrie de E.
Introduisons une base orthonormée $\mathscr{B}$ de E. D'après **Q26**, $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)\in\mathbf{O}_n(\mathbf{R})$.
Or, en **Q22**, nous avons établi qu'une matrice orthogonale a déterminant ±1.
Ainsi $\boxed{\det(f)=\det(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f))=\pm1.}$

(b) *Un endomorphisme d'un espace euclidien, de déterminant* ±1*, n'est pas nécessairement une isométrie.* — Considérons $\mathbf{R}^2$ muni de son produit scalaire usuel.
Sa base canonique $\mathscr{B}_c=(e_1,e_2)$ est orthonormée.
Soit f l'endomorphisme de $\mathbf{R}^2$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$, i.e. f est l'application :

$$f\;\left|\;\begin{array}{ccc}\mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R}^2\\ (x,y) & \longmapsto & (x+y,y)\,.\end{array}\right.$$

Alors $\det(f)=1$, mais f n'est pas une isométrie de $\mathbf{R}^2$ car $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)\notin\mathbf{O}_2(\mathbf{R})$, cf. **Q26**. En effet, ses vecteurs colonnes ne forment pas une base orthonormée de $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbf{R})$ muni de son produit scalaire usuel, cf. **Q11**.

8. Isométries vectorielles d'un plan euclidien

Soit $(E,\langle\cdot\,,\,\cdot\rangle)$ un espace euclidien de dimension 2 et :

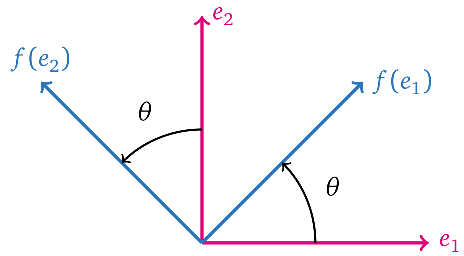
$$\|\cdot\|\;\left|\;\begin{array}{ccc}E & \longrightarrow & \mathbf{R}\\ x & \longmapsto & \sqrt{\langle x\,,\,x\rangle}\end{array}\right.$$

la norme sur E associée au produit scalaire $\langle\cdot\,,\,\cdot\rangle$.

Soient $\mathscr{B}=(e_1,e_2)$ une base orthonormée de E, f une isométrie de E et $A:=\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)\in\mathbf{O}_2(\mathbf{R})$.

Supposons que $\det(f)=\det(A)=1$, i.e. que $A\in\mathbf{SO}_2(\mathbf{R})$. D'après l'exercice 37 du chapitre « Structures algébriques » :

$$\exists!\,\theta\in[0,2\pi[\quad A=\begin{pmatrix}\cos(\theta)&-\sin(\theta)\\ \sin(\theta)&\cos(\theta)\end{pmatrix}$$



i.e. :

$$f(e_1)=\cos(\theta)\,e_1+\sin(\theta)\,e_2 \qquad\text{et}\qquad f(e_2)=-\sin(\theta)\,e_1+\cos(\theta)\,e_2\,.$$

L'endomorphisme f est donc une rotation plane.

Dans la suite, nous supposons que $\det(f)=\det(A)=-1$ et nous nous proposons de décrire géométriquement f.

Q28 Démontrer que :

$$\exists\,!\,\theta \in [0,2\pi[\quad A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

La matrice $B := A \times \operatorname{diag}(1,-1)$ est orthogonale, comme produit de deux matrices orthogonales.
De plus :

$$\det(B) = \det(A \times \operatorname{diag}(1,-1)) = \det(A) \times \det(\operatorname{diag}(1,-1)) = (-1)\times(-1) = 1\,.$$

Ainsi $B \in \mathbf{SO}_2(\mathbf{R})$ et donc :

$$\exists\,!\,\theta \in [0,2\pi[\quad B = A \times \operatorname{diag}(1,-1) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

d'après la description en extension de $\mathbf{SO}_2(\mathbf{R})$ rappelée précédemment.
Nous en déduisons que :

$$\boxed{\exists\,!\,\theta \in [0,2\pi[\quad A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}.}$$

Q29 Déterminer les éléments propres de la matrice A.

(a) *Polynôme caractéristique de A.* — D'après **Q28** :

$$\chi_A = X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$$

(b) *Valeurs propres de A.* — Nous en déduisons que

- $\boxed{\operatorname{Spec}_{\mathbf{R}}(A) = \{-1, 1\}}$;
- A est diagonalisable sur $\mathbf{R}$ (χ_A est scindé à racines simples sur $\mathbf{R}$) ;
- $\dim(E_1(A)) = \dim(E_{-1}(A)) = 1$.

(c) *Sous-espace propre $E_1(A)$.* — Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbf{R})$.

$$A \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff \left\{ \begin{array}{rcrcl} (\cos(\theta)-1)\,x & + & \sin(\theta)\,y & = & 0 \\ \sin(\theta)\,x & - & (\cos(\theta)+1)\,y & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcrcl} 2\sin^2(\theta/2)\;x & - & 2\sin(\theta/2)\cos(\theta/2)\;y & = & 0 \\ 2\sin(\theta/2)\cos(\theta/2)\;x & - & 2\cos^2(\theta/2)\;y & = & 0 \end{array} \right.$$

Le vecteur $\begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) \end{pmatrix}$, normé donc non nul, appartient à la droite vectorielle $E_1(A)$, d'où :

$$\boxed{E_1(A) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) \end{pmatrix}\right).}$$

(d) *Sous-espace propre $E_{-1}(A)$.* — De manière analogue, on établit que $\boxed{E_{-1}(A) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} \sin(\theta/2) \\ -\cos(\theta/2) \end{pmatrix}\right).}$

Q30 En déduire que f est une symétrie orthogonale, par rapport à une droite dont on précisera un vecteur directeur.

Guidés par **Q29**, nous introduisons les vecteurs :

$$u_1 := \cos(\theta/2)\,e_1 + \sin(\theta/2)\,e_2 \qquad \text{et} \qquad u_2 := \sin(\theta/2)\,e_1 - \cos(\theta/2)\,e_2\,.$$

La famille $\mathscr{C} := (u_1, u_2)$ est orthonormée car, la base $\mathscr{B} = (e_1, e_2)$ étant orthonormée, il vient :

- $\langle u_1\,,\,u_1\rangle = \cos^2(\theta/2) + \sin^2(\theta/2) = 1$;
- $\langle u_2\,,\,u_2\rangle = \sin^2(\theta/2) + (-\cos(\theta/2))^2 = 1$;
- $\langle u_1\,,\,u_2\rangle = \cos(\theta/2)\times\sin(\theta/2) + \sin(\theta/2)\times(-\cos(\theta/2)) = 0$

d'après **Q7**. Comme la famille $\mathscr{C}$ comporte $2 = \dim(E)$ vecteurs, elle forme une base orthonormée de E.
En outre, d'après **Q29** :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Nous en déduisons que f est la symétrie vectorielle par rapport à $\mathrm{Vect}(u_1)$, parallèlement à $\mathrm{Vect}(u_2)$. Comme $\mathrm{Vect}(u_2) = \mathrm{Vect}(u_1)^{\perp}$, nous pouvons conclure :

$\boxed{f \text{ est la symétrie orthogonale de } E \text{ par rapport à la droite engendrée par } \cos(\theta/2)\, e_1 + \sin(\theta/2)\, e_2.}$

9. Inégalité de Cauchy-Schwarz

Q31 Soient $(E, \langle \cdot , \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel et :

$$\|\cdot\| \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{\langle x , x \rangle} \end{array} \right.$$

la norme sur E associée au produit scalaire $\langle \cdot , \cdot \rangle$. Rappeler l'inégalité de Cauchy-Schwarz et son cas d'égalité.

Pour tout $x, y \in E$:

$$\boxed{|\langle x , y \rangle| \leqslant \|x\| \times \|y\|}$$

et :

$$\boxed{|\langle x , y \rangle| = \|x\| \times \|y\| \iff \text{la famille } (x, y) \text{ est liée .}}$$

N.B. | Il convient de connaître une démonstration de l'inégalité de Cauchy-Schwarz et de son cas d'égalité.

Q32 Soit $E = \{f \in \mathscr{C}([a,b], \mathbf{R}) \;:\; \forall x \in [a,b] \quad f(x) > 0\}$. Prouver que l'ensemble :

$$\left\{ \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \times \int_a^b \frac{1}{f(t)}\,\mathrm{d}t \;:\; f \in E \right\}$$

admet une borne inférieure m et déterminer la valeur de m.

(a) *Existence de m.* — L'ensemble :

$$A := \left\{ \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \times \int_a^b \frac{1}{f(t)}\,\mathrm{d}t \;:\; f \in E \right\}$$

contient $(b-a)^2$, car la fonction définie et constante sur $[a,b]$ avec 1 pour seule valeur, appartient à E. Il est donc non vide.
D'autre part, par positivité de l'intégrale, l'ensemble A est minoré par 0.
Par propriété de la borne inférieure, $\boxed{m := \inf(A) \text{ est un nombre réel bien défini.}}$

(b) *Calcul de m.* — D'après le point précédent, comme m est plus petit que tous les éléments de A :

$$(\star) \quad m \leqslant (b-a)^2 .$$

Munissons le $\mathbf{R}$-espace vectoriel $\mathscr{C}^0([a,b], \mathbf{R})$ de son produit scalaire usuel :

$$\langle \cdot , \cdot \rangle \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{C}^0([a,b],\mathbf{R}) \times \mathscr{C}^0([a,b],\mathbf{R}) & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (f_1, f_2) & \longmapsto & \displaystyle\int_a^b f_1(t) \times f_2(t)\,\mathrm{d}t . \end{array} \right.$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, pour tout $f \in E$:

$$\underbrace{\int_a^b \sqrt{f(t)} \times \frac{1}{\sqrt{f(t)}}\, \mathrm{d}t}_{=(b-a)\geqslant 0} \leqslant \sqrt{\int_a^b \underbrace{\sqrt{f(t)}^2}_{=f(t)}\, \mathrm{d}t} \times \sqrt{\int_a^b \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{f(t)}}\right)^2}_{=1/f(t)}\, \mathrm{d}t}\ .$$

Comme la fonction carrée est croissante sur $\mathbf{R}_+$, nous en déduisons que :

$$(b-a)^2 \leqslant \int_a^b f(t)\, \mathrm{d}t \times \int_a^b \frac{1}{f(t)}\, \mathrm{d}t\ .$$

Le nombre $(b-a)^2$ est donc un minorant de A. Il est donc plus petit que le plus grand des minorants de A, qui par définition est m. Ainsi :

$$(\star\star) \quad (b-a)^2 \leqslant m\ .$$

D'après $(\star)$ et $(\star\star)$, $\boxed{m = (b-a)^2}$.

Q33 Soient $(n,k) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{N}^*$. Déterminer l'ensemble solution du système :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & \dots & + & x_n & = & n^k \\ x_1^2 & + & \dots & + & x_n^2 & = & n^k \end{array}\right.$$

d'inconnue $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$.

Nous notons $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$ le produit scalaire usuel sur $\mathbf{R}^n$ et $||\cdot||$ la norme associée.

(a) *Une condition nécessaire pour que le système considéré ait une solution.* — Supposons qu'il existe $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ tel que :

$$(\mathscr{S}) \quad \left\{\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & \dots & + & x_n & = & n^k \\ x_1^2 & + & \dots & + & x_n^2 & = & n^k\ . \end{array}\right.$$

En posant $u = (1, \dots, 1)$, il vient :

$$\langle x\,, u \rangle = n^k \quad \text{et} \quad ||x||^2 = n^k\ .$$

Avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous en déduisons :

$$n^k = \langle x\,, u \rangle \leqslant ||x|| \times ||u|| = n^{k/2} \times n^{1/2} = n^{(k+1)/2}$$

puis :

$$n^{(k-1)/2} \leqslant 1\ .$$

Si $n \geqslant 2$ et $k \geqslant 2$, alors :

$$1 \geqslant n^{(k-1)/2} \geqslant n \geqslant 2 \qquad [\text{contradiction}]\ .$$

Ainsi, pour que le système $(\mathscr{S})$ ait une solution, il faut que $n = 1$ ou $k = 1$.

(b) *Résolution de $(\mathscr{S})$ dans le cas où $n = 1$.* — Supposons $n = 1$. Alors $(\mathscr{S})$ est le système :

$$\left\{\begin{array}{ccc} x_1 & = & 1 \\ x_1^2 & = & 1 \end{array}\right.$$

d'inconnue $x_1 \in \mathbf{R}$. Son ensemble solution est $\{1\}$.

(c) *Résolution de $(\mathscr{S})$ dans le cas où $k = 1$ et $n \geqslant 2$.* — Supposons $k = 1$ et $n \geqslant 2$. Alors $(\mathscr{S})$ est le système :

$$(\mathscr{S}) \quad \left\{\begin{array}{cccl} \langle x\,, u \rangle & = & n & \big[x \text{ appartient à l'hyperplan affine passant par } u \text{ et dirigé par } u^\perp\big] \\ ||x||^2 & = & n & \big[x \text{ appartient à la sphère de centre } 0_{\mathbf{R}^n} \text{ et de rayon } \sqrt{n}\big] \end{array}\right.$$

d'inconnue $x \in \mathbf{R}^n$.

- *Analyse.* — Soit $x \in \mathbf{R}^n$ solution de $(\mathscr{S})$. Alors :

$$|\langle x\,,u\rangle| = \underbrace{\langle x\,,u\rangle}_{=n} = \underbrace{||\,x\,||}_{=\sqrt{n}} \times \underbrace{||\,u\,||}_{=\sqrt{n}}\,.$$

D'après le cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz, la famille (x,u) est libre. Comme $u \neq 0_{\mathbf{R}^n}$, nous en déduisons qu'il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $x = \lambda\, u = (\lambda, \dots, \lambda)$.

- *Synthèse.* — Soit $x = (\lambda, \dots, \lambda)$, où $\lambda \in \mathbf{R}$. Nous calculons :

$$\langle x\,,u\rangle = n\,\lambda \qquad \text{et} \qquad ||\,x\,||^2 = n\,\lambda^2\,.$$

Ainsi, x est solution de $(\mathscr{S})$ si et seulement si $\lambda = 1$.

D'après cette étude, dans le cas où $k = 1$ et $n \geqslant 2$, l'ensemble solution de $(\mathscr{S})$ est $\{(1, \dots, 1)\}$.

(d) *Conclusion.* — Rassemblons tous les résultats obtenus.

$$\boxed{\text{L'ensemble solution du système } \left\{\begin{array}{rcl} x_1 + \ldots + x_n & = & n^k \\ x_1^2 + \ldots + x_n^2 & = & n^k\,. \end{array}\right. \text{ est } \left\{\begin{array}{ll} \varnothing & \text{si } n \geqslant 2 \text{ et } k \geqslant 2 \\ \{1\} & \text{si } n = 1 \\ \{(1, \dots, 1)\} & \text{si } k = 1 \text{ et } n \geqslant 2\,. \end{array}\right.}$$

10. Projecteurs orthogonaux

Soient $(E, \langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle)$ un espace préhilbertien réel et

$$||\cdot|| \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{\langle x\,,x\rangle} \end{array}\right.$$

la norme sur E associée au produit scalaire $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$.

Soit p un projecteur de E.

Q34 Démontrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes.

i. $\mathrm{Ker}\,(p) \perp \mathrm{Im}\,(p)$
ii. $\forall\, x \in E \quad ||\,p(x)\,|| \leqslant ||\,x\,||$

(a) *L'implication i. $\Longrightarrow$ ii.* — Supposons $\mathrm{Ker}\,(p) \perp \mathrm{Im}\,(p)$ et démontrons que :

$$\forall\, x \in E \quad ||\,p(x)\,|| \leqslant ||\,x\,||\,.$$

Soit $x \in E$. Alors :

$$x = \underbrace{x - p(x)}_{\in \mathrm{Ker}(p)} + \underbrace{p(x)}_{\in \mathrm{Im}(p)}\,.$$

De $\mathrm{Ker}\,(p) \perp \mathrm{Im}\,(p)$ et du théorème de Pythagore, nous déduisons :

$$||\,x\,||^2 = \underbrace{||\,x - p(x)\,||^2}_{\geqslant 0} + ||\,p(x)\,||^2 \geqslant ||\,p(x)\,||^2\,.$$

Comme les nombres $||\,x\,||$ et $||\,p(x)\,||$ sont positifs et comme la fonction racine carrée est croissante sur $\mathbf{R}_+$, nous en déduisons :

$$\boxed{||\,p(x)\,|| \leqslant ||\,x\,||}\,.$$

(b) *L'implication ii. $\Longrightarrow$ i.* — Supposons :

$$\forall\, x \in E \quad ||\,p(x)\,|| \leqslant ||\,x\,||$$

et démontrons $\mathrm{Ker}\,(p) \perp \mathrm{Im}\,(p)$, i.e. que :

$$\forall\,(x, y) \in \mathrm{Ker}\,(p) \times \mathrm{Im}\,(p) \quad \langle x\,,y\rangle = 0\,.$$

Soient $(x,y) \in \operatorname{Ker}(p) \times \operatorname{Im}(p)$.
Si $y = 0_E$ alors il est clair que $\langle x\,,\,y \rangle = 0$.
Nous supposons désormais que $y \neq 0_E$ et nous considérons un point générique :

$$x + t\,y \quad , \quad \text{où } t \in \mathbf{R}$$

de la droite affine passant par x et dirigée par y.

> Cette idée nous vient de la démonstration de l'inégalité de Cauchy-Schwarz présentée en classe, ce qui illustre la puissance que l'on tire d'une bonne compréhension/connaissance du cours.

Soit $t \in \mathbf{R}$.
Notons que :

$$p(x+t\,y) = p(x) + t\,p(y) = t\,y$$

car $\operatorname{Im}(p) = \operatorname{Ker}(p - \mathrm{id}_E)$ puisque p est un projecteur.
D'après ii. :

$$t^2\,||\,y\,||^2 = ||\,p(x+t\,y)||^2 \leqslant ||\,x+t\,y\,||^2 = ||\,x\,||^2 + 2\,t\,\langle x\,,\,y\rangle + t^2\,||\,y\,||^2$$

qui nous livre :

$$0 \leqslant ||\,x\,||^2 + 2\,t\,\langle x\,,\,y\rangle\ .$$

La fonction affine $t \longmapsto ||\,x\,||^2 + 2\,t\,\langle x\,,\,y\rangle$ est donc minorée sur $\mathbf{R}$. Nous en déduisons que $\boxed{\langle x\,,\,y\rangle = 0.}$

N.B. | Un projecteur vérifiant l'une des deux assertions précédentes (donc les deux) est appelé projecteur orthogonal.

11. Théorème de Riesz

Soit $(E, \langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \geqslant 1$.

Q35 Justifier que, pour tout $x \in E$, l'application :

$$\langle x\,,\,\cdot\,\rangle \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ y & \longmapsto & \langle x\,,\,y\,\rangle \end{array} \right.$$

est une forme linéaire sur E.

Il s'agit d'une $\boxed{\text{conséquence immédiate de la linéarité à droite du produit scalaire.}}$

Q36 Démontrer que :

$$\forall\,\varphi \in \mathscr{L}(E,\mathbf{R}) \qquad \exists\,!x \in E \qquad \varphi = \langle x\,,\,\cdot\,\rangle\ .$$

(a) *Reformulation de la question posée.* — D'après **Q35**, l'application :

$$\theta \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathscr{L}(E,\mathbf{R}) \\ x & \longmapsto & \langle x\,,\,\cdot\,\rangle \end{array} \right.$$

est bien définie. $\boxed{\text{La question posée revient à démontrer que l'application } \theta \text{ est bijective.}}$

(b) *Linéarité de θ.* — Soient $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}$ et $x_1, x_2 \in E$.

- Les applications :

$$\theta(\lambda_1\,x_1 + \lambda_2\,x_2) = \langle \lambda_1\,x_1 + \lambda_2\,x_2\,,\,\cdot\,\rangle \quad \text{et} \quad \lambda_1\,\theta(x_1) + \lambda_2\,\theta(x_2) = \lambda_1\,\langle x_1\,,\,\cdot\,\rangle + \lambda_2\,\langle x_2\,,\,\cdot\,\rangle$$

ont même ensemble de départ (E) et même ensemble d'arrivée ($\mathbf{R}$).

- Soit $y \in E$. Comme le produit scalaire est linéaire à gauche :

$$\begin{array}{rcl} \theta(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)(y) & = & \langle \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 , y \rangle \\ & = & \lambda_1 \langle x_1 , y \rangle + \lambda_2 \langle x_2 , y \rangle \\ & = & \lambda_1 \theta(x_1)(y) + \lambda_2 \theta(x_2)(y) \\ & = & (\lambda_1 \theta(x_1) + \lambda_2 \theta(x_2))(y) . \end{array}$$

Des deux points précédents, nous déduisons que :

$$\theta(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 \theta(x_1) + \lambda_2 \theta(x_2) .$$

$\boxed{\text{L'application } \theta \text{ est donc linéaire.}}$

(c) *Injectivité de θ.* — Comme θ est linéaire, nous pouvons étudier son noyau pour établir son injectivité. Soit $x \in \mathrm{Ker}(\theta)$. Nous en déduisons que :

$$\forall y \in E \quad \underbrace{\theta(x)(y)}_{\langle x , y \rangle} = 0_E .$$

En particulier, $\langle x , x \rangle = 0$.
Le caractère défini du produit scalaire livre alors $x = 0_E$.

$\boxed{\text{L'application } \theta \text{ est donc injective.}}$

(d) *Bijectivité de θ.* — L'application $\theta : E \longrightarrow \mathscr{L}(E, \mathbf{R})$ est linéaire et injective. Comme :

$$\dim(\mathscr{L}(E, \mathbf{R})) = \dim(E) \times \underbrace{\dim(\mathbf{R})}_{=1} = \dim(E) < \infty$$

nous en déduisons que $\boxed{\theta \text{ est bijective}}$.

Q37 Soit H un hyperplan de E. Démontrer que :

$$\exists x \in E \qquad H = x^{\perp} .$$

Le vecteur x est-il unique ?

(a) *Existence du vecteur x.* — Par définition d'un hyperplan, il existe $\varphi \in \mathscr{L}(E, \mathbf{R}) \setminus \{0_E\}$ tel que :

$$(\star) \qquad H = \mathrm{Ker}(\varphi) .$$

D'après **Q36**, il existe un unique vecteur $x \in E$ tel que :

$$(\star\star) \qquad \varphi = \langle x , \cdot \rangle .$$

Notons que, comme φ n'est pas la forme linéaire nulle, le vecteur x de E est non nul.
De $(\star)$ et $(\star\star)$, nous déduisons que :

$$\boxed{H = \mathrm{Ker}(\varphi) = \mathrm{Ker}(\langle x , \cdot \rangle) = x^{\perp} .}$$

(b) *Non-unicité du vecteur x.* — Comme $x^{\perp} = (2x)^{\perp}$:

$$\boxed{\text{il n'y a pas d'unicité du vecteur non nul } x \text{ de } E \text{ tel que } H = x^{\perp} .}$$

Soit un entier $n \geqslant 2$ et H un hyperplan de $\mathbf{R}^n$.

Q38 Démontrer qu'il existe un vecteur $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbf{R}^n \setminus \{(0, \ldots, 0)\}$ tel que H soit l'ensemble solution de l'équation linéaire homogène :

$$a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n = 0 \qquad [\text{une équation de l'hyperplan } H]$$

d'inconnue $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$.

Nous munissons $\mathbf{R}^n$ de son produit scalaire usuel, que nous notons $\langle \cdot , \cdot \rangle$.
D'après **Q37**, il existe $a := (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbf{R}^n \setminus \{(0, \ldots, 0)\}$ tel que :

$$\boxed{H = \operatorname{Ker}(\langle a , \cdot \rangle) = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n \ : \ a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n = 0\} \ .}$$

Soit un entier $m \in \mathbf{N}$.

Q39 Démontrer que :

$$\exists ! (a_0, \ldots, a_m) \in \mathbf{R}^{m+1} \quad \forall P \in \mathbf{R}_m[X] \quad \int_0^1 P(t) \, \mathrm{d}t = \sum_{i=0}^m a_i P(i) \, .$$

(a) *Introduction d'un produit scalaire sur $\mathbf{R}_m[X]$.* — Considérons l'application :

$$\langle \cdot , \cdot \rangle \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_m[X] \times \mathbf{R}_m[X] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (P, Q) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=0}^m P(i) Q(i) \, . \end{array} \right.$$

On vérifie sans peine que l'application $\langle \cdot , \cdot \rangle$ est une forme linéaire à droite, linéaire à gauche, symétrique et positive. Nous nous concentrons uniquement sur le caractère défini de $\langle \cdot , \cdot \rangle$.
Soit $P \in \mathbf{R}_m[X]$ tel que :

$$\langle P , P \rangle = \sum_{i=0}^m \underbrace{P(i)^2}_{\geqslant 0} = 0 \, .$$

Comme une somme de nombres réels positifs est nulle si et seulement si tous ses termes sont nuls, nous en déduisons que :

$$P(0) = P(1) = \ldots = P(m) = 0 \, .$$

Le polynôme P, de degré inférieur ou égal à m, possède $(m+1) > \deg(P)$ racines. Nous en déduisons que $P = 0_{\mathbf{R}_m[X]}$.

$\boxed{\text{L'application } \langle \cdot , \cdot \rangle \text{ est un produit scalaire sur } \mathbf{R}_m[X].}$

(b) *Apport du théorème de Riesz, existence de $(a_0, a_1, \ldots, a_m)$.* — L'application :

$$\varphi \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_m[X] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ P & \longmapsto & \displaystyle\int_0^1 P(t) \, \mathrm{d}t \end{array} \right.$$

est une forme linéaire sur l'espace euclidien $(\mathbf{R}_m[X], \langle \cdot , \cdot \rangle)$.
D'après **Q36**, appliqué à l'espace euclidien $(\mathbf{R}_m[X], \langle \cdot , \cdot \rangle)$, pour la forme linéaire φ sur $\mathbf{R}_m[X]$:

$$\exists ! Q \in \mathbf{R}_m[X] \quad \varphi = \langle Q , \cdot \rangle$$

i.e. :

$$\exists ! Q \in \mathbf{R}_m[X] \quad \forall P \in \mathbf{R}_m[X] \quad \int_0^1 P(t) \, \mathrm{d}t = \sum_{i=0}^n P(i) Q(i) \, .$$

Ainsi, si on pose $a_0 = Q(0), a_1 = Q(1), \ldots, a_m = Q(m)$, nombres indépendants de P, il vient :

$$\boxed{\forall P \in \mathbf{R}_m[X] \quad \int_0^1 P(t) \, \mathrm{d}t = \sum_{i=0}^n a_i P(i) \, .}$$

Notons que $\boxed{(a_0, a_1, \ldots, a_m) \neq (0, 0, \ldots, 0)}$, sinon Q posséderait $(m+1) > \deg(Q)$ racines et serait donc nul, ce qui n'est pas.

(c) *Unicité de* $(a_0, a_1, \dots, a_m)$. — Soit $(b_0, b_1, \dots, b_m) \in \mathbf{R}^{m+1} \setminus \{(0, \dots, 0)\}$ tel que :

$$\forall\, P \in \mathbf{R}_m[X] \quad \int_0^1 P(t)\ \mathrm{d}t = \sum_{i=0}^{m} b_i\, P(i)\,.$$

Nous en déduisons que :

$$(\star) \quad \forall\, P \in \mathbf{R}_m[X] \quad \sum_{i=0}^{m} a_i\, P(i) = \sum_{i=0}^{m} b_i\, P(i)\,.$$

Invitons les polynômes interpolateurs de Lagrange aux $(m+1)$ points $0, 1, \dots, m$.
Soit $j \in [\![0, m]\!]$ et :

$$P_j := \prod_{i \in [\![0,n]\!] \setminus \{j\}} \frac{X-i}{j-i}$$

le polynôme de $\mathbf{R}_m[X]$ qui s'annule aux m points de $[\![0, n]\!] \setminus \{j\}$ et vaut 1 en j.
En spécialisant $(\star)$ à $P \leftarrow P_j$; il vient $a_j = b_j$.

Ceci étant vrai pour un élément j quelconque de $[\![0, n]\!]$, il vient $\boxed{(a_0, a_1, \dots, a_m) = (b_0, b_1, \dots, b_m) \quad .}$

La base de $\mathbf{R}_m[X]$ formée par les polynômes interpolateurs de Lagrange $(P_0, P_1, \dots, P_m)$ aux $(m+1)$ points $0, 1, \dots, m$ est orthonormée pour le produit scalaire $\langle \cdot\,,\, \cdot \rangle$ défini au début en (a).

12. Sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^n$ et systèmes linéaires homogènes

Soit un entier naturel non nul n.

Q40 Soient un entier naturel non nul p et une matrice $A = (a_{i,j})_{(i,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,n]\!]} \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbf{K})$. Démontrer que l'ensemble F solution du système linéaire homogène :

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccc} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \dots & + & a_{1,n}x_n & = & 0 \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \dots & + & a_{2,n}x_n & = & 0 \\ & & & & & & & \vdots & \\ a_{p,1}x_1 & + & a_{p,2}x_2 & + & \dots & + & a_{p,n}x_n & = & 0 \end{array} \right.$$

d'inconnue $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^n$.

Notons $\mathscr{B}_p$ la base canonique de $\mathbf{R}^p$ et $\mathscr{B}_n$ la base canonique de $\mathbf{R}^n$.
Soit f l'unique application linéaire de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^p$ telle que :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_n, \mathscr{B}_p}(f) = A$$

i.e. :

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^n & \longrightarrow & \mathbf{R}^p \\ (x_1, \dots, x_n) & \longmapsto & \left(a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,n}x_n \ , \ \dots \ , \ a_{p,1}x_1 + a_{p,2}x_2 + \dots + a_{p,n}x_n \right) \end{array} \right.$$

Alors :

$\boxed{F = \mathrm{Ker}(f) \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbf{R}^n\text{, comme noyau d'application linéaire} \quad .}$

Q41 Que dire de la dimension de F ?

D'après la formule du rang, appliquée à $f \in \mathscr{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^p)$:

$$\boxed{\dim(F) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) = \dim(\mathbf{R}^n) - \underbrace{\dim(\mathrm{Im}(f))}_{\leqslant p} \geqslant n - p\,.}$$

Nous venons de démontrer que l'ensemble solution d'un système linéaire homogène d'inconnue dans $\mathbf{R}^n$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^n$ (cf. **Q40**). Nous nous proposons de démontrer que, réciproquement, tout sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^n$ est l'ensemble solution d'un système linéaire homogène d'inconnue dans $\mathbf{R}^n$.

Q42 Rappeler la définition du produit scalaire usuel sur $\mathbf{R}^n$.

Le produit scalaire usuel sur $\mathbf{R}^n$ est défini par :

$$\boxed{\langle\cdot\,,\cdot\rangle \;\left|\; \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ ((x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n)) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^n x_i\,y_i\,. \end{array}\right.}$$

Q43 Soit φ une forme linéaire sur $\mathbf{R}^n$. Justifier que :

$$\exists\,!\,(a_1,\dots,a_n)\in\mathbf{R}^n \quad \forall\,(x_1,\dots,x_n)\in\mathbf{R}^n \quad \varphi(x_1,\dots,x_n)=a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n\,.$$

D'après **Q36**, appliqué à l'espace euclidien $(\mathbf{R}^n,\langle\cdot\,,\cdot\rangle)$, pour la forme linéaire φ sur $\mathbf{R}^n$:

$$\exists\,!\,(a_1,\dots,a_n)\in\mathbf{R}^n \quad \varphi=\langle(a_1,\dots,a_n)\,,\cdot\rangle\,.$$

i.e. :

$$\boxed{\exists\,!\,(a_1,\dots,a_n)\in\mathbf{R}^n \quad \forall\,(x_1,\dots,x_n)\in\mathbf{R}^n \quad \varphi(x_1,\dots,x_n)=\underbrace{\langle(a_1,\dots,a_n)\,,(x_1,\dots,x_n)\rangle}_{=a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n}\,.}$$

Q44 Soit G un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^n$ de dimension p. Démontrer qu'il existe une matrice $A=(a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n-p]\!]\times[\![1,n]\!]}\in\mathscr{M}_{n-p,n}(\mathbf{K})$ telle que G soit l'ensemble solution du système :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \ldots & + & a_{1,n}x_n & = & 0 \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \ldots & + & a_{2,n}x_n & = & 0 \\ & & & & & & & \vdots & \\ a_{n-p,1}x_1 & + & a_{n-p,2}x_2 & + & \ldots & + & a_{n-p,n}x_n & = & 0 \end{array}\right.$$

d'inconnue $(x_1,\dots,x_n)\in\mathbf{R}^n$.

(a) *Introduction d'une base $(g_1,\dots,g_p)$ de G.* — Soit $(g_1,\dots,g_p)$ une base de G.

(b) *Complétion de la base $(g_1,\dots,g_p)$ de G en une base $(g_1,\dots,g_n)$ de $\mathbf{R}^n$.* — D'après le théorème de la base incomplète, nous pouvons compléter la famille libre $(g_1,\dots,g_p)$ de vecteurs de $\mathbf{R}^n$, en une base $(g_1,\dots,g_p,g_{p+1},\dots,g_n)$ de $\mathbf{R}^n$.

(c) *La base duale $\left(g_1^*,\dots,g_n^*\right)$ de $(g_1,\dots,g_n)$.* — Fixons $i\in[\![1,n]\!]$ et introduisons :

$$\boxed{g_i^* \text{ l'unique forme linéaire sur } \mathbf{R}^n \text{ définie par, pour tout } j\in[\![1,n]\!],\ g_i^*(e_j)=\delta_{i,j}\,.}$$

- Si $x\in E$, alors :

$$x=\sum_{i=1}^n g_i^*(x)\,g_i$$

donc, pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, $g_i^*(x)$ est la i-ième coodonnée de x dans la base $(g_1,\dots,g_n)$ de $\mathbf{R}^n$.

- La famille $\left(g_1^*,\dots,g_n^*\right)$ est une base de $\mathscr{L}(\mathbf{R}^n,\mathbf{R})$, appelée base duale de la base $(g_1,\dots,g_n)$ de $\mathbf{R}^n$.

(d) *G peut s'écrire comme l'intersection de $(n-p)$ hyperplans.* — Par définition même des formes linéaires $g_1^*,\dots,g_n^*$, il vient :

$$\boxed{G = \left\{ x \in E \ : \ g_{p+1}^*(x) = g_{p+2}^*(x) = \ldots = g_n^*(x) = 0 \right\} = \bigcap_{i=p+1}^{n} \operatorname{Ker}\left(g_i^*\right) .}$$

(e) *G peut s'écrire comme ensemble solution d'un système linéaire homogène formé de $(n-p)$ équations.* — Les formes linéaires $g_{p+1}^*, \ldots, g_n^*$ étant non nulles, leurs noyaux $\operatorname{Ker}\left(g_{p+1}^*\right), \ldots, \operatorname{Ker}\left(g_n^*\right)$ sont des hyperplans de $\mathbf{R}^n$. D'après **Q38** :

- $\exists \left(a_{1,1}, \ldots, a_{1,n}\right) \in \mathbf{R}^n \quad \operatorname{Ker}\left(g_{p+1}^*\right) = \left\{a_{1,1}x_1 + \ldots + a_{1,n}x_n = 0\right\}$
- $\exists \left(a_{2,1}, \ldots, a_{2,n}\right) \in \mathbf{R}^n \quad \operatorname{Ker}\left(g_{p+2}^*\right) = \left\{a_{2,1}x_1 + \ldots + a_{2,n}x_n = 0\right\}$
- $\ldots$
- $\exists \left(a_{n-p,1}, \ldots, a_{n-p,n}\right) \in \mathbf{R}^n \quad \operatorname{Ker}\left(g_n^*\right) = \left\{a_{n-p,1}x_1 + \ldots + a_{n-p,n}x_n = 0\right\}$.

Nous pouvons alors reformuler le résultat obtenu en (d), pour obtenir :

$$\boxed{G = \left\{ (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n \ : \ \left\{ \begin{array}{ccccccccc} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \ldots & + & a_{1,n}x_n & = & 0 \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \ldots & + & a_{2,n}x_n & = & 0 \\ & & & & & & & \vdots & \\ a_{n-p,1}x_1 & + & a_{n-p,2}x_2 & + & \ldots & + & a_{n-p,n}x_n & = & 0 \end{array} \right. \right\} .}$$

13. Bijectivité et réduction d'un endomorphisme mettant en jeu un produit scalaire

Soient $(E, \langle \cdot , \cdot \rangle)$ un espace euclidien et a, b des vecteurs unitaires de E. On considère l'application :

$$f \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x - \langle a , x \rangle \, b \, . \end{array} \right.$$

Q45 Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que f soit bijective, puis exprimer f^{-1} dans ce cas.

(a) *Apport de la théorie de la dimension.* — Comme f est linéaire et E est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension finie, f est bijective si et seulement si f est injective. D'où f est bijective si et seulement si $\operatorname{Ker}(f) = \{0_E\}$.

(b) *Étude du noyau de f.* — Soit $x \in \operatorname{Ker}(f)$. Alors :

$$x = \langle a , x \rangle \, b \in \operatorname{Vect}(b) .$$

Ainsi $\operatorname{Ker}(f)$ est un sous-espace vectoriel de la droite vectorielle $\operatorname{Vect}(b)$. Nous en déduisons que :

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker}(f) = \{0_E\} & \iff b \notin \operatorname{Ker}(f) \\ & \iff \langle a , b \rangle \neq 1 . \end{aligned}$$

(c) *Condition nécessaire et suffisante pour que f soit bijective.* — D'après (a) et (b) :

$$\boxed{f \text{ est bijective si et seulement si } \langle a , b \rangle \neq 1.}$$

N.B. | Dans la suite de cette question, nous supposons que $\langle a , b \rangle \neq 1$.

(d) *Réduction du calcul de f^{-1}.* — Comme $\operatorname{Vect}(a)$ est de dimension finie :

$$E = \operatorname{Vect}(a) \overset{\perp}{\oplus} a^{\perp} .$$

Pour calculer f^{-1}, il suffit donc de déterminer sa restriction à $\operatorname{Vect}(a)$ et sa restriction à $a^{\perp}$. Comme f est linéaire :

$$\boxed{\text{il suffit de connaître } f(a) \text{ et } f(x) \text{, pour chaque } x \text{ de } a^{\perp} \text{, pour connaître complètement } f^{-1} .}$$

(e) *Restriction de f^{-1} à l'hyperplan $a^{\perp}$.* — Nous remarquons que, pour tout $x \in a^{\perp}$, $f(x) = x$. Par suite :

$$\boxed{\forall\, x \in a^{\perp} \quad f^{-1}(x) = x\,.}$$

(f) *Calcul de $f^{-1}(a)$.* — Commençons par analyser le problème. Par essence :

$$a = f\left(f^{-1}(a)\right) = f^{-1}(a) - \left\langle a\,, f^{-1}(a)\right\rangle b$$

d'où :

$$f^{-1}(a) = a + \left\langle a\,, f^{-1}(a)\right\rangle b \in a + \mathrm{Vect}\,(b) \qquad \text{[droite affine passant par } a \text{ et dirigée par } b]\,.$$

Considérons alors un point générique $a + t\,b$, où $t \in \mathbf{R}$, de la droite affine passant par a et dirigée par b.

$$\begin{aligned} f(a+t\,b) = a \quad &\iff \quad a + t\,b - \underbrace{\langle a+t\,b\,, a\rangle}_{1+t\,\langle a\,,\,b\rangle} b = a \\ &\iff \quad (t(1-\langle a\,, b\,\rangle) - 1)\,b = 0_E \end{aligned}$$

D'où $f\left(a + \dfrac{1}{1-\langle a\,, b\,\rangle}\,b\right) = a$ et :

$$\boxed{f^{-1}(a) = a + \frac{1}{1-\langle a\,, b\,\rangle}\,b\,.}$$

(g) *Explicitation de f^{-1}.* — D'après (d), (e) et (f) :

$$\boxed{f^{-1}\left|\begin{array}{ccc} E = \mathrm{Vect}\,(a) \overset{\perp}{\oplus} a^{\perp} & \longrightarrow & E \\ x = \underbrace{k}_{\in\mathbf{R}}\, a + \underbrace{u}_{\in a^{\perp}} & \longmapsto & k\left(a + \dfrac{1}{1-\langle a\,, b\,\rangle}\,b\right) + u\,. \end{array}\right.}$$

Q46 Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que f soit diagonalisable.

(a) *Introduction d'une base orthonormée adaptée à $E = \mathrm{Vect}\,(a) \overset{\perp}{\oplus} a^{\perp}$.* — Soit $(u_1, \ldots, u_{n-1})$ une base orthonormée de $a^{\perp}$. Comme a est un vecteur unitaire et $E = \mathrm{Vect}\,(a) \overset{\perp}{\oplus} a^{\perp}$, la famille :

$$\mathscr{B} = (u_1, \ldots, u_{n-1}, a)$$

est une base orthonormée de E.

(b) *Matrice de f dans la base $\mathscr{B}$.* — Comme, pour tout $x \in a^{\perp}$, $f(x) = x$ et $\mathscr{B}$ est une base orthonormée de E (cf. **Q5**), il vient :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & \langle f(a), u_1\rangle \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & \langle f(a), u_{n-1}\rangle \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & \langle f(a), a\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & \langle f(a), u_1\rangle \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & \langle f(a), u_{n-1}\rangle \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & 1-\langle a\,, b\,\rangle \end{pmatrix}$$

(c) *Cas où $\langle a\,, b\,\rangle = 0$.* — Supposons $\langle a\,, b\,\rangle = 0$, i.e. $b \in a^{\perp}$. Alors $\mathrm{Spec}\,f = \{1\}$ et :

$$\begin{aligned} f \text{ est diagonalisable} \quad &\iff \quad f = \mathrm{id}_E \\ &\iff \quad \langle f(a), u_1\rangle = \ldots = \langle f(a), u_{n-1}\rangle = 0 \\ &\iff \quad \langle b\,, u_1\rangle = \ldots = \langle b\,, u_{n-1}\rangle = 0 \qquad [\text{car } f(a) = a - b] \\ &\iff \quad b \in \left(a^{\perp}\right)^{\perp} = \mathrm{Vect}\,(a)\,. \end{aligned}$$

Ainsi, si f était diagonalisable, b appartiendrait à la fois à $a^{\perp}$ et à $\mathrm{Vect}\,(a)$. Il serait donc nul, ce qui n'est pas. L'endomorphisme f n'est donc pas diagonalisable.

(d) *Cas où* $\langle a\,,\,b\rangle \neq 0$. — Supposons $\langle a\,,\,b\rangle \neq 0$. Alors $\mathrm{Spec}(f)$ possède deux éléments distincts : 1 et $1-\langle a\,,\,b\rangle$. Comme $a^\perp \subset E_1(f)$, il vient :

$$\dim\left(E_1(f)\oplus E_{1-\langle a\,,\,b\rangle}(f)\right) = \underbrace{\dim\left(E_1(f)\right)}_{\geqslant n-1} + \underbrace{\dim\left(E_{1-\langle a\,,\,b\rangle}(f)\right)}_{\geqslant 1} \geqslant n\ .$$

Comme $E_1(f)\oplus E_{1-\langle a\,,\,b\rangle}(f)$ est un sous-espace vectoriel de E, qui est de dimension n, il vient :

$$E_1(f)\oplus E_{1-\langle a\,,\,b\rangle}(f) = E\ .$$

L'endomorphisme f est donc diagonalisable.

(e) *Conclusion.* — D'après (c) et (d) :

$$\boxed{\text{l'endomorphisme } f \text{ est diagonalisable si et seulement si } \langle a\,,\,b\rangle \neq 0.}$$

14. Inégalité de Bessel et familles totales

Soient $(E,\langle\cdot\,,\,\cdot\rangle)$ un espace préhilbertien, $||\cdot||$ la norme sur E associée au produit scalaire $\langle\cdot\,,\,\cdot\rangle$, $(e_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite orthonormale de vecteurs de E et $x\in E$.

Q47 Démontrer que :

$$\forall\, n\in\mathbf{N}\quad \sum_{k=0}^{n}\langle e_k\,,\,x\rangle^2 \leqslant ||\,x\,||^2 \qquad [\text{inégalité de Bessel}]\ .$$

Soit $n\in\mathbf{N}$.
Comme $F_n := \mathrm{Vect}(e_0,e_1,\ldots,e_n)$ est un sous-espace vectoriel de dimension finie de E, nous pouvons considérer la projection orthogonale p_{F_n} de E sur F_n.
D'après notre cours :

$$\left|\left|\,p_{F_n}(x)\,\right|\right|^2 + \underbrace{\mathrm{d}(x,F_n)^2}_{\geqslant 0} = ||\,x\,||^2$$

où $\mathrm{d}(x,F_n)$ est la distance du vecteur x au sous-espace vectoriel F_n.
Nous en déduisons que :

$$(\star)\qquad \left|\left|\,p_{F_n}(x)\,\right|\right|^2 \leqslant ||\,x\,||^2\ .$$

Comme la famille $(e_0,e_1,\ldots,e_n)$ est une base orthonormée de $F_n := \mathrm{Vect}(e_0,e_1,\ldots,e_n)$, nous savons que :

$$p_{F_n}(x) = \sum_{k=0}^{n}\langle x\,,\,e_k\rangle\; e_k\ .$$

D'après **Q7**, il vient :

$$(\star\star)\qquad \left|\left|\,p_{F_n}(x)\,\right|\right|^2 = \left\langle p_{F_n}(x)\,,\,p_{F_n}(x)\right\rangle = \sum_{k=0}^{n}\langle x\,,\,e_k\rangle^2\ .$$

D'après $(\star)$ et $(\star\star)$:

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n}\langle e_k\,,\,x\rangle^2 \leqslant ||\,x\,||^2\ .}$$

Q48 Justifier que la série numérique $\sum_{n\geqslant 0}\langle x\,,\,e_n\rangle^2$ est convergente.

La série numérique $\sum_{n\geqslant 0}\langle x\,,\,e_n\rangle^2$ est à termes réels positifs et la suite de ses sommes partielles est majorée (par

$||x||^2$, cf. **Q47**).

D'après le cours sur les séries numériques à termes réels positifs, $\boxed{\text{la série } \sum_{n\geqslant 0} \langle x, e_n \rangle^2 \text{ converge.}}$

On suppose de plus que la famille $(e_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est totale, i.e. que $\mathrm{Vect}\big((e_n)_{n\in\mathbf{N}}\big)$ est une partie dense de E.

Q49 Démontrer que la série vectorielle $\sum_{n\geqslant 0} \langle x, e_n \rangle\, e_n$ converge dans E et que :

$$x = \sum_{n=0}^{+\infty} \langle x, e_n \rangle \cdot e_n \, .$$

Rappelons, si A est une partie non vide de E, alors la distance de x à A est définie par :

$$\mathrm{d}(x, A) := \inf\{||x - a|| \;:\; a \in A\} \, .$$

(a) *Reformulation du problème.* — Il s'agit de démontrer que :

$$\sum_{k=0}^{n} \langle x, e_k \rangle \cdot e_k \xrightarrow[n\to+\infty]{||\cdot||} x \, .$$

Comme $(e_0, e_1, \ldots, e_n)$ est une base orthonormée de $F_n := \mathrm{Vect}(e_0, e_1, \ldots, e_n)$, nous savons que :

$$\sum_{k=0}^{n} \langle x, e_k \rangle \cdot e_k = p_{F_n}(x) \, .$$

Nous sommes donc conduits à démontrer que :

$$p_{F_n}(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{||\cdot||} x \, .$$

(b) *Décroissance de la suite de terme général* $\mathrm{d}(x, F_n)$. — Soit $n \in \mathbf{N}$. Comme $F_n \subset F_{n+1}$:

$$\forall\, y \in F_n \quad ||x - y|| \geqslant \underbrace{\mathrm{d}(x, F_{n+1})}_{\text{indépendant de } y} \, .$$

Par passage à la borne inférieure, il vient :

$$\boxed{\mathrm{d}(x, F_n) \geqslant \mathrm{d}(x, F_{n+1}) \, .}$$

(c) *Apport de la densité de* $\mathrm{Vect}\big((e_n)_{n\in\mathbf{N}}\big)$ *dans* E. — Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\mathrm{Vect}\big((e_n)_{n\in\mathbf{N}}\big)$ est dense dans E, il existe un vecteur $y_\varepsilon \in \mathrm{Vect}\big((e_n)_{n\in\mathbf{N}}\big)$ tel que :

$$||y_\varepsilon - x|| \leqslant \varepsilon \, .$$

Comme $y_\varepsilon \in \mathrm{Vect}\big((e_n)_{n\in\mathbf{N}}\big)$, y_ε est combinaison linéaire d'un nombre fini des vecteurs $e_0, e_1, \ldots, e_n, \ldots$. Il existe donc n_ε tel que :

$$y_\varepsilon \in F_{n_\varepsilon} \, .$$

Nous en déduisons que :

$$\mathrm{d}\big(x, F_{n_\varepsilon}\big) \leqslant ||y_\varepsilon - x|| \leqslant \varepsilon \, .$$

Nous avons démontré que :

$$\boxed{\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, n_\varepsilon \in \mathbf{N} \quad \mathrm{d}\big(x, F_{n_\varepsilon}\big) \leqslant \varepsilon \, .}$$

(d) *Conclusion.* — Soit $\varepsilon > 0$. D'après (c), il existe $n_\varepsilon \in \mathbf{N}$ tel que :

$$\mathrm{d}\big(x, F_{n_\varepsilon}\big) \leqslant \varepsilon \, .$$

Soit $n \geqslant n_\varepsilon$. D'après (b) :

$$\mathrm{d}(x, F_n) \leqslant \mathrm{d}\left(x, F_{n_\varepsilon}\right) \leqslant \varepsilon \,.$$

Nous avons démontré que :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon \in \mathbf{N} \quad \forall n \geqslant n_\varepsilon \quad \left|\left| x - p_{F_n}(x) \right|\right| = \mathrm{d}(x, F_n) \leqslant \varepsilon$$

i.e. $\boxed{p_{F_n}(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{||\cdot||} x}$ ce qu'il fallait démontrer (cf. (a)).

Q50 En déduire que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \langle x \,,\, e_n \rangle^2 = ||\, x \,||^2$.

D'après **Q49** :

$$\sum_{k=0}^{n} \langle x \,,\, e_k \rangle \; e_k \xrightarrow[n \to +\infty]{||\cdot||} x \,.$$

Comme la norme est continue (car 1-lipschitzienne d'après la seconde inégalité triangulaire), il vient :

$$\left|\left| \sum_{k=0}^{n} \langle x \,,\, e_k \rangle \; e_k \right|\right| \xrightarrow[n \to +\infty]{|\cdot|} ||\, x \,||$$

puis, par continuité de la fonction carrée, de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$:

$$(\star) \qquad \left|\left| \sum_{k=0}^{n} \langle x \,,\, e_k \rangle \; e_k \right|\right|^2 \xrightarrow[n \to +\infty]{|\cdot|} ||\, x \,||^2 \,.$$

Soit $n \in \mathbf{N}$. Comme la famille $(e_0, e_1, \ldots, e_n)$ est orthonormée, nous pouvons appliquer **Q7** pour obtenir :

$$(\star\star) \qquad \left|\left| \sum_{k=0}^{n} \langle x \,,\, e_k \rangle \; e_k \right|\right|^2 = \left\langle \sum_{k=0}^{n} \langle x \,,\, e_k \rangle \; e_k \,,\, \sum_{k=0}^{n} \langle x \,,\, e_k \rangle \; e_k \right\rangle = \sum_{k=0}^{n} \langle x \,,\, e_k \rangle^2 \,.$$

De $(\star)$ et $(\star\star)$, nous déduisons :

$$\sum_{k=0}^{n} \langle x \,,\, e_k \rangle^2 \xrightarrow[n \to +\infty]{|\cdot|} ||\, x \,||^2$$

que nous reformulons en :

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \langle x \,,\, e_n \rangle^2 = ||\, x \,||^2.}$$

Q51 Donner une famille orthonormale totale de l'espace $\mathscr{C}^0([0,1], \mathbf{R})$ muni de son produit scalaire usuel.

(a) *Rappel sur le produit scalaire usuel sur $E := \mathscr{C}^0([0,1], \mathbf{R})$.* — Le produit scalaire usuel sur E est définie par :

$$\langle \cdot \,,\, \cdot \rangle \left| \begin{array}{ccc} E \times E & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (f, g) & \longmapsto & \displaystyle\int_0^1 f(t) g(t) \; \mathrm{d}t \end{array} \right.$$

et sa norme associée, notée $||\cdot||_2$, est définie par :

$$||\cdot||_2 \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbf{R}_+ \\ f & \longmapsto & \sqrt{\displaystyle\int_0^1 f(t)^2 \; \mathrm{d}t} \,. \end{array} \right.$$

(b) *Apport du théorème de Weierstraß.* — Pour tout $n \in \mathbf{N}$, soit f_n la fonction de E définie par :

$$f_n \left| \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & t^n . \end{array} \right.$$

D'après le théorème de Weierstraß, $\mathrm{Vect}\left((f_n)_{n\in\mathbf{N}}\right)$ est dense dans E, pour la norme $||\cdot||_\infty$ de la convergence uniforme.

(c) $\mathrm{Vect}\left((f_n)_{n\in\mathbf{N}}\right)$ *est dense dans* E*, pour la norme* $||\cdot||_2$ *.* — Soit $g \in E$. D'après (b), il existe une suite $(g_k)_{k\in\mathbf{N}}$ de fonctions de E telle que :

$$g_k \xrightarrow[k\to+\infty]{||\cdot||_\infty} g .$$

Soit $k \in \mathbf{N}$.

$$0 \leqslant ||\, g_k - g\,||_2^2 = \int_0^1 (g_k(t) - g(t))^2 \;\mathrm{d}t \leqslant ||\, g_k - g\,||_\infty^2 \ .$$

Par croissance de la fonction racine carrée sur $\mathbf{R}_+$:

$$0 \leqslant ||\, g_k - g\,||_2 \leqslant ||\, g_k - g\,||_\infty \xrightarrow[k\to+\infty]{|\cdot|_\infty} 0 .$$

Par théorème d'encadrement, il vient :

$$g_k \xrightarrow[k\to+\infty]{||\cdot||_2} g .$$

Nous en déduisons que :

$$\boxed{\text{l'espace } \mathrm{Vect}\left((f_n)_{n\in\mathbf{N}}\right) \text{ est dense dans } E\text{, pour la norme } ||\cdot||_2 \ .}$$

(d) *Apport de l'algorithme de Gram-Schmidt.* — Soit $(g_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite de fonctions obtenue en appliquant l'algorithme de Gram-Schmidt (étendu au cas d'une famille libre dénombrable) à la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de l'espace préhilbertien réel $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$.
Par construction même :

$$\boxed{\text{la famille } (g_n)_{n\in\mathbf{N}} \text{ est orthonormée dans l'espace préhilbertien } (E, \langle\cdot,\cdot\rangle).}$$

Soit $n \in \mathbf{N}$. La famille $(g_0, g_1, \ldots, g_n)$ est la base orthonormée de $\mathrm{Vect}(f_0, f_1, \ldots, f_n)$ obtenue en appliquant l'algorithme de Gram-Schmidt (usuel) à la base $(f_0, f_1, \ldots, f_n)$ de $\mathrm{Vect}(f_0, f_1, \ldots, f_n)$, équipé du produit scalaire induit par $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Ainsi :

$$\mathrm{Vect}(g_0, g_1, \ldots, g_n) = \mathrm{Vect}(f_0, f_1, \ldots, f_n) \ .$$

Nous en déduisons que :

$$\boxed{\mathrm{Vect}\left((f_n)_{n\in\mathbf{N}}\right) = \bigcup_{n\in\mathbf{N}} \mathrm{Vect}(f_0, f_1, \ldots, f_n) = \bigcup_{n\in\mathbf{N}} \mathrm{Vect}(g_0, g_1, \ldots, g_n) = \mathrm{Vect}\left((g_n)_{n\in\mathbf{N}}\right) \ .}$$

(e) *Conclusion.* — D'après (c) et (d) :

$$\boxed{\text{la famille } (g_n)_{n\in\mathbf{N}} \text{ est une suite orthonormale totale de l'espace préhilbertien } (E, \langle\cdot,\cdot\rangle).}$$