Critère $\mathscr{C}^1$ pour les fonctions de plusieurs variables

1. Classe $\mathscr{C}^1$ sur Ω 1
2. Critère $\mathscr{C}^1$ 1
3. Matrice Jacobienne 1

Soient n, p des entiers naturels non nuls, Ω un ouvert de $\mathbf{R}^n$ et :

$$f \left| \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \mathbf{R}^p \\ (x_1,\dots,x_n) & \longmapsto & (f_1(x_1,\dots,x_n),\dots,f_p(x_1,\dots,x_n)) \end{array} \right.$$

où $f_1,\dots,f_p \in \mathbf{R}^\Omega$ sont les fonctions coordonnées de la fonction f.

1. Classe $\mathscr{C}^1$ sur Ω

On rappelle la définition de l'assertion « la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur Ω ».

Définition 1. — *L'application f est dite de classe $\mathscr{C}^1$ sur Ω si les deux conditions suivantes sont vérifiées :*

(a) *la fonction f est différentiable sur Ω ;*

(b) *la différentielle de f :*

$$\mathrm{d}f \left| \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \mathscr{L}(\mathbf{R}^n,\mathbf{R}^p) \\ a & \longmapsto & \mathrm{d}f(a) \end{array} \right.$$

est continue.

2. Critère $\mathscr{C}^1$

Le théorème suivant, que nous appellerons « Critère $\mathscr{C}^1$ », fournit un puissant outil pour démontrer que la fonction f est différentiable (en démontrant une propriété plus forte).

Théorème 2. — *La fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur Ω si et seulement si toutes ses dérivées partielles existent et sont continues sur Ω, i.e. :*

$$f \text{ est de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur } \Omega \quad \Longleftrightarrow \quad \forall (i,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,n]\!] \quad \text{la fonction } \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \text{ est définie et continue sur } \Omega\,.$$

3. Matrice Jacobienne

Notons $\mathscr{B}_n$ la base canonique de $\mathbf{R}^n$ et $\mathscr{B}_p$ la base canonique de $\mathbf{R}^p$.

Dans le cas où la fonction f est différentiable en un point $a \in \Omega$, la proposition suivante nous livre une expression de $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_n,\mathscr{B}_p}(\mathrm{d}f(a))$ à l'aide des dérivées partielles de f.

Proposition 3. — *Si la fonction f est différentiable en un point a de Ω, alors :*

$$\underbrace{\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_n,\mathscr{B}_p}(\mathrm{d}f(a))}_{\text{matrice Jacobienne de } f \text{ en } a} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbf{R})\,.$$