

Suites et séries de fonctions 1

- 1. Convergence simple d'une suite de fonctions 1
- 2. Convergence uniforme d'une suite de fonctions 3
- 3. Expression de la convergence uniforme au moyen de la norme $\| \cdot \|_\infty$ 4
- 4. Un critère séquentiel de non-convergence uniforme 6
- 5. Passage du local pour la convergence simple, mais pas pour la convergence uniforme 6
- 6. Synthèse sur la convergence d'une suite de fonctions définies sur une partie de \mathbf{R} 7
- 7. La convergence simple n'est pas associée à une norme (HP) 8
 - 7.1. Topologie sur un ensemble 8
 - 7.2. Topologie engendrée par une famille de parties d'un ensemble 8
 - 7.3. Convergence d'une suite pour une topologie 9
 - 7.4. Convergence d'une suite pour une topologie engendrée par une famille de parties d'un ensemble 10
 - 7.5. Partie dense pour une topologie 10
 - 7.6. Partie séquentiellement dense pour une topologie 11
 - 7.7. La séquentielle densité implique la densité 11
 - 7.8. Séquentielle densité versus densité dans un \mathbf{K} -espace vectoriel normé 11
 - 7.9. Critère pour qu'une topologie ne provienne pas d'une norme 11
 - 7.10. Topologie de la convergence simple 12
 - 7.11. La topologie de la convergence simple ne provient pas d'une norme 13
- 8. Convergence simple d'une série de fonctions 14
- 9. Convergence uniforme d'une série de fonctions 15
- 10. CU d'une série de fonctions versus CU de la suite des restes vers la fonction nulle 15
- 11. Convergence normale d'une série de fonctions bornées 16
- 12. Synthèse sur la convergence d'une séries de fonctions bornées sur une partie de \mathbf{R} 19
- 13. Approximation uniforme d'une fonction continue sur un segment 20
 - 13.1. Approximation uniforme par des fonctions en escalier 20
 - 13.2. Théorème d'approximation polynomiale de Weierstrass 21

Notation. — Dans tout le document, la lettre \mathbf{K} désigne le corps \mathbf{R} ou \mathbf{C} et X est un ensemble non vide.

1. Convergence simple d'une suite de fonctions

Définition 1. — Soient une suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbf{N}} \in \mathcal{F}(X, \mathbf{K})^{\mathbf{N}}$ et une fonction $f \in \mathcal{F}(X, \mathbf{K})$. On dit que la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge simplement vers la fonction f sur X , ce que l'on note $f_n \xrightarrow[X]{CS} f$, si :

$$\forall x \in X \quad f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(x) \quad \left[\text{convergence de la suite numérique } (f_n(x))_{n \in \mathbf{N}} \text{ vers } f(x) \right]$$

i.e. si :

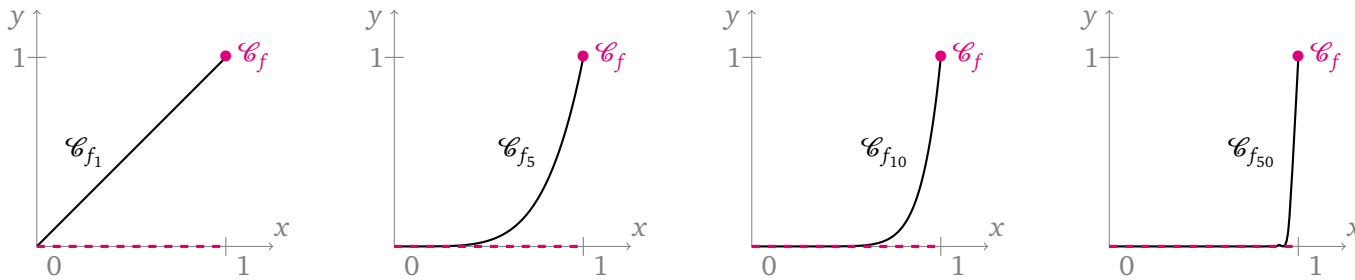
$$\forall x \in X \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_{x, \varepsilon} \in \mathbf{N} \quad \forall n \geq N_{x, \varepsilon} \quad |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon .$$

Exemple 2. — Pour tout $n \in \mathbf{N}$, soit f_n la fonction définie par :

$$f_n \left| \begin{array}{l} [0, 1] \longrightarrow \mathbf{R} \\ x \longmapsto x^n . \end{array} \right.$$

Alors la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge simplement vers la fonction f sur $[0, 1]$, où f est la fonction définie par :

$$f \left| \begin{array}{l} [0, 1] \longrightarrow \mathbf{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 . \end{cases} \end{array} \right.$$



Dans l'exemple 2 :

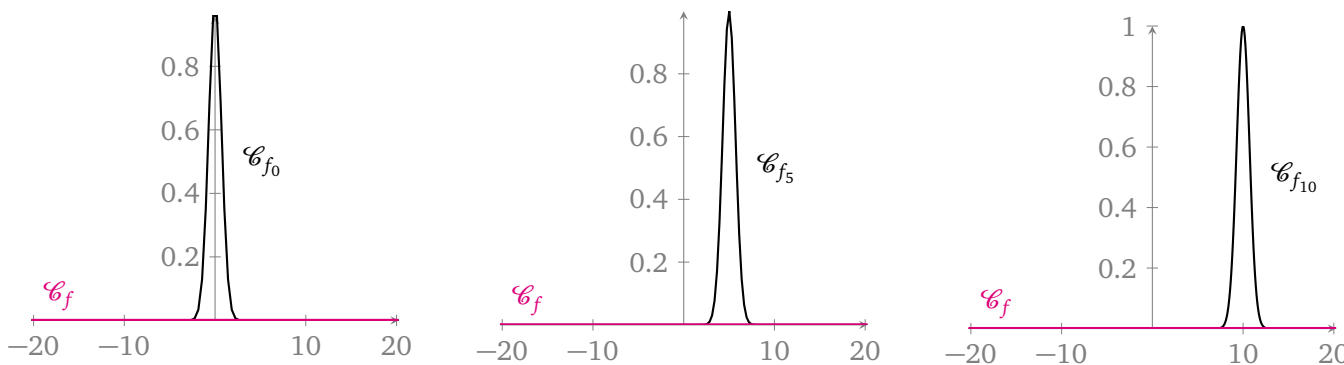
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{x \rightarrow 1} f_n(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x).$$

La seule convergence simple ne permet donc pas d'échanger les symboles $\lim_{n \rightarrow +\infty}$ et $\lim_{x \rightarrow 1}$, en supposant que les différentes limites existent.

Exercice 3. — Pour tout $n \in \mathbf{N}$, soit f_n la fonction définie par :

$$f_n \mid \begin{array}{l} \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} \\ x \longmapsto e^{-(x-n)^2} . \end{array}$$

Démontrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge simplement vers la fonction nulle sur \mathbf{R} .



Exercice 4. — Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, soit f_n la fonction définie sur $[0, 1]$ par :

- $f_n(0) = f_n\left(\frac{1}{n}\right) = f_n(1) = 0$;
- $f_n\left(\frac{1}{2n}\right) = n$;
- f_n est affine sur chacun des segments $\left[0, \frac{1}{2n}\right]$, $\left[\frac{1}{2n}, \frac{1}{n}\right]$, $\left[\frac{1}{n}, 1\right]$.

1. Représenter graphiquement les fonctions f_1, f_2, f_3, f_4 .
2. Démontrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge simplement vers la fonction nulle sur $[0, 1]$.
3. Étudier le comportement asymptotique de la suite de terme général $\int_0^1 f_n(t) dt$.

Dans l'exercice 4 :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(t) dt \neq \int_0^1 \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t) dt .$$

La seule convergence simple ne permet donc pas d'échanger les symboles $\lim_{n \rightarrow +\infty}$ et \int_0^1 , en supposant que les différentes intégrales et limites existent.

2. Convergence uniforme d'une suite de fonctions

Définition 5. — Soient une suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbf{N}} \in \mathcal{F}(X, \mathbf{K})^{\mathbf{N}}$ et une fonction $f \in \mathcal{F}(X, \mathbf{K})$. On dit que la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge uniformément vers la fonction f sur X , ce que l'on note $f_n \xrightarrow[X]{\text{CU}} f$, si :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon \in \mathbf{N} \quad \forall n \geq N_\varepsilon \quad \forall x \in X \quad |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon .$$

Remarque 6. — Soient une suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbf{N}} \in \mathcal{F}(X, \mathbf{K})^{\mathbf{N}}$ et une fonction $f \in \mathcal{F}(X, \mathbf{K})$. Alors :

$$f_n \xrightarrow[X]{\text{CS}} f \iff \forall x \in X \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_{x,\varepsilon} \in \mathbf{N} \quad \forall n \geq N_{x,\varepsilon} \quad |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

$$f_n \xrightarrow[X]{\text{CU}} f \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon \in \mathbf{N} \quad \forall n \geq N_\varepsilon \quad \forall x \in X \quad |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon .$$

Dans la définition de la convergence uniforme, le rang N_ε peut être choisi le même pour tous les éléments x de X , d'où la terminologie « uniforme ».

Proposition 7. — Soient une suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbf{N}} \in \mathcal{F}(X, \mathbf{K})^{\mathbf{N}}$ et une fonction $f \in \mathcal{F}(X, \mathbf{K})$. Alors :

$$f_n \xrightarrow[X]{\text{CU}} f \implies f_n \xrightarrow[X]{\text{CS}} f .$$

La convergence simple n'implique pas la convergence uniforme. Par exemple :

$$f_n \left| \begin{array}{l} [0, 1] \longrightarrow \mathbf{R} \\ x \longmapsto x^n \end{array} \right. \xrightarrow[0,1]{\text{CS}} f \left| \begin{array}{l} [0, 1] \longrightarrow \mathbf{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 . \end{cases} \end{array} \right.$$

Cependant, la suite $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ ne converge pas uniformément vers la fonction f sur $[0, 1]$, sinon :

$$\exists N \in \mathbf{N} \quad \forall n \geq N \quad \forall x \in [0, 1] \quad |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{10}$$



ce qui implique :

$$\forall n \geq N \quad \left| f_n \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) - f \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) \right| \leq \frac{1}{10}$$

i.e. :

$$\forall n \geq N \quad \left(1 - \frac{1}{n+1} \right)^n \leq \frac{1}{10} .$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, il vient alors $\frac{1}{e} \leq \frac{1}{10}$. Contradiction.

Remarque 8. — Soit $(f_n)_{n \in \mathbf{N}} \in \mathcal{F}(X, \mathbf{K})^{\mathbf{N}}$ une suite de fonctions qui converge uniformément vers une fonction $f \in \mathcal{F}(X, \mathbf{K})$. Alors :

$$\exists N_1 \in \mathbf{N} \quad \forall n \geq N_1 \quad \underbrace{\forall x \in X \quad |f_n(x) - f(x)| \leq 1}_{\text{donc la fonction } f_n - f \text{ est bornée sur } X} .$$

Nous en déduisons que les fonctions $f_n - f$ sont bornées sur X à partir d'un certain rang.

3. Expression de la convergence uniforme au moyen de la norme $\| \cdot \|_\infty$

Rappel 9. — L'ensemble :

$$\mathcal{B}(X, \mathbf{K}) := \{f \in \mathcal{F}(X, \mathbf{K}) : f \text{ est bornée sur } X\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(X, \mathbf{K})$ et l'application :

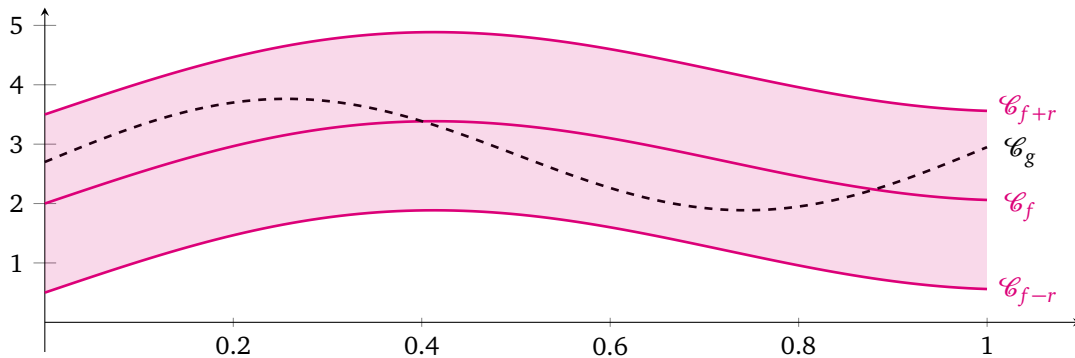
$$\| \cdot \|_{\infty, X} \left\{ \begin{array}{ll} \mathcal{B}(X, \mathbf{K}) & \longrightarrow \mathbf{R}_+ \\ f & \longmapsto \|f\|_{\infty, X} := \sup \{|f(x)| : x \in X\} \end{array} \right.$$

est une norme sur $\mathcal{B}(X, \mathbf{K})$.

Exemple 10. — $X = [0, 1]$, $f \in \mathcal{B}([0, 1], \mathbf{R})$ et $r > 0$, alors, pour tout $g \in \mathcal{B}([0, 1], \mathbf{R})$:

$$\begin{aligned} g \in \overline{B(f, r)} &\iff \|f - g\|_{\infty, [0, 1]} \leq r \\ &\iff \forall x \in [0, 1] \quad |f(x) - g(x)| \leq r \\ &\iff \forall x \in [0, 1] \quad f(x) - r \leq g(x) \leq f(x) + r \\ &\iff f - r \leq g \leq f + r. \end{aligned}$$

Les fonctions g dans la boule fermée $\overline{B(f, r)}$ sont donc celles qui ont leur courbe représentative dans le « tube » délimité par les courbes représentatives des fonctions $f - r$ et $f + r$ esquissé ci-dessous.



Proposition 11. — Soient une suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbf{N}} \in \mathcal{F}(X, \mathbf{K})^{\mathbf{N}}$ et une fonction $f \in \mathcal{F}(X, \mathbf{K})$. Alors $f_n \xrightarrow[X]{\text{CU}} f$ si et seulement si :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{à partir d'un certain rang, les fonctions } f_n - f \text{ sont bornées sur } X \\ \text{et} \\ \|f_n - f\|_{\infty, X} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0_{\mathbf{K}}. \end{array} \right.$$

Soient une suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbf{N}} \in \mathcal{F}(X, \mathbf{K})^{\mathbf{N}}$ et une fonction $f \in \mathcal{F}(X, \mathbf{K})$.

Pour démontrer que $f_n \xrightarrow[X]{\text{CU}} f$, on peut déterminer une suite à termes réels positifs $(a_n)_{n \geq N}$ définie à partir d'un certain rang N telle que :

(a) $\forall n \geq N \quad \forall x \in X \quad |f_n(x) - f(x)| \leq a_n \quad [\text{le nombre } a_n \text{ est indépendant de } x \in X] ;$

(b) $a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$



Si on y parvient, (a) nous apprend que les fonctions $f_n - f$ seront bornées sur X à partir du rang N et, par passage à la borne supérieure sur $x \in X$, nous obtenons :

$$\forall n \geq N \quad \|f_n - f\|_{\infty, X} \leq a_n.$$

Le théorème d'encadrement et (b) livrent alors $\|f_n - f\|_{\infty, X} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$

Exercice 12. — Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, soit f_n la fonction définie par :

$$f_n \left| \begin{array}{l} \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} \\ x \longmapsto \frac{1}{n} \cos(x) . \end{array} \right.$$

Démontrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ converge uniformément vers la fonction nulle sur \mathbf{R} .

Exercice 13. — Pour tout $n \in \mathbf{N}$, soit f_n la fonction définie par :

$$f_n \left| \begin{array}{l} \left[0, \frac{1}{2}\right] \longrightarrow \mathbf{R} \\ x \longmapsto x^n . \end{array} \right.$$

Démontrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge uniformément vers la fonction nulle sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$.

Exercice 14. — Pour tout $n \in \mathbf{N}$, soit f_n la fonction définie par :

$$f_n \left| \begin{array}{l} [0, 1] \longrightarrow \mathbf{R} \\ x \longmapsto \frac{n e^{-x} + x^2}{n + x} . \end{array} \right.$$

Démontrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge uniformément sur $[0, 1]$.

Exercice 15. — Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, soit f_n la fonction définie par :

$$f_n \left| \begin{array}{l} \mathbf{R}_+ \longrightarrow \mathbf{R} \\ x \longmapsto \sqrt{n} x e^{-nx} . \end{array} \right.$$

Démontrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ converge uniformément sur \mathbf{R}_+ .

Exercice 16. — Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, soit f_n la fonction définie par :

$$f_n \left| \begin{array}{l} \mathbf{R}_+ \longrightarrow \mathbf{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n & \text{si } 0 \leq x \leq n \\ 0 & \text{si } x > n . \end{cases} \end{array} \right.$$

Démontrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ converge uniformément sur \mathbf{R}_+ .

Nous avons vu que la convergence simple ne permettait pas (seule) de préserver la continuité ou « d'échanger limite et intégrale sur un segment ». La convergence uniforme corrige ces deux défauts. Nous démontrerons plus tard que, si a et b des réels tels que $a < b$, si $(f_n)_{n \in \mathbf{N}} \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbf{K})^{\mathbf{N}}$ et $f \in \mathcal{F}([a, b], \mathbf{K})$ sont tels que :

$$f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{CU}} f$$

alors :

1. la fonction f est continue sur le segment $[a, b]$;

2. $\int_a^b f_n(t) dt \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \int_a^b f(t) dt$.



4. Un critère séquentiel de non-convergence uniforme

Proposition 17. — Soient une suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbf{N}} \in \mathcal{F}(X, \mathbf{K})^{\mathbf{N}}$ et une fonction $f \in \mathcal{F}(X, \mathbf{K})$. Si :

il existe $(x_n)_{n \in \mathbf{N}} \in X^{\mathbf{N}}$ telle que $(f_n(x_n) - f(x_n))_{n \in \mathbf{N}}$ ne converge pas vers $0_{\mathbf{K}}$

alors la suite $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ ne converge pas uniformément vers la fonction f sur X .

Démonstration. Nous raisonnons par contraposée.

Supposons donc que la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge uniformément sur X et considérons une suite $(x_n)_{n \in \mathbf{N}} \in X^{\mathbf{N}}$. Nous allons établir que :

$$f_n(x_n) - f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0_{\mathbf{K}}.$$

Par hypothèse, il existe un rang N tel que :

- (a) pour tout $n \geq N$, la fonction $f_n - f$ est bornée sur X ;
- (b) $\|f_n - f\|_{\infty, X} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Comme, pour tout $n \geq N$, $x_n \in X$, nous déduisons de (a) que :

$$\forall n \geq N \quad 0 \leq |f_n(x_n) - f(x_n)| \leq \|f_n - f\|_{\infty, X}.$$

Le théorème d'encadrement et (b) livrent alors $f_n(x_n) - f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0_{\mathbf{K}}$. □

Exemple 18. — Dans l'exercice 3, nous avons établi que la suite de fonctions :

$$\left(f_n \left| \begin{array}{l} \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} \\ x \longmapsto e^{-(x-n)^2} \end{array} \right. \right)_{n \in \mathbf{N}}$$

converge simplement vers la fonction nulle sur \mathbf{R} , que nous notons f . Comme

- pour tout $n \in \mathbf{N}$, $n \in \mathbf{R}$;
- la suite $(f_n(n) - f(n) = 1)_{n \in \mathbf{N}}$ ne converge pas vers $0_{\mathbf{R}}$;

nous pouvons appliquer la proposition 17 pour obtenir que la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ ne converge pas uniformément vers la fonction nulle f sur \mathbf{R} .

Exercice 19. — Considérons, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, la fonction f_n définie par :

$$f_n : x \longmapsto \frac{nx}{1 + nx}.$$

1. La suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ converge-t-elle simplement sur $]0, 1[$?
2. La suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ converge-t-elle uniformément sur $]a, 1[$, où a est un réel fixé de $]0, 1[$?
3. La suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ converge-t-elle uniformément sur $]0, 1[$?
4. La suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ converge-t-elle uniformément sur $[1, +\infty[$?

5. Passage du local pour la convergence simple, mais pas pour la convergence uniforme

Soient A une partie de \mathbf{R} , $(f_n)_{n \in \mathbf{N}} \in \mathcal{F}(A, \mathbf{K})^{\mathbf{N}}$ et $f \in \mathcal{F}(A, \mathbf{K})$. Comme la convergence simple est une convergence point de A par point de A :

$\left(\forall [a, b] \subset A \quad f_n|_{[a, b]} \xrightarrow{CS} f|_{[a, b]} \right) \implies f_n \xrightarrow{CS} f \quad [\text{passage du local au global pour la CS}].$

En revanche, la convergence uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ vers la fonction f sur chaque segment $[a, b]$ inclus dans A n'implique pas nécessairement la convergence uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ vers la fonction f sur A , comme l'illustre les deux exercices suivants.

Exercice 20. — Considérons :

$$f \left| \begin{array}{l} [0, 1[\longrightarrow \mathbf{R} \\ x \longmapsto 0 \end{array} \right.$$

et, pour tout $n \in \mathbf{N}$, la fonction f_n définie par :

$$f_n \left| \begin{array}{l} [0, 1[\longrightarrow \mathbf{R} \\ x \longmapsto x^n. \end{array} \right.$$

- Démontrer que, pour tout segment $[a, b] \subset [0, 1[$, $f_n|_{[a,b]} \xrightarrow{[a,b]}^{CU} f|_{[a,b]}$.
- Démontrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ ne converge pas uniformément vers la fonction f sur $[0, 1[$.

Exercice 21. — Considérons, pour tout $n \in \mathbf{N}$, la fonction f_n définie par :

$$f_n \left| \begin{array}{l}]0, +\infty[\longrightarrow \mathbf{R} \\ x \longmapsto \cos\left(\frac{nx}{n+1}\right). \end{array} \right.$$

- Démontrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge simplement sur $]0, +\infty[$. On notera $f \in \mathcal{F}(]0, +\infty[, \mathbf{R})$ cette limite simple.
- Démontrer que, pour tout segment $[a, b] \subset]0, +\infty[$, $f_n|_{[a,b]} \xrightarrow{[a,b]}^{CU} f|_{[a,b]}$.
- Démontrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ ne converge pas uniformément vers la fonction f sur $]0, +\infty[$.

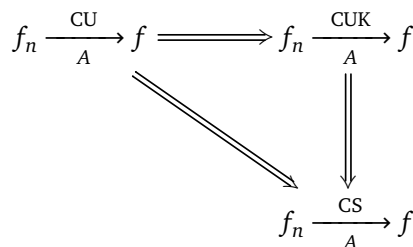
6. Synthèse sur la convergence d'une suite de fonctions définies sur une partie de \mathbf{R}

Soient A une partie de \mathbf{R} , une suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbf{N}} \in \mathcal{F}(A, \mathbf{K})^{\mathbf{N}}$ et une fonction $f \in \mathcal{F}(A, \mathbf{K})$.

Définition 22. — On dit que la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge uniformément vers f sur tout segment de A , ce que l'on note $f_n \xrightarrow[A]{CUK} f$, si :

$$\forall [a, b] \subset A \quad f_n|_{[a,b]} \xrightarrow{[a,b]}^{CU} f|_{[a,b]}.$$

Les résultats obtenus sont rassemblés dans le diagramme suivant.



Aucune des implications réciproques du diagramme ci-dessus n'est vraie.



7. La convergence simple n'est pas associée à une norme (HP)

7.1. Topologie sur un ensemble

Définition 23. — Une topologie sur un ensemble X est la donnée d'un ensemble \mathcal{O} de parties de X , appelées ouverts, vérifiant les trois axiomes suivants.

(T1) Les ensembles X et \emptyset sont ouverts.

$$X \in \mathcal{O} \quad \text{et} \quad \emptyset \in \mathcal{O}$$

(T2) Une intersection finie d'ouverts est un ouvert.

$$\forall p \in \mathbf{N}^* \quad \forall (U_1, \dots, U_p) \in \mathcal{O}^p \quad \bigcap_{k=1}^p U_k \in \mathcal{O}$$

(T3) Une union quelconque d'ouverts est un ouvert.

$$\forall (U_i)_{i \in I} \in \mathcal{O}^I \quad \bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{O}$$

Exemple 24. — Si X est un ensemble, alors $\{X, \emptyset\}$ est une topologie sur X , appelée topologie grossière.

Exemple 25. — Si X est un ensemble, alors $\mathcal{P}(X)$ est une topologie sur X , appelée topologie discrète.

Exemple 26. — Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. On rappelle qu'une partie U de E est dite ouverte si :

$$\forall x \in U \quad \exists r_x > 0 \quad B(x, r_x) \subset U.$$

L'ensemble \mathcal{O} des parties ouvertes de E définit une topologie sur E , i.e. vérifie les axiomes T1, T2 et T3.

7.2. Topologie engendrée par une famille de parties d'un ensemble

Proposition 27. — Soient X un ensemble et \mathcal{A} un ensemble de parties de X . Nous définissons l'ensemble :

$$\mathcal{B} := \left\{ \bigcap_{j=1}^n A_j : n \in \mathbf{N}^* \text{ et } (A_1, \dots, A_n) \in \mathcal{A}^n \right\} \quad [\text{ensemble des intersections finies d'éléments de } \mathcal{A}]$$

et l'ensemble :

$$\mathcal{T} = \left\{ C \in \mathcal{P}(X) : \exists (B_i)_{i \in I} \in \mathcal{B}^I, C = \bigcup_{i \in I} B_i \right\} \quad [\text{ensemble des réunions quelconques d'éléments de } \mathcal{B}].$$

- (a) L'ensemble $\mathcal{T} \cup \{\emptyset, X\}$ est une topologie sur X qui contient \mathcal{A} , i.e. dont tous les éléments de \mathcal{A} sont ouverts.
- (b) Parmi toutes les topologies de X contenant \mathcal{A} , $\mathcal{T} \cup \{\emptyset, X\}$ est la plus petite (au sens de l'inclusion). On l'appelle topologie engendrée par \mathcal{A} .
- (c) Un ouvert de la topologie engendrée par \mathcal{A} est donc \emptyset ou X ou une réunion quelconque d'intersections finies d'éléments de \mathcal{A} .

Démonstration.

- L'ensemble $\mathcal{T} \cup \{\emptyset, X\}$ vérifie l'axiome (T1). — Clair.
- L'ensemble $\mathcal{T} \cup \{\emptyset, X\}$ vérifie l'axiome (T2). — Soit U_1, \dots, U_n un nombre fini d'éléments de $\mathcal{T} \cup \{\emptyset, X\}$. Nous démontrons que $\bigcap_{k=1}^n U_k \in \mathcal{T} \cup \{\emptyset, X\}$.

- (i) S'il existe $k_0 \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $U_{k_0} = \emptyset$, alors $\bigcap_{k=1}^n U_k = \emptyset \in \mathcal{T} \cup \{\emptyset, X\}$.

(ii) S'il existe $k_0 \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $U_{k_0} = X$, alors $\bigcap_{k=1}^n U_k = \bigcap_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{k_0\}} U_k$.

(iii) D'après (i) et (ii), nous pouvons supposer que, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $U_k \in \mathcal{T}$. Ainsi :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \exists (B_{k,i_k})_{i_k \in I_k} \in \mathcal{B}^{I_k}, \quad U_k = \bigcup_{i_k \in I_k} B_{k,i_k}.$$

Alors :

$$\bigcap_{k=1}^n U_k = \bigcap_{k=1}^n \left(\bigcup_{i_k \in I_k} B_{k,i_k} \right) = \bigcup_{(i_1, \dots, i_n) \in I_1 \times \dots \times I_n} \left(\bigcap_{k=1}^n B_{k,i_k} \right).$$

Comme \mathcal{B} est stable par intersection finie et \mathcal{T} est stable par réunion quelconque, il vient $\bigcap_{k=1}^n U_k \in \mathcal{T}$.

• L'ensemble $\mathcal{T} \cup \{\emptyset, X\}$ vérifie l'axiome (T3). — Soit $(U_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de $\mathcal{T} \cup \{\emptyset, X\}$. Nous démontrons que $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T} \cup \{\emptyset, X\}$.

(iv) S'il existe $i_0 \in I$ tel que $U_{i_0} = X$, alors $\bigcup_{i \in I} U_i = X \in \mathcal{T} \cup \{\emptyset, X\}$.

(v) S'il existe $i_0 \in I$ tel que $U_{i_0} = \emptyset$, alors $\bigcup_{i \in I} U_i = \bigcup_{i \in I \setminus \{i_0\}} U_i$.

(vi) D'après (iv) et (v), nous pouvons supposer que, pour tout $i \in I$, $U_i \in \mathcal{T}$. Ainsi :

$$\forall i \in I, \exists (B_{i,j_i})_{j_i \in J_i} \in \mathcal{B}^{J_i}, \quad U_i = \bigcup_{j_i \in J_i} B_{i,j_i}.$$

Alors :

$$\bigcup_{i \in I} U_i = \bigcup_{i \in I} \left(\bigcup_{j_i \in J_i} B_{i,j_i} \right).$$

Comme \mathcal{T} est stable par réunion quelconque, il vient $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}$.

• Caractère minimal de la topologie $\mathcal{T} \cup \{\emptyset, X\}$. — Tout élément de \mathcal{A} est élément de \mathcal{B} donc, *a fortiori*, appartient à $\mathcal{T} \cup \{\emptyset, X\}$. La topologie $\mathcal{T} \cup \{\emptyset, X\}$ contient donc \mathcal{A} .

Soit \mathcal{O} une topologie qui contient \mathcal{A} . Nous démontrons que $\mathcal{T} \cup \{\emptyset, X\} \subset \mathcal{O}$.

D'après (T1), X et \emptyset appartiennent à \mathcal{O} .

D'après (T2), $\mathcal{B} \subset \mathcal{O}$.

Alors, d'après (T3), $\mathcal{T} \subset \mathcal{O}$.

□

Remarque 28. — Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé tel que $E \neq \{0_E\}$. La topologie \mathcal{O} associée, définie dans l'exemple 26, est la topologie engendrée par :

$$\{B(x, r) : (x, r) \in E \times \mathbf{R}_{>0}\}$$

i.e. la plus petite topologie contenant toutes les boules ouvertes. Un ouvert de \mathcal{O} est une union quelconque d'intersections finies de boules ouvertes (E et \emptyset peuvent s'écrire ainsi).

7.3. Convergence d'une suite pour une topologie

Définition 29. — Soient X un ensemble muni d'une topologie \mathcal{O} , $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite d'éléments de X et $\ell \in X$. On dit que la suite $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers ℓ pour la topologie \mathcal{O} , et on note $x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{O}} \ell$, si :

$$\forall U \in \mathcal{O} \quad (\ell \in U \implies \exists N \in \mathbf{N} \quad \forall n \geq N \quad x_n \in U).$$

Exemple 30. — Si X est un ensemble muni de la topologie grossière, alors toute suite d'éléments de X converge vers tout point de X .

Exemple 31. — Si X est un ensemble muni de la topologie discrète, alors une suite d'éléments de X converge si et seulement si elle est stationnaire.

7.4. Convergence d'une suite pour une topologie engendrée par une famille de parties d'un ensemble

Proposition 32. — Soient X un ensemble, \mathcal{A} un ensemble de parties de X , \mathcal{O} la topologie engendrée par \mathcal{A} , $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de X et $\ell \in X$. Alors :

$$x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{O}} \ell \iff \forall U \in \mathcal{A} \quad (\ell \in U \implies \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad x_n \in U).$$

Démonstration.

- *Implication directe.* — Elle est claire car la topologie \mathcal{O} engendrée par \mathcal{A} contient \mathcal{A} .
- *Implication réciproque.* — Supposons :

$$(*) \quad \forall U \in \mathcal{A} \quad (\ell \in U \implies \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad x_n \in U).$$

Soit $V \in \mathcal{O}$ tel que $\ell \in V$. D'après la proposition 27, $V = X$ ou V est une réunion quelconque d'intersections finies d'éléments de \mathcal{A} . Nous démontrons :

$$\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad x_n \in V.$$

Si $V = X$, alors $N = 0$ convient.

Nous supposons désormais que V s'écrit :

$$V = \bigcup_{i \in I} \left(\bigcap_{j=1}^{p_i} A_{i,j} \right)$$

où, pour tout $i \in I$, $p_i \in \mathbb{N}^*$ et, pour tout $j \in \llbracket 1, p_i \rrbracket$, $A_{i,j} \in \mathcal{A}$. Comme $\ell \in V$:

$$\exists i_0 \in I \quad \ell \in \bigcap_{j=1}^{p_{i_0}} A_{i_0,j}.$$

D'après (*):

$$\forall j \in \llbracket 1, p_{i_0} \rrbracket \quad \exists N_j \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N_j \quad x_n \in A_{i_0,j}.$$

En posant $N := \max \{N_j : j \in \llbracket 1, p_{i_0} \rrbracket\}$, il vient :

$$\forall n \geq N \quad x_n \in \bigcap_{j=1}^{p_{i_0}} A_{i_0,j}.$$

□

Exemple 33. — Soit E est un espace vectoriel normé et \mathcal{O} est la topologie associée à une norme $\|\cdot\|$ sur E , qui est engendrée par toutes les boules ouvertes. Alors on vérifie que, pour tout $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$, pour tout $\ell \in E$:

$$x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{O}} \ell \iff x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\|\cdot\|} \ell$$

où

$$x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\|\cdot\|} \ell \iff (\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad \|x_n - \ell\| < \varepsilon)$$

7.5. Partie dense pour une topologie

Définition 34. — Soient X un ensemble muni d'une topologie \mathcal{O} et D une partie de X . L'ensemble D est dense dans X pour la topologie \mathcal{O} si :

$$\forall U \in \mathcal{O} \setminus \{\emptyset\} \quad U \cap D \neq \emptyset.$$

7.6. Partie séquentiellement dense pour une topologie

Définition 35. — Soient X un ensemble muni d'une topologie \mathcal{O} et S une partie de X . L'ensemble S est séquentiellement dense dans X pour la topologie \mathcal{O} si :

$$\forall x \in X \quad \exists (s_n)_{n \in \mathbb{N}} \in S^{\mathbb{N}} \quad s_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{O}} x.$$

7.7. La séquentielle densité implique la densité

Proposition 36. — Soient X un ensemble muni d'une topologie \mathcal{O} et S une partie de X . Si S est séquentiellement dense dans X pour la topologie \mathcal{O} , alors S est dense dans X pour la topologie \mathcal{O} .

Démonstration. Supposons S séquentiellement dense dans X pour la topologie \mathcal{O} .

Soit $U \in \mathcal{O} \setminus \{\emptyset\}$. Nous démontrons $U \cap S \neq \emptyset$.

Comme U est non vide, il existe $x \in U$.

Par hypothèse sur S , il existe $(s_n)_{n \in \mathbb{N}} \in S^{\mathbb{N}}$ telle que $s_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{O}} x$.

Comme U est un ouvert de \mathcal{O} contenant x :

$$\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad s_n \in U.$$

En particulier, $s_N \in U$ et donc $U \cap S \neq \emptyset$. □

7.8. Séquentielle densité versus densité dans un K-espace vectoriel normé

Proposition 37. — Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, \mathcal{O} la topologie associée sur E et D une partie de E . Alors D est séquentiellement dense dans E pour la topologie \mathcal{O} si et seulement si D est dense dans E pour la topologie \mathcal{O} .

Démonstration.

- *Implication directe.* — Elle a déjà été établie (proposition 36).
- *Implication réciproque.* — Supposons que la partie D est dense dans E pour la topologie \mathcal{O} .

Fixons un vecteur x de E . Nous démontrons qu'il existe $(d_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in D^{\mathbb{N}^*}$ telle que $d_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{O}} x$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La boule ouverte $B(x, 1/n)$ est un ouvert non vide de la topologie \mathcal{O} . Par hypothèse sur D , il existe donc $d_n \in B(x, 1/n) \cap D$.

Nous disposons ainsi d'une suite $(d_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in D^{\mathbb{N}^*}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\|d_n - x\| \leq 1/n$.

Par théorème d'encadrement, la suite $(d_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers x pour la norme $\|\cdot\|$, donc pour la topologie \mathcal{O} associée. □

7.9. Critère pour qu'une topologie ne provienne pas d'une norme

Remarque 38. — D'après la proposition précédente, si E est un espace vectoriel muni d'une topologie \mathcal{O} possédant une partie dense, mais non-séquentiellement dense, alors la topologie \mathcal{O} n'est associée à aucune norme.

7.10. Topologie de la convergence simple

Définition 39. — Pour tout $(x, z, \varepsilon) \in X \times \mathbf{K} \times \mathbf{R}_{>0}$, on note $V(x, z, \varepsilon)$ l'ensemble des fonctions de X dans \mathbf{K} dont la valeur en x est éloignée de z d'au plus ε , i.e. :

$$V(x, z, \varepsilon) := \{g \in \mathcal{F}(X, \mathbf{K}) : |g(x) - z| < \varepsilon\} \subset \mathcal{F}(X, \mathbf{K})$$

et on note \mathcal{T} la topologie sur $\mathcal{F}(X, \mathbf{K})$ engendrée par :

$$\{V(x, z, \varepsilon) : (x, z, \varepsilon) \in X \times \mathbf{K} \times \mathbf{R}_{>0}\}.$$

Proposition 40. — Soient $(f_n)_{n \in \mathbf{N}} \in \mathcal{F}(X, \mathbf{K})^{\mathbf{N}}$ et $f \in \mathcal{F}(X, \mathbf{K})$. Alors :

$$f_n \xrightarrow[X]{\text{CS}} f \iff f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{T}} f$$

où \mathcal{T} est la topologie sur $\mathcal{F}(X, \mathbf{K})$ définie en 39.

Démonstration.

- *Implication directe.* — Supposons que $f_n \xrightarrow[X]{\text{CS}} f$. Nous démontrons que $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{T}} f$.
Comme la topologie \mathcal{T} est engendrée par :

$$\{V(x, z, \varepsilon) := \{g \in \mathcal{F}(X, \mathbf{K}) : |g(x) - z| < \varepsilon\} : (x, z, \varepsilon) \in X \times \mathbf{K} \times \mathbf{R}_{>0}\}$$

la proposition 32 nous livre qu'il suffit de prouver que :

$$\forall (x, z, \varepsilon) \in X \times \mathbf{K} \times \mathbf{R}_{>0}, (f \in V(x, z, \varepsilon)) \implies \exists N \in \mathbf{N} \quad \forall n \geq N \quad f_n \in V(x, z, \varepsilon).$$

Soit $(x, z, \varepsilon) \in X \times \mathbf{K} \times \mathbf{R}_{>0}$ tel que $f \in V(x, z, \varepsilon)$, i.e. :

$$|f(x) - z| < \varepsilon.$$

Comme $f_n \xrightarrow[X]{\text{CS}} f$, $f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{|\cdot|} f(x)$. Puisque $\varepsilon - |f(x) - z| > 0$:

$$\exists N \in \mathbf{N} \quad \forall n \geq N \quad |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon - |f(x) - z|.$$

Soit $n \geq N$. Nous observons que :

$$|f_n(x) - z| = |f_n(x) - f(x) + f(x) - z| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - z| \leq \varepsilon - |f(x) - z| + |f(x) - z| = \varepsilon$$

ce qui implique que $f_n \in V(x, z, \varepsilon)$.

- *Implication réciproque.* — Supposons que $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{T}} f$. Nous démontrons que $f_n \xrightarrow[X]{\text{CS}} f$.
Soit $x \in X$. Fixons $\varepsilon > 0$. Comme :

$$V(x, f(x), \varepsilon) := \{g \in \mathcal{F}(X, \mathbf{K}) : |g(x) - f(x)| < \varepsilon\}$$

est un ouvert de la topologie \mathcal{O} qui contient f :

$$\exists N \in \mathbf{N} \quad \forall n \geq N \quad f_n \in V(x, f(x), \varepsilon).$$

Par définition de $V(x, f(x), \varepsilon)$, nous en déduisons que :

$$\forall n \geq N \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

□

7.11. La topologie de la convergence simple ne provient pas d'une norme

Définition 41. — Le support d'une fonction $f \in \mathcal{F}(X, \mathbf{K})$ est défini par :

$$\text{supp}(f) := \{x \in X : f(x) \neq 0\} \subset X .$$

Proposition 42. — Supposons que X est un ensemble infini non-dénombrable, e.g. X est un intervalle d'intérieur non vide de \mathbf{R} . Alors l'ensemble :

$$D := \{f \in \mathcal{F}(X, \mathbf{K}) : \text{supp}(f) \text{ est fini}\} \subset \mathcal{F}(X, \mathbf{K})$$

est dense pour la topologie \mathcal{T} , mais non séquentiellement dense pour la topologie \mathcal{T} .

Démonstration.

- L'ensemble D est dense pour la topologie \mathcal{T} . — Soit U un ouvert non vide de la topologie \mathcal{T} . D'après la proposition 27, $U = \mathcal{F}(X, \mathbf{K})$ ou U est une réunion quelconque d'intersections finies d'éléments :

$$\{V(x, z, \varepsilon) := \{g \in \mathcal{F}(X, \mathbf{K}) : |g(x) - z| < \varepsilon\} : (x, z, \varepsilon) \in X \times \mathbf{K} \times \mathbf{R}_{>0}\} .$$

Nous démontrons que $U \cap D \neq \emptyset$

Si $U = \mathcal{F}(X, \mathbf{K})$ alors $U \cap D = D \neq \emptyset$.

Sinon, U s'écrit :

$$U = \bigcup_{i \in I} \left(\bigcap_{j=1}^{p_i} V(x_{i,j}, z_{i,j}, \varepsilon_{i,j}) \right)$$

où, pour tout $i \in I$, $p_i \in \mathbf{N}^*$ et, pour tout $j \in \llbracket 1, p_i \rrbracket$, $(x_{i,j}, z_{i,j}, \varepsilon_{i,j}) \in X \times \mathbf{K} \times \mathbf{R}_{>0}$.

Fixons $i_0 \in I$. Alors la fonction :

$$f \left| \begin{array}{l} X \longrightarrow \mathbf{K} \\ x \longmapsto \sum_{j=1}^{p_{i_0}} z_{i_0,j} \cdot \mathbb{1}_{x_{i_0,j}}(x) \end{array} \right.$$

appartient à $\bigcap_{j=1}^{p_{i_0}} V(x_{i_0,j}, z_{i_0,j}, \varepsilon_{i_0,j})$ et a un support fini puisque :

$$\text{supp}(f) \subset \{x_{i_0,j} : j \in \llbracket 1, p_{i_0} \rrbracket\} .$$

Ainsi :

$$f \in \left(\bigcup_{i \in I} \left(\bigcap_{j=1}^{p_i} V(x_{i,j}, z_{i,j}, \varepsilon_{i,j}) \right) \right) \cap D .$$

- L'ensemble D n'est pas séquentiellement dense pour la topologie \mathcal{T} .
— Nous raisonnons par l'absurde et supposons que D est séquentiellement dense pour la topologie \mathcal{T} . Si f est la fonction :

$$f \left| \begin{array}{l} X \longrightarrow \mathbf{K} \\ x \longmapsto 1 \end{array} \right.$$

il existe donc une suite $(f_n)_{n \in \mathbf{N}} \in D^{\mathbf{N}}$ telle que $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{T}} f$, i.e., d'après la proposition 40, telle que $f_n \xrightarrow[X]{\text{CS}} f$.

L'ensemble :

$$E := \bigcup_{n \in \mathbf{N}} \text{supp}(f_n)$$

est fini ou dénombrable comme réunion dénombrable d'ensemble finis. Comme X est infini non-dénombrable, E est une partie stricte de X . Il existe donc $x_0 \in X \setminus E$. Ce point x_0 de X vérifie :

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad f_n(x_0) = 0$$

et donc :

$$f_n(x_0) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{|\cdot|} 0 \neq 1 = f(x_0) \quad [\text{contradiction}] .$$

□

8. Convergence simple d'une série de fonctions

Définition 43. — Soit $(f_n)_{n \in \mathbf{N}} \in \mathcal{F}(X, \mathbf{K})^{\mathbf{N}}$. Posons pour tout $n \in \mathbf{N}$:

$$S_n := \sum_{k=0}^n f_k \quad \left| \begin{array}{l} X \longrightarrow \mathbf{K} \\ x \longmapsto \sum_{k=0}^n f_k(x) . \end{array} \right.$$

On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur X si la suite de fonctions $(S_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge simplement sur X , i.e. si :

pour tout $x \in X$, la série numérique $\sum f_n(x)$ converge.

Dans ce cas, nous définissons la somme de la série de fonctions $\sum f_n$ par :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n \quad \left| \begin{array}{l} X \longrightarrow \mathbf{C} \\ x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \end{array} \right. \quad [\text{limite simple de la suite de fonctions } (S_n)_{n \in \mathbf{N}}] .$$

Exercice 44. — Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, nous définissons la fonction f_n par :

$$f_n \quad \left| \begin{array}{l} \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C} \\ \theta \longmapsto \frac{e^{in\theta}}{n^2} . \end{array} \right.$$

Démontrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur \mathbf{R} .

Exercice 45. — Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, nous définissons la fonction f_n par

$$f_n \quad \left| \begin{array}{l}]-1, 1[\longrightarrow \mathbf{R} \\ x \longmapsto n x^n . \end{array} \right.$$

Démontrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $] -1, 1[$ et reconnaître la fonction $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$.

Exercice 46. — Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, nous définissons la fonction f_n par :

$$f_n \quad \left| \begin{array}{l}]-1, 1] \longrightarrow \mathbf{R} \\ x \longmapsto \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n} . \end{array} \right.$$

Démontrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $] -1, 1]$ et reconnaître la fonction $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$.

9. Convergence uniforme d'une série de fonctions

Définition 47. — Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{F}(X, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$S_n := \sum_{k=0}^n f_k \quad \left| \begin{array}{l} X \longrightarrow \mathbb{K} \\ x \longmapsto \sum_{k=0}^n f_k(x) . \end{array} \right.$$

On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur X , si la suite de fonctions $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur X .

Proposition 48. — Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{F}(X, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$. Si la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur X alors elle converge simplement sur X .

10. CU d'une série de fonctions versus CU de la suite des restes vers la fonction nulle

Proposition 49. — Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{F}(X, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ telle que la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge simplement sur X . La série converge uniformément sur X si et seulement si :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k \quad \left| \begin{array}{l} X \longrightarrow \mathbb{K} \\ x \longmapsto \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x) \end{array} \right. \xrightarrow[X]{\text{CU}} 0_{\mathcal{F}(X, \mathbb{K})} \quad \left| \begin{array}{l} X \longrightarrow \mathbb{K} \\ x \longmapsto 0 . \end{array} \right.$$

Exercice 50. — Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, nous définissons la fonction f_n par :

$$f_n \quad \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} \\ \theta \longmapsto \frac{e^{in\theta}}{n^2} . \end{array} \right.$$

Démontrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur \mathbb{R} .

Exercice 51. — Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, nous définissons la fonction f_n par

$$f_n \quad \left| \begin{array}{l}]-1, 1[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto nx^n . \end{array} \right.$$

1. Démontrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur tout segment de $] - 1, 1[$.
2. Démontrer que la série de fonctions $\sum f_n$ ne converge pas uniformément sur $] - 1, 1[$.

Exercice 52. — Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, nous définissons la fonction f_n par :

$$f_n \quad \left| \begin{array}{l}]-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n} . \end{array} \right.$$

1. Démontrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur tout segment de $] - 1, 1]$.
2. Démontrer que la série de fonctions $\sum f_n$ ne converge pas uniformément sur $] - 1, 1]$.

Exercice 53. — Soit $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ la suite de fonctions définie par :

$$f_0 \left| \begin{array}{l}]0, +\infty[\longrightarrow \mathbf{R} \\ x \longmapsto x \end{array} \right.$$

et la relation de récurrence :

$$f_{n+1} = \frac{1}{2} \left(f_n + \frac{f_0}{f_n} \right)$$

valable pour tout entier naturel n .

1. Démontrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, pour tout $x > 0$, $f_n(x) \geq \sqrt{x}$.

2. Soit $x > 0$. Posons :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad g_n(x) = \frac{f_n(x) - \sqrt{x}}{f_n(x) + \sqrt{x}}.$$

Exprimer $g_{n+1}(x)$ en fonction de $g_n(x)$.

3. Démontrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge uniformément sur tout segment de $]0, +\infty[$ vers la fonction f définie par :

$$f \left| \begin{array}{l}]0; +\infty[\longrightarrow \mathbf{R} \\ x \longmapsto \sqrt{x}. \end{array} \right.$$

11. Convergence normale d'une série de fonctions bornées

Définition 54. — Soit $(f_n)_{n \in \mathbf{N}} \in \mathcal{B}(X, \mathbf{K})^{\mathbf{N}}$. La série de fonctions $\sum f_n$ est dite *normalement convergente* sur X , si la série numérique $\sum \|f_n\|_{\infty, X}$ est convergente.

Exercice 55. — Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, nous définissons la fonction f_n par :

$$f_n \left| \begin{array}{l} \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C} \\ \theta \longmapsto \frac{e^{in\theta}}{n^2}. \end{array} \right.$$

Démontrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement.

Exercice 56. — Soient $\alpha > 1$ et $A := \{z \in \mathbf{C} : \operatorname{Re}(z) \geq \alpha\}$. Étudier la convergence normale de la série de fonctions $\sum f_n$ où, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$:

$$f_n \left| \begin{array}{l} A \longrightarrow \mathbf{C} \\ s \longmapsto \frac{1}{n^s}. \end{array} \right.$$

Exercice 57. — Soit $\alpha > 0$. Étudier la convergence normale de la série de fonctions $\sum f_n$ où, pour tout $n \in \mathbf{N}$:

$$f_n \left| \begin{array}{l} \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} \\ x \longmapsto \frac{1}{n^2 + \sin(nx)}. \end{array} \right.$$

Exercice 58. — Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on définit la fonction f_n par :

$$f_n \left| \begin{array}{l} [0, +\infty[\longrightarrow \mathbf{C} \\ x \longmapsto \frac{(-1)^n x}{(1+x^2)^n} \end{array} \right.$$

- Démontrer que, pour tout $\alpha > 0$, la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur $[\alpha, +\infty[$.
- Démontrer que la série de fonctions $\sum f_n$ ne converge pas normalement sur $[0, +\infty[$.

Proposition 59. — Soit $(f_n)_{n \in \mathbf{N}} \in \mathcal{B}(X, \mathbf{K})^{\mathbf{N}}$. Alors :

$$\sum f_n \text{ converge normalement sur } X \implies \sum |f_n| \text{ converge simplement sur } X$$

et donc :

$$\sum f_n \text{ converge normalement sur } X \implies \sum f_n \text{ converge simplement sur } X.$$

Une série de fonctions peut converger simplement, sans converger normalement. Considérons la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$, où pour tout $n \in \mathbf{N}$, f_n est la fonction définie par :

$$f_n \left| \begin{array}{l} [0, 1[\longrightarrow \mathbf{R} \\ x \longmapsto x^n \end{array} \right.$$

D'après les résultats sur les séries géométriques, la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement et a pour somme

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n \left| \begin{array}{l} [0, 1[\longrightarrow \mathbf{R} \\ x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \frac{1}{1-x} \end{array} \right.$$

Soit $n \in \mathbf{N}$. La fonction f_n étant croissante sur $[0, 1[$, nous en déduisons $\|f_n\|_{\infty, [0, 1[} = 1$. La série numérique $\sum \|f_n\|_{\infty, [0, 1[}$ est donc grossièrement divergente. La série de fonctions $\sum f_n$ ne converge donc pas normalement sur $[0, 1[$.

Théorème 60. — Soit $(f_n)_{n \in \mathbf{N}} \in \mathcal{B}(X, \mathbf{K})^{\mathbf{N}}$. Alors :

$$\sum f_n \text{ converge normalement sur } X \implies \sum f_n \text{ converge uniformément sur } X.$$

Une série de fonctions peut converger uniformément sans converger normalement. Considérons, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, la fonction f_n définie par :

$$f_n \left| \begin{array}{l} [0, 1] \longrightarrow \mathbf{R} \\ x \longmapsto \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n} \end{array} \right.$$

D'après le critère spécial des séries alternées, la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $[0, 1]$. Toujours d'après le critère spécial des séries alternées, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$:

$$\left\| \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k \right\|_{\infty, [0, 1]} \leq \frac{1}{n+1}$$

et donc la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur $[0, 1]$. Cependant, elle ne converge pas normalement sur $[0, 1]$ puisque, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\|f_n\|_{\infty, [0, 1]} = \frac{1}{n}$.

Exercice 61. — Pour tout $n \in \mathbf{N}$, soit f_n la fonction définie par :

$$f_n \left| \begin{array}{l}]0, +\infty[\longrightarrow \\ x \longmapsto \end{array} \right. \frac{\mathbf{R}}{x(x+1)\dots(x+n)}.$$

- Démontrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur tout intervalle de la forme $[\alpha, +\infty[$, où $\alpha > 0$.
- En déduire que la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur tout segment de $]0, +\infty[$.

Exemple 62. — La série de fonctions de terme général :

$$f_n \left| \begin{array}{l} \mathbf{R} \longrightarrow \\ x \longmapsto \end{array} \right. \arctan(n+x) - \arctan(n)$$

converge normalement sur tout segment de \mathbf{R} .

- Il suffit de démontrer que, pour tout $a > 0$, la série numérique $\sum \|f_n\|_{\infty, [-a, a]}$ converge. Fixons un réel $a > 0$.
- Par croissance de la fonction \arctan , pour tout $(n, x) \in \mathbf{N}^* \times [-a, a]$:

$$\underbrace{\arctan(n-a) - \arctan(n+a)}_{-(\arctan(n+a) - \arctan(n-a))} \leq \underbrace{\arctan(n+x) - \arctan(n)}_{f_n(x)} \leq \arctan(n+a) - \arctan(n-a)$$

d'où :

$$|f_n(x)| \leq \underbrace{\arctan(n+a) - \arctan(n-a)}_{\text{indépendant de } x}.$$

Par passage à la borne supérieure sur les réels $x \in [-a, a]$, nous obtenons :

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad 0 \leq \|f_n\|_{\infty, [-a, a]} \leq \arctan(n+a) - \arctan(n-a).$$

D'après le théorème de domination pour les séries à termes positifs, il suffit de prouver que la série numérique $\sum \arctan(n+a) - \arctan(n-a)$ converge.

- Soit $n \in \mathbf{N}^*$ tel que $n > a$. La fonction $g_n : x \mapsto \arctan(n+x)$ est de classe \mathcal{C}^1 sur le segment $[-a, a]$. D'après l'inégalité des accroissements finis :

$$\arctan(n+a) - \arctan(n-a) = |g_n(a) - g_n(-a)| \leq \|g'_n\|_{\infty, [-a, a]} 2a.$$

Pour tout $x \in [-a, a]$, $n+x > n-a > 0$. D'autre part, la fonction carrée est croissante sur \mathbf{R}_+ . Nous en déduisons que la fonction positive $g'_n : x \mapsto \frac{1}{1+(n+x)^2}$ est décroissante sur $[-a, a]$, donc :

$$\|g'_n\|_{\infty, [-a, a]} = g'_n(-a) = \frac{1}{1+(n-a)^2}.$$

Ainsi, pour tout $n > a$:

$$0 \leq \arctan(n+a) - \arctan(n-a) \leq \frac{2a}{1+(n-a)^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \underbrace{\frac{2a}{n^2}}_{\geq 0}.$$

Nous concluons alors en appliquant le critère de Riemann et le théorème de comparaison pour les séries à termes positifs.

Exercice 63. — Étudier la convergence normale de la série de fonctions de terme général :

$$f_n \left| \begin{array}{l}]0, +\infty[\longrightarrow \\ x \longmapsto \end{array} \right. \frac{\mathbf{R}}{n! (x+n)^n}$$

sur tout segment de $]0, +\infty[$.

Exercice 64. — Étudier la convergence normale de la série de fonctions de terme général :

$$f_n \left| \begin{array}{l}]-1, 1[\longrightarrow \mathbf{R} \\ x \longmapsto \frac{x^n}{1+x^{2n}} \end{array} \right.$$

sur tout segment de $] - 1, 1[$.

Exercice 65. — On définit, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, la fonction f_n par :

$$f_n \left| \begin{array}{l} \mathbf{R}_+ \longrightarrow \mathbf{R} \\ x \longmapsto (-1)^n \ln\left(1 + \frac{x}{n(1+x)}\right) \end{array} \right.$$

1. Démontrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur \mathbf{R}_+ .
2. Démontrer que la série de fonctions $\sum f_n$ ne converge pas normalement sur \mathbf{R}_+ .
3. Démontrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur \mathbf{R}_+ .

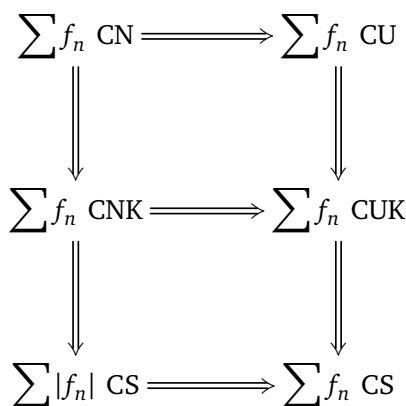
12. Synthèse sur la convergence d’une séries de fonctions bornées sur une partie de \mathbf{R}

Soient A une partie de \mathbf{R} et $(f_n)_{n \in \mathbf{N}} \in \mathcal{B}(A, \mathbf{K})^{\mathbf{N}}$.

Définition 66. — On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur tout segment de A , ce que l’on note $\sum f_n$ CUK si, pour tout segment $[a, b]$ inclus dans A , la série de fonctions $\sum f_n|_{[a,b]}$ converge uniformément sur $[a, b]$.

Définition 67. — On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur tout segment de A , ce que l’on note $\sum f_n$ CNK si, pour tout segment $[a, b]$ inclus dans A , la série de fonctions $\sum f_n|_{[a,b]}$ converge normalement sur $[a, b]$.

Les résultats obtenus sont rassemblés dans le diagramme suivant.



Aucune des implications réciproques du diagramme ci-dessus n’est vraie.

13. Approximation uniforme d'une fonction continue sur un segment

13.1. Approximation uniforme par des fonctions en escalier

Notation. — Soient a, b des réels tels que $a < b$. On pose :

- $\mathcal{E}([a, b], \mathbf{K}) := \{f \in \mathbf{K}^{[a, b]} : f \text{ est en escalier sur } [a, b]\}$;
- $\mathcal{CM}([a, b], \mathbf{K}) := \{f \in \mathbf{K}^{[a, b]} : f \text{ est continue par morceaux sur } [a, b]\}$.

Rappel 68. — L'application :

$$\| \cdot \|_{\infty} \left| \begin{array}{l} \mathcal{CM}([a, b], \mathbf{K}) \longrightarrow \mathbf{R}_+ \\ f \longmapsto \sup \{|f(x)| : x \in [a, b]\} \end{array} \right.$$

est une norme sur $\mathcal{CM}([a, b], \mathbf{K})$.

Théorème 69. — *Toute fonction continue par morceaux sur $[a, b]$ est limite uniforme d'une suite de fonctions en escalier sur $[a, b]$, i.e. l'ensemble $\mathcal{E}([a, b], \mathbf{K})$ est dense dans $\mathcal{CM}([a, b], \mathbf{K})$ pour la norme $\| \cdot \|_{\infty}$.*

Démonstration. On établit le résultat pour une fonction $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbf{R})$. Précisément, nous démontrons que :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \varphi_{\varepsilon} \in \mathcal{E}([a, b], \mathbf{R}) \quad \|f - \varphi_{\varepsilon}\|_{\infty} \leq \varepsilon .$$

Soit $\varepsilon > 0$.

- L'application f est continue sur le compact $[a, b]$. Elle est donc uniformément continue (théorème de Heine). Ainsi, il existe $\alpha > 0$ tel que :

$$\forall (t_1, t_2) \in [a, b]^2 \quad |t_1 - t_2| \leq \alpha \implies |f(t_1) - f(t_2)| \leq \varepsilon .$$

Comme \mathbf{R} est archimédien, il existe $p \in \mathbf{N}^*$ tel que $\frac{b-a}{p} \leq \alpha$. Posons alors, pour tout $k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$:

$$a_k := a + k \frac{b-a}{p}$$

et $a_p := b$, de sorte que :

$$a = a_0 < a_1 < \dots < a_p = b .$$

- Soit φ_{ε} la fonction définie sur $[a, b]$ par :

$$\forall k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket \quad \forall t \in [a_k, a_{k+1}[\quad \varphi_{\varepsilon}(t) = f(a_k)$$

et $\varphi_{\varepsilon}(b) = f(b)$. Cette fonction est en escalier, par construction.

- Soit $t \in [a, b]$.

— S'il existe $k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$ tel que $t \in [a_k, a_{k+1}[$, alors :

$$|t - a_k| = t - a_k \leq a_{k+1} - a_k \leq \frac{b-a}{p} \leq \alpha$$

et donc :

$$|f(t) - \varphi_{\varepsilon}(t)| = |f(t) - f(a_k)| \leq \varepsilon .$$

— Si $t = b$, alors :

$$|f(t) - \varphi_{\varepsilon}(t)| = 0 \leq \varepsilon .$$

Ainsi :

$$\forall t \in [a, b] \quad |f(t) - \varphi_{\varepsilon}(t)| \leq \underbrace{\varepsilon}_{\text{indépendant de } t \in [a, b]} .$$

Par passage à la borne supérieure sur l'ensemble des $t \in [a, b]$, il vient :

$$\|f - \varphi_{\varepsilon}\|_{\infty} := \sup_{t \in [a, b]} |f(t) - \varphi_{\varepsilon}(t)| \leq \varepsilon .$$

□

Exercice 70. — Soit $f \in \mathcal{C}\mathcal{M}([a, b], \mathbf{K})$. Démontrer que :

$$\int_a^b f(t) e^{i\lambda t} dt \xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} 0 \quad [\text{lemme de Riemann-Lebesgue}] .$$

13.2. Théorème d'approximation polynomiale de Weierstrass

Notation. — Soient a, b des réels tels que $a < b$. On pose :

- $\mathcal{P}([a, b], \mathbf{K}) := \{f \in \mathbf{K}^{[a,b]} : f \text{ est polynomiale}\} ;$
- $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbf{K}) := \{f \in \mathbf{K}^{[a,b]} : f \text{ est continue sur } [a, b]\} .$

Rappel 71. — L'application :

$$\| \cdot \|_\infty \left| \begin{array}{l} \mathcal{C}^0([a, b], \mathbf{K}) \longrightarrow \mathbf{R}_+ \\ f \longmapsto \sup \{|f(x)| : x \in [a, b]\} \end{array} \right.$$

est une norme sur $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbf{K})$.

Théorème 72. — *Toute fonction continue sur $[a, b]$ est limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales sur $[a, b]$, i.e. l'ensemble $\mathcal{P}([a, b], \mathbf{K})$ est dense dans $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbf{K})$ pour la norme $\| \cdot \|_\infty$ (théorème de Weierstraß).*

Exercice 73. — Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ telle que :

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad \int_a^b x^n f(x) dx = 0 .$$

On se propose de démontrer qu'alors $f = 0_{\mathbf{R}^{[a,b]}}$ (théorème des moments).

1. Démontrer que l'application :

$$\varphi \left| \begin{array}{l} (\mathcal{C}^0([a, b], \mathbf{R}), \| \cdot \|_\infty) \longrightarrow (\mathbf{R}, | \cdot |) \\ g \longmapsto \int_a^b f(t) g(t) dt \end{array} \right.$$

est continue.

2. Que vaut l'application φ sur le sous-ensemble de $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbf{R})$ formé par les fonctions polynomiales ?
3. Conclure.

Exercice 74. — Soient $p \in \mathbf{N}$ et une fonction $f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$, qui est limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales de degrés inférieurs ou égaux à p . Démontrer que la fonction f est polynomiale.

Exercice 75. — Soit une fonction $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, qui est limite uniforme d'une suite $(P_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de fonctions polynomiales sur \mathbf{R} .

1. Démontrer qu'il existe un rang $N \in \mathbf{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$, la fonction $P_n - P_N$ est bornée sur \mathbf{R} .
2. En déduire que :

$$\forall n \geq N \quad \forall x \in \mathbf{R} \quad P_n(x) = P_N(x) + P_n(0) - P_N(0) .$$

3. En déduire que la fonction f est polynomiale.