

Séries Entières

- 1. Notion de série entière et problématique 2
- 2. Rayon de convergence d'une série entière 2
 - 2.1. Lemme d'Abel 2
 - 2.2. Définition du rayon de convergence d'une série entière 3
 - 2.3. Caractérisation du rayon de convergence 3
 - 2.4. Disque ouvert de convergence, intervalle ouvert de convergence 4
- 3. Calcul pratique du rayon de convergence 5
 - 3.1. Détermination du rayon de convergence à partir d'un point atypique 5
 - 3.2. Règle de d'Alembert pour les séries entières 5
 - 3.3. Relations de comparaison et rayons de convergence 6
 - 3.4. Invariance du rayon de convergence par multiplication par n^α 6
 - 3.5. Exemples de calculs de rayons de convergence 6
- 4. Somme et produit de Cauchy de séries entières 7
 - 4.1. Somme de deux séries entières 7
 - 4.2. Produit de Cauchy de deux séries entières 8
- 5. De la continuité de la somme d'une série entière 9
 - 5.1. Continuité d'une fonction de la variable complexe 9
 - 5.2. Convergence normale sur tout disque fermé inclus dans le disque ouvert de convergence 9
 - 5.3. Continuité de la somme d'une série entière sur le disque ouvert de convergence 10
- 6. Théorème d'Abel radial 11
- 7. Régularité de la somme d'une série entière de la variable réelle 13
 - 7.1. Caractère \mathcal{C}^∞ de la somme d'une série entière sur son intervalle ouvert de convergence 13
 - 7.2. Primitivation terme à terme de la somme d'une série entière sur son intervalle ouvert de convergence 13
 - 7.3. Coefficients d'une série entière versus nombres dérivées successifs 14
- 8. Fonctions développables en séries entières, développements usuels 14
 - 8.1. Définition d'une fonction développable en série entière 14
 - 8.2. Développements en série entière des fonctions \exp et $z \mapsto 1/(1-z)$ 15
 - 8.3. Condition nécessaire, suffisante pour qu'une fonction soit développable en série entière (HP) 15
 - 8.4. Calcul d'un développement en série entière par dérivation ou primitivation terme à terme 17
 - 8.5. Calcul d'un développement en série entière à l'aide d'une équation différentielle 17
 - 8.6. Calcul d'un développement en série entière à l'aide d'un produit de Cauchy 17
 - 8.7. Table des développements en série entière usuels 18
 - 8.8. Quelques applications de la table des DSE usuels 19

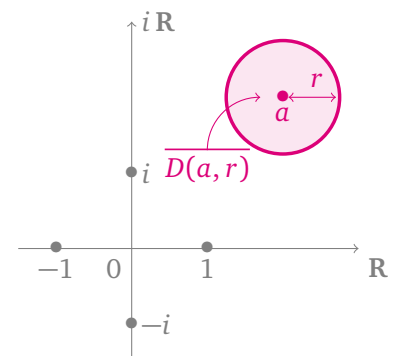
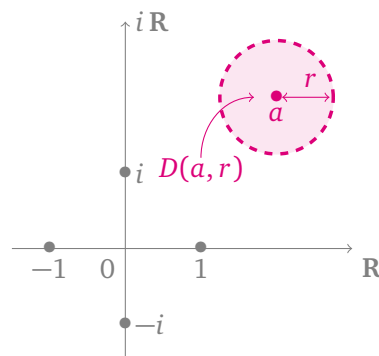
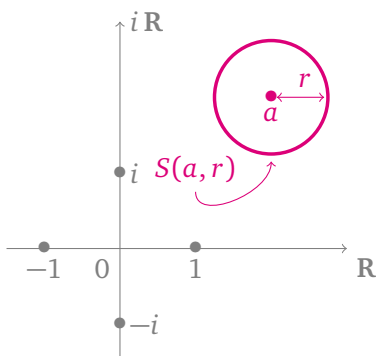
Notation. — Soient $a \in \mathbf{C}$ et $r \in]0, +\infty[$. On note :

- $S(a, r)$ le cercle de centre a et de rayon r ;
- $D(a, r)$ le disque ouvert de centre a et de rayon r ;
- $\overline{D(a, r)} = D(a, r) \sqcup S(a, r)$ le disque fermé de centre a et de rayon r .

$$S(a, r) := \{z \in \mathbf{C} : |z - a| = r\}$$

$$D(a, r) := \{z \in \mathbf{C} : |z - a| < r\}$$

$$\overline{D(a, r)} := \{z \in \mathbf{C} : |z - a| \leq r\}$$



1. Notion de série entière et problématique

Définition 1. — Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes et $z \in \mathbb{C}$. La série $\sum a_n z^n$ est appelée série entière de coefficients a_n , $n \in \mathbb{N}$.

Problématique. — Étant donnée une série entière $\sum a_n z^n$, on s'intéresse aux questions suivantes.

(A) Pour quelles valeurs de $z \in \mathbb{C}$ la série numérique $\sum a_n z^n$ converge-t-elle? L'ensemble

$$\mathcal{D} := \left\{ z \in \mathbb{C} : \text{la série numérique } \sum a_n z^n \text{ converge} \right\}$$

est appelé ensemble de définition de la série entière $\sum a_n z^n$ (il peut être réduit au singleton $\{0\}$).

(B) Quel est la nature de la convergence de la séries de fonctions $\sum f_n$ où, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$f_n \left| \begin{array}{l} \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{C} \\ z \longmapsto a_n z^n \end{array} \right.$$

sur \mathcal{D} , ou sur des parties de \mathcal{D} : simple, uniforme, uniforme sur tout compact, normale, normal sur tout compact?

(C) Si tous les a_n sont réels, la fonction

$$f \left| \begin{array}{l} \mathcal{D} \cap \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \end{array} \right.$$

est-elle de classe \mathcal{C}^∞ sur une partie de $\mathcal{D} \cap \mathbb{R}$? Si oui, a-t-on pour tout $p \in \mathbb{N}$ et certains réels x :

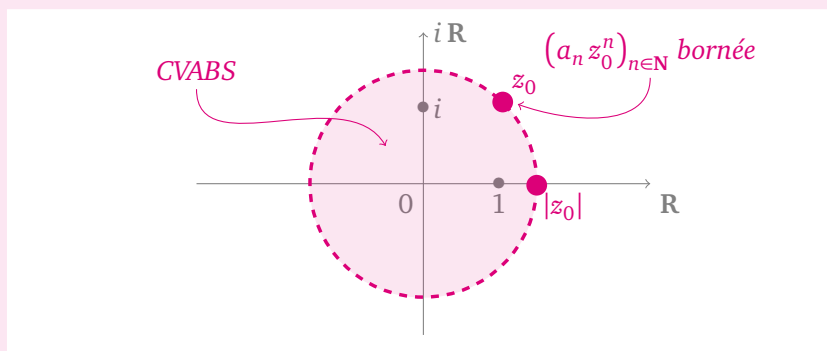
$$f^{(p)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(p)}(x) = \sum_{n=p}^{+\infty} \frac{n!}{(n-p)!} a_n x^{n-p} \quad ?$$

2. Rayon de convergence d'une série entière

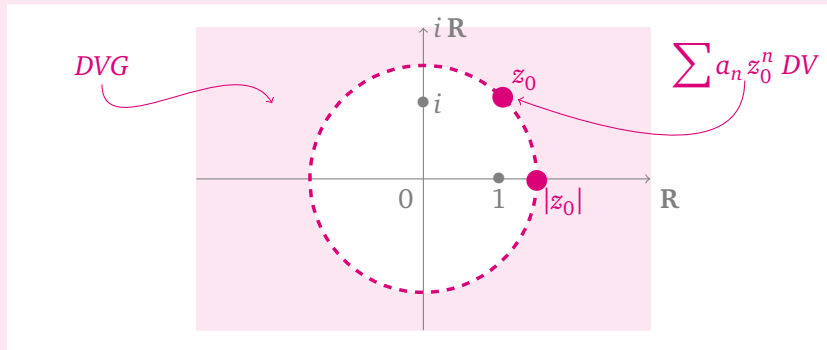
2.1. Lemme d'Abel

Lemme 2. — Soient (a_n) une suite de nombres complexes et $z_0 \in \mathbb{C}^*$.

(a) Supposons que la suite $(a_n z_0^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée. Alors, pour tout $z \in D(0, |z_0|)$, la série $\sum a_n z^n$ converge absolument.



(b) Supposons que la série $\sum a_n z_0^n$ diverge. Alors, pour tout $z \in \mathbf{C}$ tel que $|z| > |z_0|$, la série numérique $\sum a_n z^n$ diverge grossièrement.



2.2. Définition du rayon de convergence d'une série entière

Définition 3. — Soient $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de nombres complexes et :

$$I := \{r \in \mathbf{R}_+ : \text{la suite } (a_n r^n)_{n \in \mathbf{N}} \text{ est bornée}\} \quad [\text{intervalle non vide de } \mathbf{R}].$$

Le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$, noté $R(\sum a_n z^n)$, est défini par :

$$R(\sum a_n z^n) := \begin{cases} \sup(I) & \text{si } I \text{ est majoré.} \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

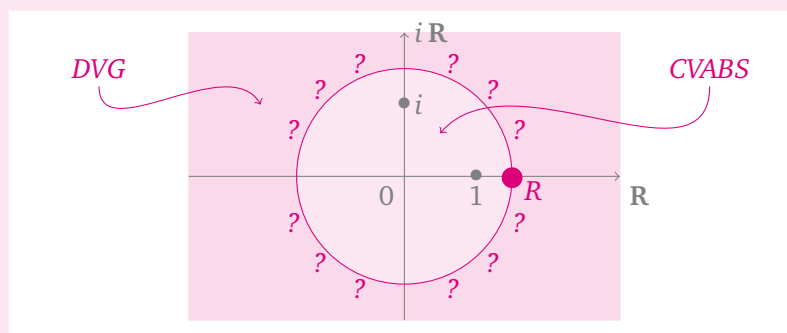
💡 D'après la définition, si $\sum a_n z^n$ est une série entière, alors :
 $R(\sum a_n z^n) = R(\sum |a_n| z^n)$ [le rayon de convergence « ne voit pas » les arguments des coefficients].

Exercice 4. — Déterminer les rayons de convergence des séries entières $\sum z^n$, $\sum \frac{z^n}{n!}$ et $\sum \frac{z^n}{n^2}$.

2.3. Caractérisation du rayon de convergence

Proposition 5. — Soit $\sum a_n z^n$ une série entière.

- (a) Son rayon de convergence est $+\infty$ si et seulement si, pour tout $z \in \mathbf{C}$, la série numérique $\sum a_n z^n$ converge absolument.
- (b) Si son rayon de convergence n'est pas $+\infty$, alors son rayon de convergence est l'unique $R \in \mathbf{R}_+$ tel que :
 - i. pour tout $z \in D(0, R)$, la série $\sum a_n z^n$ converge absolument ;
 - ii. pour tout $z \in \mathbf{C}$ tel que $|z| > R$, la série $\sum a_n z^n$ diverge grossièrement.



Pour déterminer le rayon de convergence d'une série entière $\sum a_n z^n$, on peut étudier la nature de la série numérique $\sum a_n z^n$, pour tout $z \in \mathbf{C}$.

- Si la série numérique $\sum a_n z^n$ converge, pour tout $z \in \mathbf{C}$, alors $R(\sum a_n z^n) = +\infty$.
- Si la série numérique $\sum a_n z^n$ converge uniquement pour $z = 0$, alors $R(\sum a_n z^n) = 0$.
- Si l'étude fait apparaître un réel $R > 0$ tel que :



$$\forall z \in \mathbf{C} \setminus S(0, R) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{la série numérique } \sum a_n z^n \text{ converge absolument si } |z| < R \\ \text{la série numérique } \sum a_n z^n \text{ diverge grossièrement si } |z| > R \end{array} \right.$$

alors $R(\sum a_n z^n) = R$.

On pourra parfois appliquer la règle de d'Alembert pour les séries numériques pour réaliser l'étude.

Exercice 6. — Déterminer les rayons de convergence des séries entières suivantes :

- (a) $\sum \frac{z^n}{2^n}$ (b) $\sum \ln(n)z^n$ (c) $\sum n!z^n$
 (d) $\sum \frac{(-1)^n}{2n+1} z^{2n+1}$ (e) $\sum n^\alpha z^n$, où $\alpha \in \mathbf{R}$

2.4. Disque ouvert de convergence, intervalle ouvert de convergence

Définition 7. — Soit $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence $R \in]0, +\infty]$.

- (a) L'ensemble $D(0, R) := \{z \in \mathbf{C} : |z| < R\}$ est appelé disque ouvert de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$.
 (b) L'ensemble $] -R, R[:= \{x \in \mathbf{R} : -R < x < R\}$ est appelé intervalle ouvert de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$.

Considérons une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence $R \in]0, +\infty[$. *A priori* on ne peut rien dire quant à la convergence de la série numérique $\sum a_n z^n$ lorsque z est un complexe vérifiant $|z| = R$. Considérons deux exemples, pour observer que différents comportements peuvent apparaître.



- (a) La série entière $\sum \frac{z^n}{n}$ a pour rayon de convergence 1. Elle converge pour $z = -1$ (série harmonique alternée) et diverge pour $z = 1$ (série harmonique). On connaît même le comportement de la série numérique $\sum \frac{z^n}{n}$ pour tout complexe z de module 1. En effet, grâce à une transformation d'Abel, on peut établir que, pour tout $\theta \in]0, 2\pi[$:

$$\sum \frac{e^{in\theta}}{n} \text{ converge} \iff \theta \in]0, 2\pi[.$$

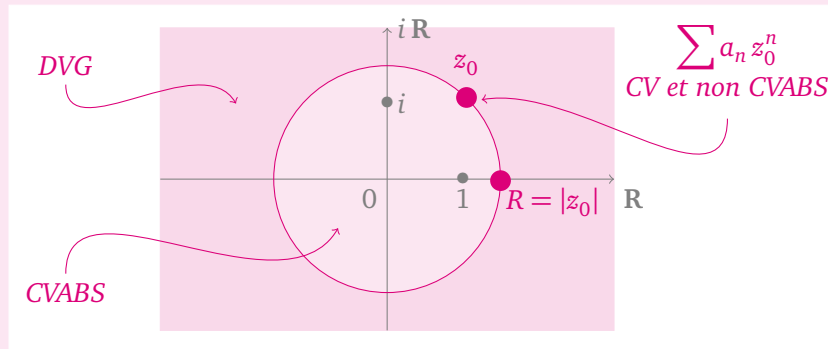
- (b) La série entière $\sum \frac{z^n}{n^2}$ a également pour rayon de convergence 1. Elle converge absolument pour tout $z \in \mathbf{C}$ tel que $|z| = 1$.

3. Calcul pratique du rayon de convergence

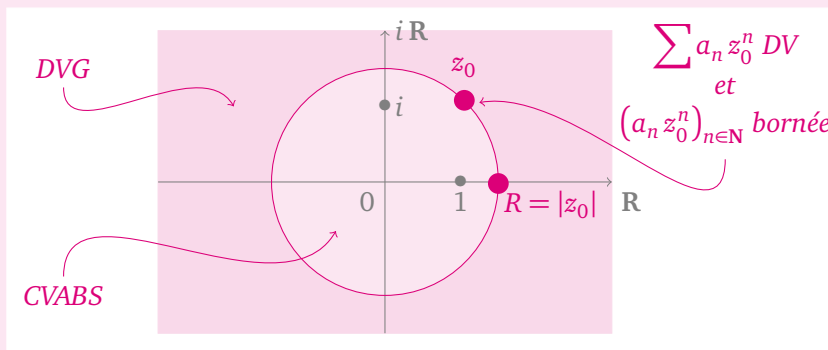
3.1. Détermination du rayon de convergence à partir d'un point atypique

Proposition 8. — Considérons une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence noté R et $z_0 \in \mathbb{C}$.

(a) Si la série numérique $\sum a_n z_0^n$ est convergente, mais non absolument convergente, alors $R = |z_0|$.



(b) Si la série numérique $\sum a_n z_0^n$ est divergente et la suite $(a_n z_0^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée, alors $R = |z_0|$.



3.2. Règle de d'Alembert pour les séries entières

Convention. — Nous posons $\frac{1}{+\infty} := 0$ et $\frac{1}{0} := +\infty$.

Théorème 9. — Soit $\sum a_n z^n$ une série entière dont les coefficients a_n sont supposés tous non nuls à partir d'un certain rang. Supposons que :

$$\exists \ell \in [0, +\infty] \quad \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell .$$

Alors la série entière $\sum a_n z^n$ a pour rayon de convergence $R = \frac{1}{\ell} \in [0, +\infty]$.

Le théorème 9 n'admet pas de réciproque. Par exemple, la série entière $\sum n^{(-1)^n} z^n$ a pour rayon de convergence 1 (cf. exercice 14) pourtant la suite de terme général :



$$\left| \frac{(n+1)^{(-1)^{n+1}}}{n^{(-1)^n}} \right| = \begin{cases} \frac{1}{n^2+n} & \text{si } n \text{ est pair} \\ n^2+n & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

ne converge pas vers 1, puisqu'elle n'admet pas de limite.

Attention aux séries entières lacunaires, qui sont parfois écrites de manière pouvant nous tromper. Par exemple les coefficients a_n de la série entière $\sum z^{n^2}$ sont définis par :



$$\forall n \in \mathbf{N} \quad a_n := \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est un carré;} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La règle de d'Alembert pour les séries entières ne peut pas être appliquée, car les coefficients ne sont pas non nuls à partir d'un certain rang. Toutefois, on peut démontrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum z^{n^2}$ est 1, à l'aide de la règle de d'Alembert pour les séries numériques, par exemple.

Exercice 10. — Soit $\sum a_n z^n$ une série entière, dont les coefficients d'indices pairs a_{2n} sont non nuls à partir d'un certain rang. Supposons que :

$$\exists \ell \in [0, +\infty] \quad \left| \frac{a_{2n+2}}{a_{2n}} \right| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$$

Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_{2n} z^{2n}$.

Exercice 11. — Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum 2^n z^{2n}$.

Le critère de d'Alembert pour les séries entières ou pour les séries numériques est, certes utile en pratique, mais ce n'est pas le seul outil à disposition pour calculer le rayon de convergence d'une série entière. Nous disposons également :

N.B.

- de la définition du rayon de convergence (définition 3) ;
- du critère via un point atypique (proposition 8) ;
- du critère de comparaison (proposition 12) suivant.

3.3. Relations de comparaison et rayons de convergence

Proposition 12. — Soient deux séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ de rayons de convergence respectifs R_a et R_b .

- (a) Si $|a_n| \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O(|b_n|)$ alors $R_a \geq R_b$.
- (b) Si $|a_n| \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(|b_n|)$ alors $R_a > R_b$.
- (c) Si $|a_n| \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} |b_n|$ alors $R_a = R_b$.

3.4. Invariance du rayon de convergence par multiplication par n^α

Proposition 13. — Soient $\sum a_n z^n$ une série entière et $\alpha \in \mathbf{R}$. Les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum n^\alpha a_n z^n$ ont même rayon de convergence.

3.5. Exemples de calculs de rayons de convergence

Exercice 14. — Déterminer les rayons de convergence des séries entières suivantes :

(a) $\sum \frac{z^n}{n(n+1)}$

(b) $\sum n^2 z^n$

(c) $\sum \sqrt{n+2} z^n$

(d) $\sum P(n) z^n$, où $P \in \mathbf{C}[X]$

(e) $\sum z^{n!}$

(f) $\sum_{n \text{ premier}} \frac{z^n}{3^n}$

(g) $\sum \frac{\ln(n)}{n^2} z^{2n}$

(h) $\sum n^{(-1)^n} z^n$

(i) $\sum e^{i a_n} z^n$, où $(a_n)_{n \in \mathbf{N}} \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$

Exercice 15. — On souhaite calculer le rayon de convergence R de la série entière $\sum \cos(n)z^n$.

1. Démontrer que $R \geq 1$.
2. Démontrer que la suite $(\cos(n))_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0.
3. Conclure.

Remarque 16. — La suite $(\cos(n))_{n \in \mathbb{N}}$ ne possède aucune limite. Démontrons le par l'absurde, en supposant qu'il existe $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ telle que $\cos(n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$.

- Comme la suite $(\cos(n))_{n \in \mathbb{N}}$ est minorée par -1 et majorée par 1 , il vient $\ell \in [-1, 1]$ (passage à la limite dans une inégalité large).
- En faisant tendre n vers $+\infty$ dans l'identité :

$$\cos(2n) = 2 \cos^2(n) - 1$$

valable pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous observons que ℓ est racine de $2X^2 - X - 1 = 2 \left(X + \frac{1}{2}\right)(X - 1)$, donc $\ell \in \left\{-\frac{1}{2}, 1\right\}$.

- En faisant tendre n vers $+\infty$ dans l'identité

$$\cos(n + 1) + \cos(n - 1) = 2 \cos(n) \cos(1)$$

valable pour tout $n \in \mathbb{N}$, il vient $2\ell = 2\ell \cos(1)$. Comme 1 n'est pas congru à 0 modulo 2π , nous en déduisons que $\ell = 0$.

Exercice 17. — Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R . Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^{2n}$.

Exercice 18. — Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Déterminer le rayon de convergence de $\sum \frac{a_n}{n!} z^n$.

4. Somme et produit de Cauchy de séries entières

4.1. Somme de deux séries entières

Proposition 19. — Soient deux séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ de convergence respectifs R_a et R_b . Soit R le rayon de convergence de la série entière $\sum (a_n + b_n) z^n$.

- (a) $R \geq \min(R_a, R_b)$
- (b) Si $R_a \neq R_b$ alors $R = \min(R_a, R_b)$.

Exercice 20. — Soit $\sum a_n z^n$ une série entière. Supposons que $\sum a_{2n} z^{2n}$ et $\sum a_{2n+1} z^{2n+1}$ aient même rayon de convergence R . Démontrer que $\sum a_n z^n$ a pour rayon de convergence R .

Exercice 21. — Déterminer le rayon R de la série entière $\sum \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ et démontrer que :

$$\forall x \in]-R, R[\quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \text{ch}(x).$$

Exercice 22. — Déterminer le rayon R de la série entière $\sum (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ et démontrer que :

$$\forall x \in]-R, R[\quad \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sin(x).$$

4.2. Produit de Cauchy de deux séries entières

Définition 23. — Le produit de Cauchy de deux séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ est la série entière $\sum c_n z^n$ où, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $c_n := \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$.

Proposition 24. — Soient deux séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs R_a et R_b .

(a) Le rayon de convergence R de leur produit de Cauchy $\sum c_n z^n$ vérifie $R \geq \min(R_a, R_b)$.

(b) Pour tout $z \in D(0, \min(R_a, R_b))$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n \right).$$

Exercice 25. — Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Notons, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $A_n := \sum_{k=0}^n a_k$.

Démontrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum A_n z^n$ est non nul.

Exercice 26. — Considérons l'ensemble :

$$\mathcal{A} := \left\{ (a_n)_{n \in \mathbf{N}} \in \mathbf{C}^{\mathbf{N}} : R\left(\sum a_n z^n\right) > 0 \right\}.$$

1. Soit $\lambda \in \mathbf{C}$ et $a = (a_n)_{n \in \mathbf{N}} \in \mathcal{A}$. Démontrer que $\lambda \cdot a := (\lambda a_n)_{n \in \mathbf{N}} \in \mathcal{A}$.
2. Soient $a = (a_n)_{n \in \mathbf{N}} \in \mathcal{A}$ et $b = (b_n)_{n \in \mathbf{N}} \in \mathcal{A}$. Justifier que $a + b := (a_n + b_n)_{n \in \mathbf{N}} \in \mathcal{A}$.
3. Soient $a = (a_n)_{n \in \mathbf{N}} \in \mathcal{A}$ et $b = (b_n)_{n \in \mathbf{N}} \in \mathcal{A}$. Justifier que $a \star b := \left(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right)_{n \in \mathbf{N}} \in \mathcal{A}$.
4. Soient $a = (a_n)_{n \in \mathbf{N}} \in \mathcal{A}$ et $b = (b_n)_{n \in \mathbf{N}} \in \mathcal{A}$. Justifier que $a \star b := b \star a$.
5. Soit $1_{\mathcal{A}} := (\delta_{0,n})_{n \in \mathbf{N}} \in \mathbf{C}^{\mathbf{N}}$. Justifier que $1_{\mathcal{A}} \in \mathcal{A}$ puis que, pour tout $a \in \mathcal{A}$, $a \star 1_{\mathcal{A}} = a$.

D'après 1,2,3, les applications

$$\left| \begin{array}{l} \mathbf{C} \times \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A} \\ (\lambda, a) \longmapsto \lambda \cdot a \end{array} \right| \quad \left| \begin{array}{l} \mathcal{A} \times \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A} \\ (a, b) \longmapsto a + b \end{array} \right| \quad \left| \begin{array}{l} \mathcal{A} \times \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A} \\ (a, b) \longmapsto a \star b \end{array} \right|$$

sont bien définies. D'après 4 et 5, la loi interne \star sur \mathcal{A} est commutative et $1_{\mathcal{A}}$ est son élément neutre. On admet que $(\mathcal{A}, \cdot, +, \star)$ est une \mathbf{C} -algèbre.

6. Démontrer que la \mathbf{C} -algèbre $(\mathcal{A}, \cdot, +, \star)$ est intègre.
7. Soit $a = (a_n)_{n \in \mathbf{N}} \in \mathcal{A}$ un élément inversible. Démontrer que $a_0 \neq 0$.
Soit $a = (a_n)_{n \in \mathbf{N}} \in \mathcal{A}$ tel que $a_0 \neq 0$.
8. Justifier qu'il existe une constante $A > 0$ telle que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $|a_n| \leq A^n$.
9. Justifier qu'il existe une constante $B > A$ telle que, $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{A^k}{B^k} \leq |a_0|$.
10. Supposons qu'il existe $b = (b_n)_{n \in \mathbf{N}} \in \mathbf{C}^{\mathbf{N}}$ tel que $a \star b = 1_{\mathcal{A}}$. Déterminer b_0 et, pour tout $n \in \mathbf{N}$, exprimer b_{n+1} en fonction de b_0, \dots, b_n .
11. Soit $b = (b_n) \in \mathbf{C}^{\mathbf{N}}$ la suite définie par la valeur de b_0 et la relation de récurrence obtenues à la question précédente. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $|b_n| \leq \frac{B^n}{|a_0|}$ et en déduire que $b \in \mathcal{A}$.
12. Conclure quant aux éléments inversibles de \mathcal{A} .

5. De la continuité de la somme d'une série entière

5.1. Continuité d'une fonction de la variable complexe

Définition 27. — Soient A une partie de \mathbf{C} et $f \in \mathcal{F}(A, \mathbf{C})$.

(a) Soit $z_0 \in A$. On dit que f est continue en z_0 si :

$$f(z) \xrightarrow{z \rightarrow z_0} f(z_0) \quad [\text{convergence dans } \mathbf{C}]$$

i.e. si :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \alpha > 0 \quad \forall z \in A \quad |z - z_0| \leq \alpha \implies |f(z) - f(z_0)| \leq \varepsilon .$$

(b) On dit que f est continue sur A si f est continue en tout point de A .

Exemple 28. — Si $P \in \mathbf{C}[X]$, alors la fonction polynomiale :

$$\left| \begin{array}{l} \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C} \\ z \longmapsto P(z) \end{array} \right.$$

est continue sur \mathbf{C} .

5.2. Convergence normale sur tout disque fermé inclus dans le disque ouvert de convergence

Théorème 29. — Soit une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence noté $R > 0$. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on définit la fonction f_n par :

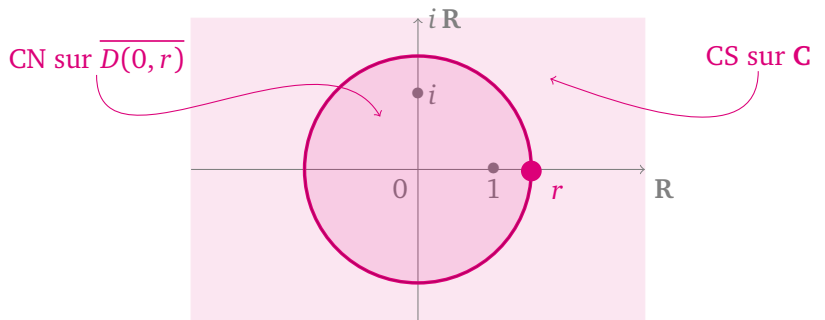
$$f_n : z \longmapsto a_n z^n .$$

Pour tout $r \in]0, R[$ la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur le disque fermé $\overline{D(0, r)}$.

Remarque 30. — Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $+\infty$.

La série de fonctions $\sum (z \longmapsto a_n z^n)$

- (a) converge simplement sur \mathbf{C} ;
- (b) converge normalement (donc uniformément) sur tout disque fermé $\overline{D(0, r)}$, où $r \in]0, +\infty[$;
- (c) ne converge pas nécessairement uniformément (et donc pas normalement) sur \mathbf{C} .



Donnons un contre-exemple pour justifier (c). La série entière $\sum \frac{z^n}{n!}$ a un rayon de convergence infini. Raisonnons par l'absurde et supposons que la série de fonctions $\sum \left(z \longmapsto \frac{z^n}{n!} \right)$ converge uniformément sur \mathbf{C} . Alors :

$$\exists N \in \mathbf{N} \quad \forall n \geq N \quad \forall z \in \mathbf{C} \quad \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{z^k}{k!} \right| \leq 1 .$$

En particulier :

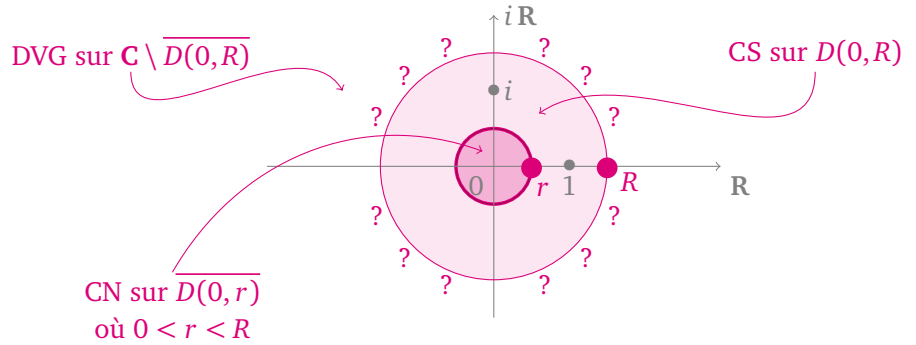
$$\forall x \in \mathbf{R}_+ \quad 0 \leq \frac{x^{N+1}}{(N+1)!} \leq \sum_{k=N+1}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = \left| \sum_{k=N+1}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} \right| \leq 1 .$$

Ainsi la fonction $x \longmapsto \frac{x^{N+1}}{(N+1)!}$ est bornée sur \mathbf{R}_+ . Contradiction.

Remarque 31. — Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R \in \mathbf{R}_+^*$.

La série de fonctions $\sum (z \mapsto a_n z^n)$

- (a) converge simplement sur $D(0, R)$;
- (b) converge normalement (donc uniformément) sur tout disque fermé $\overline{D(0, r)}$, où $0 < r < R$;
- (c) ne converge pas nécessairement uniformément (et donc pas normalement) sur $D(0, R)$.



Pour donner un contre-exemple justifiant (c), considérons la série entière $\sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{n}$ de rayon de convergence $R = 1$.

Raisonnons par l'absurde et supposons que la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} \left(z \mapsto \frac{z^n}{n} \right)$ converge uniformément sur $D(0, 1)$.

Alors :

$$\exists N \in \mathbf{N}^* \quad \forall n \geq N \quad \forall z \in D(0, 1) \quad \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{z^k}{k} \right| \leq \frac{1}{3}.$$

En particulier :

$$\forall x \in [0, 1[\quad \sum_{k=N+1}^{2N} \frac{x^k}{k} \leq \sum_{k=N+1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} = \left| \sum_{k=N+1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} \right| \leq \frac{1}{3}$$

d'où :

$$\forall x \in [0, 1[\quad \sum_{k=N+1}^{2N} \frac{x^k}{k} \leq \frac{1}{3}.$$

En faisant tendre x par valeurs inférieures vers 1, il vient :

$$(*) \quad \sum_{k=N+1}^{2N} \frac{1}{k} \leq \frac{1}{3}.$$

Comme, pour tout $k \in \llbracket N + 1, 2N \rrbracket$, $\frac{1}{k} \geq \frac{1}{2N}$ nous avons également :

$$(**) \quad \sum_{k=N+1}^{2N} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=N+1}^{2N} \frac{1}{2N} = \frac{1}{2}.$$

De (*) et (**) nous déduisons $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{3}$. Contradiction.

5.3. Continuité de la somme d'une série entière sur le disque ouvert de convergence

Corollaire 32. — Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. La fonction :

$$S \left| \begin{array}{l} D(0, R) \longrightarrow \mathbf{C} \\ z \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \end{array} \right.$$

est bien définie et continue sur $D(0, R)$, qui égale \mathbf{C} par convention si $R = +\infty$.

Démonstration. Soit $r \in]0, R[$. Comme :

- pour tout $n \in \mathbf{N}$, la fonction $f_n : z \mapsto a_n z^n$ est continue sur $D(0, r)$;

- la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur $\overline{D(0, r)}$, donc uniformément sur $D(0, r)$;

le critère de continuité des sommes de séries de fonctions continues nous livre que la fonction f est bien définie et continue sur $D(0, r)$.

La fonction S étant définie et continue sur chacun des ouverts $D(0, r)$, où $0 < r < R$, elle est définie et continue sur leur union $\bigcup_{r \in]0, R[} D(0, r) = D(0, R)$. □

Exemple 33. — Le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{z^n}{n!}$ est $+\infty$. D'après le corollaire 32, la fonction :

$$\exp \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C} \\ z \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} \end{array} \right.$$

est continue sur \mathbf{C} .

6. Théorème d'Abel radial

Exercice 34. — Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R \in \mathbf{R}_+^*$. On suppose que la série numérique $\sum_{n \geq 1} a_n R^n$ est absolument convergente.

1. Démontrer que la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} (z \mapsto a_n z^n)$ est normalement convergente sur $\overline{D(0, R)}$.
2. Justifier que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \xrightarrow{x \rightarrow R^-} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n R^n.$$

Théorème 35. — Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R \in \mathbf{R}_+^*$. On suppose que la série numérique $\sum a_n R^n$ est convergente (non nécessairement absolument convergente). Alors :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \xrightarrow{x \rightarrow R^-} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n R^n.$$

Éléments de démonstration. Nous établissons le résultat dans le cas où $R = 1$. Il s'agit alors de démontrer que la fonction :

$$f \left\{ \begin{array}{l}]-R, R[\longrightarrow \mathbf{C} \\ x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \end{array} \right.$$

tend vers $S := \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ lorsque x tend vers 1^- . Posons, $S_{-1} = 0$ et, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$:

$$S_n = \sum_{k=0}^n a_k$$

de sorte que $S := \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

- Une transformée d'Abel pour exprimer $f(x)$ à l'aide de S_n . — Soient $x \in [0, 1[$ et $N \in \mathbf{N}$. Par transformation d'Abel :

$$(*) \quad \sum_{n=0}^N a_n x^n = S_N x^N + (1-x) \sum_{n=0}^{N-1} S_n x^n.$$

De (*), on déduit que la série numérique $\sum S_n x^n$ converge et que :

$$(**) \quad f(x) = (1-x) \sum_{n=0}^{+\infty} S_n x^n .$$

• *Expression de $f(x) - S$ à l'aide de $S_n - S$.* — De (**), on déduit que :

$$(***) \quad f(x) - S = (1-x) \sum_{n=0}^{+\infty} (S_n - S)x^n .$$

• *Conclusion.* — Grâce à (***), on établit que :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \alpha \in]0, 1[\quad \forall x \in]1 - \alpha, 1[\quad |f(x) - S| \leq \varepsilon .$$

□

Exercice 36. —

- Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum \frac{(-1)^n}{2n+1} z^{2n+1}$.
- Expliciter la fonction :

$$f \left| \begin{array}{l}]-R, R[\longrightarrow \mathbf{R} \\ x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} . \end{array} \right.$$

- Démontrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$.

Exercice 37. —

- Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n$.
- Expliciter la fonction :

$$f \left| \begin{array}{l}]-R, R[\longrightarrow \mathbf{R} \\ x \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n . \end{array} \right.$$

- Démontrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln(2)$.

Exercice 38. — Soit $\theta \in]0, \pi[$ fixé.

- Démontrer que la série numérique $\sum \frac{\sin(n\theta)}{n}$ converge à l'aide d'une transformation d'Abel.
- Qu'en déduire pour le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{\sin(n\theta)}{n} z^n$?
- On rappelle que dans le chapitre « Suites et séries de fonctions 2 », nous avons démontré que :

$$\forall x \in [0, 1[\quad \arctan \left(\frac{x \sin(\theta)}{1 - x \cos(\theta)} \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n\theta)}{n} x^n .$$

Démontrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n\theta)}{n} = \frac{\pi - \theta}{2}$.

7. Régularité de la somme d'une série entière de la variable réelle

7.1. Caractère \mathcal{C}^∞ de la somme d'une série entière sur son intervalle ouvert de convergence

Théorème 39. — Soient $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et S la fonction définie par :

$$S \left| \begin{array}{l}]-R, R[\longrightarrow \mathbf{C} \\ x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n. \end{array} \right.$$

(a) La fonction S est de classe \mathcal{C}^∞ sur $] -R, R[$.

(b) Pour tout $p \in \mathbf{N}^*$, la série entière $\sum_{n \geq p} \frac{n!}{(n-p)!} a_n x^{n-p}$ a pour rayon de convergence R et :

$$\forall x \in]-R, R[\quad S^{(p)}(x) = \sum_{n=p}^{+\infty} \frac{n!}{(n-p)!} a_n x^{n-p}.$$

Exercice 40. — Déterminer le rayon R de la série entière $\sum_{n \geq 1} n x^{n-1}$ et démontrer que :

$$\forall x \in]-R, R[\quad \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Exercice 41. — Déterminer le rayon R de la série entière $\sum_{n \geq 1} n^2 x^n$ et démontrer que :

$$\forall x \in]-R, R[\quad \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 x^n = -\frac{x^2 + x}{(x-1)^3}.$$

7.2. Primitivation terme à terme de la somme d'une série entière sur son intervalle ouvert de convergence

Corollaire 42. — Soient $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et S la fonction définie par :

$$S \left| \begin{array}{l}]-R, R[\longrightarrow \mathbf{C} \\ x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n. \end{array} \right.$$

La série entière $\sum \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ a pour rayon de convergence R et :

$$\forall x \in]-R, R[\quad \int_0^x S(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}.$$

Exercice 43. — Déterminer le rayon R de la série entière $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n}$ et démontrer que :

$$\forall x \in]-R, R[\quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x).$$

Exercice 44. — Déterminer le rayon R de la série entière $\sum (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ et démontrer que :

$$\forall x \in]-R, R[\quad \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \arctan(x).$$

7.3. Coefficients d'une série entière versus nombres dérivées successifs

Corollaire 45. — Soient $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et S la fonction définie par :

$$S \left| \begin{array}{l}]-R, R[\longrightarrow \mathbf{C} \\ x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n. \end{array} \right.$$

Alors :

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad a_n = \frac{S^{(n)}(0)}{n!}$$

d'où le « développement de Taylor infini » suivant :

$$\forall x \in]-R, R[\quad S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{S^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

Exercice 46. — Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayon de convergence respectifs $R_a > 0$ et $R_b > 0$. On suppose que :

$$\exists \alpha \in]0, \min\{R_a, R_b\}[\quad \forall x \in]0, \alpha[\quad \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$$

Démontrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $a_n = b_n$.

8. Fonctions développables en séries entières, développements usuels

8.1. Définition d'une fonction développable en série entière

Définition 47. — Soit un réel $R \in]0, +\infty]$.

(a) Soient A une partie de \mathbf{C} contenant $D(0, R)$ et une fonction $f : A \longrightarrow \mathbf{C}$. On dit que f est développable en série entière sur $D(0, R)$ s'il existe une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence plus grand que R telle que :

$$\forall z \in D(0, R) \quad f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n.$$

(b) Soient A une partie de \mathbf{R} contenant $] -R, R[$ et une fonction $f : A \longrightarrow \mathbf{C}$. On dit que f est développable en série entière sur $] -R, R[$ s'il existe une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence plus grand que R telle que :

$$\forall x \in]-R, R[\quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Exercice 48. — Soient I un voisinage de 0 dans \mathbf{R} et $f : I \longrightarrow \mathbf{C}$ une fonction développable en série entière au voisinage de 0. Que dire de la fonction f si toutes les dérivées itérées s'annulent en 0 ?

8.2. Développements en série entière des fonctions \exp et $z \mapsto 1/(1-z)$

Exemple 49. — La fonction :

$$f \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C} \\ z \longmapsto \exp(z) \end{array} \right.$$

est développable en série entière sur \mathbf{C} et :

$$\forall z \in D(0, 1) \quad \exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} .$$

Exemple 50. — La fonction :

$$f \left\{ \begin{array}{l} D(0, 1) \longrightarrow \mathbf{C} \\ z \longmapsto \frac{1}{1-z} \end{array} \right.$$

est développable en série entière sur $D(0, 1)$ et :

$$\forall z \in D(0, 1) \quad f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n .$$

8.3. Condition nécessaire, suffisante pour qu’une fonction soit développable en série entière (HP)

Théorème 51. — Soient I un voisinage de 0 dans \mathbf{R} et $f : I \longrightarrow \mathbf{C}$ une fonction.

- (a) *Condition nécessaire.* — Si f est développable en série entière au voisinage de 0, alors f est de classe \mathcal{C}^∞ sur un voisinage de 0.
- (b) *Condition suffisante.* — S’il existe un réel $a > 0$ tel que :
 - (H1) f est définie et de classe \mathcal{C}^∞ sur $] -a, a[$;
 - (H2) $\exists M \in \mathbf{R} \quad \forall n \in \mathbf{N} \quad \forall x \in] -a, a[\quad |f^{(n)}(x)| \leq M \frac{n!}{a^n}$ (condition de croissance de Cauchy)
 alors f est développable en série entière au voisinage de 0.

Démonstration. Une somme de série entière étant de classe \mathcal{C}^∞ sur son intervalle ouvert de convergence, elle est de classe \mathcal{C}^∞ au voisinage de 0, d’où la condition nécessaire. Démontrons la condition suffisante et, pour ce faire, supposons qu’il existe un réel $a > 0$ vérifiant (H1) et (H2).

i) Fixons $x \in] -a, a[\setminus \{0\}$. D’après (H1), la fonction f est de classe \mathcal{C}^∞ sur $] -a, a[$. Nous pouvons lui appliquer la formule de Taylor avec reste intégral pour obtenir :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \underbrace{\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt}_{=:R_n(x)} .$$

ii) Soit $n \in \mathbf{N}$. Le changement de variable $t = ux$ nous permet d’écrire :

$$R_n(x) = x^{n+1} \int_0^1 \frac{(1-u)^n}{n!} f^{(n+1)}(ux) du .$$

Nous en déduisons que :

$$\begin{aligned}
 |R_n(x)| &\leq |x|^{n+1} \int_0^1 \frac{(1-u)^n}{n!} |f^{(n+1)}(ux)| \, du \\
 &\leq |x|^{n+1} \int_0^1 \frac{(1-u)^n}{n!} M \frac{(n+1)!}{a^{n+1}} \, du \quad [\text{d'après (H2)}] \\
 &\leq M \left| \frac{x}{a} \right|^{n+1} \underbrace{\int_0^1 (n+1)(1-u)^n \, du}_{=1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.
 \end{aligned}$$

Par théorème d'encadrement, $R_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

iii) D'après (i) et (ii) :

$$\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(x).$$

Donc la série numérique $\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ est convergente et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = f(x).$$

Ce résultat vaut également pour $x = 0$.

iv) Remarquons que, comme la série de fonctions $\sum \left(x \mapsto \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \right)$ converge simplement sur $] -a, a[$, le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ est supérieur ou égal à a .

□

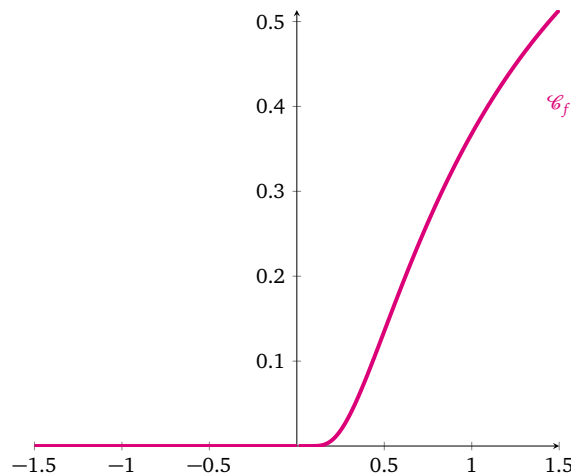
Remarque 52. — La condition nécessaire « f est de classe \mathcal{C}^∞ sur un voisinage de 0 » n'est pas suffisante. La fonction :

$$f \left| \begin{array}{l} \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} e^{-1/x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases} \end{array} \right.$$

est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbf{R} , mais n'est pas développable en série entière au voisinage de 0. En effet :

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad f^{(n)}(0) = 0 \quad [\text{fonction plate en } 0]$$

mais la fonction f n'est pas nulle au voisinage de 0.



8.4. Calcul d'un développement en série entière par dérivation ou primitivation terme à terme

Exercice 53. — Démontrer que la fonction :

$$f \left| \begin{array}{l}]-1, 1[\longrightarrow \mathbf{R} \\ x \longmapsto \frac{1}{(1-x)^2} \end{array} \right.$$

est DSE sur $] - 1, 1[$.

Exercice 54. — Démontrer que la fonction :

$$f \left| \begin{array}{l}]-1, 1[\longrightarrow \mathbf{R} \\ x \longmapsto \ln(1-x) \end{array} \right.$$

est DSE sur $] - 1, 1[$.

Exercice 55. — Démontrer que la fonction :

$$f \left| \begin{array}{l}]-1, 1[\longrightarrow \mathbf{R} \\ x \longmapsto \ln(1+x) \end{array} \right.$$

est DSE sur $] - 1, 1[$.

Exercice 56. — Démontrer que la fonction :

$$f \left| \begin{array}{l} \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} \\ x \longmapsto \arctan(x) \end{array} \right.$$

est DSE sur $] - 1, 1[$.

8.5. Calcul d'un développement en série entière à l'aide d'une équation différentielle

Exercice 57. — Soit $\alpha \in \mathbf{R}$. Déterminer le DSE au voisinage de 0 de la fonction :

$$f \left| \begin{array}{l}]-1, 1[\longrightarrow \mathbf{R} \\ x \longmapsto (1+x)^\alpha \end{array} \right.$$

en utilisant une équation différentielle.

8.6. Calcul d'un développement en série entière à l'aide d'un produit de Cauchy

Exercice 58. — Déterminer le DSE au voisinage de 0 de la fonction :

$$f \left| \begin{array}{l}]-1, 1[\longrightarrow \mathbf{R} \\ x \longmapsto \frac{\ln(1+x)}{1-x} \end{array} \right.$$

8.7. Table des développements en série entière usuels

Fonction	DSE	Rayon	Une démarche pour obtenir le DSE
$x \mapsto \frac{1}{1-x}$	$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$	1	Cf. résultats sur les séries géométriques.
$x \mapsto e^x$	$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$	$+\infty$	Solution du problème de Cauchy : $I = \mathbf{R}$, $y' = y$, $y(0) = 1$.
$x \mapsto \sin(x)$	$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$+\infty$	Partie imaginaire de la fonction $x \mapsto e^{ix}$ dont le DSE peut être obtenu par la substitution $x \leftarrow (ix)$ dans le DSE de la fonction $x \mapsto e^x$, en remarquant que $i^{2n} = (-1)^n$ et $i^{2n+1} = (-1)^n i$.
$x \mapsto \cos(x)$	$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$	$+\infty$	Partie réelle de la fonction $x \mapsto e^{ix}$ dont le DSE peut être obtenu par la substitution $x \leftarrow (ix)$ dans le DSE de la fonction $x \mapsto e^x$, en remarquant que $i^{2n} = (-1)^n$ et $i^{2n+1} = (-1)^n i$.
$x \mapsto \operatorname{sh}(x)$	$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$+\infty$	Partie impaire de la fonction $x \mapsto e^x$.
$x \mapsto \operatorname{ch}(x)$	$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$	$+\infty$	Partie paire de la fonction $x \mapsto e^x$.
$x \mapsto (1+x)^\alpha$	$1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (\alpha - k)}{n!} x^n$	1	Solution du problème de Cauchy : $I =]-1, 1[$, $(1+x)y' = \alpha y$, $y(0) = 1$.
$x \mapsto \ln(1+x)$	$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$	1	Intégration entre 0 et x du DSE de la fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x}$, qui peut être obtenu par la substitution $x \leftarrow (-x)$ dans le DSE de la fonction $x \mapsto \frac{1}{1-x}$.
$x \mapsto \arctan(x)$	$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$	1	Intégration entre 0 et x du DSE de la fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$, qui peut être obtenu par la substitution $x \leftarrow (-x^2)$ dans le DSE de la fonction $x \mapsto \frac{1}{1-x}$.

8.8. Quelques applications de la table des DSE usuels

Exercice 59. — Développer la fonction arcsin est développable en série entière au voisinage de 0 et que :

$$\forall x \in]-1, 1[\quad \arcsin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Exercice 60. — Développer la fonction $f : x \mapsto \frac{1+x^2}{1-x^2}$ en série entière au voisinage de 0, en précisant le rayon de convergence.

Exercice 61. — Développer la fonction $f : x \mapsto \frac{1+x}{(1-x)^2}$ en série entière au voisinage de 0, en précisant le rayon de convergence.

Exercice 62. — Développer la fonction $f : x \mapsto \frac{x}{(1-x)(1-2x)^2}$ en série entière au voisinage de 0, en précisant le rayon de convergence.

Exercice 63. — Développer la fonction $f : x \mapsto \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ en série entière au voisinage de 0, en précisant le rayon de convergence.

Exercice 64. — Exprimer la somme de série entière suivante :

$$S(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 x^n$$

à l'aide de fonctions usuelles, après avoir précisé son rayon de convergence.

Exercice 65. — Exprimer la somme de série entière suivante :

$$S(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n+1)(n+3)}$$

à l'aide de fonctions usuelles, après avoir précisé son rayon de convergence.

Exercice 66. — Exprimer la somme de série entière suivante :

$$S(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^3}{n!} x^n$$

à l'aide de fonctions usuelles, après avoir précisé son rayon de convergence.

Exercice 67. — Exprimer la somme de série entière suivante :

$$S(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{4n^2-1}$$

à l'aide de fonctions usuelles, après avoir précisé son rayon de convergence.