Fonctions vectorielles

1. Dérivabilité d'une fonction vectorielle en un point 2
1.1. Définition de la dérivabilité d'une fonction vectorielle en un point 2
1.2. Notation o de Landau pour les fonctions vectorielles 2
1.3. Caractérisation de la dérivabilité d'une fonction vectorielle par l'existence d'un DL1 3
1.4. La dérivabilité d'une fonction vectorielle implique la continuité 3
1.5. Dérivabilité et vecteur dérivé d'une fonction vectorielle via les fonctions coordonnées 3
1.6. Dérivabilité à droite et à gauche d'une fonction vectorielle 4
1.7. Définition de la fonction dérivée d'une fonction vectorielle dérivable sur un intervalle 4
2. Opérations sur les fonctions vectorielles dérivables 4
2.1. Combinaison linéaire de fonctions vectorielles dérivables 4
2.2. Composition d'une fonction vectorielle dérivable par une application linéaire 4
2.3. Composition de fonctions vectorielles dérivables par une application bilinéaire 6
2.4. Composition de fonctions vectorielles dérivables par une application multilinéaire 7
2.5. Ccomposition d'une fonction numérique dérivable par une fonction vectorielle dérivable 8
3. Fonctions vectorielles de classe $\mathscr{C}^k$ 8
3.1. Définition d'une fonction vectorielle de classe $\mathscr{C}^k$ 8
3.2. Caractère $\mathscr{C}^k$ d'une fonction vectorielle via les fonctions coordonnées 9
3.3. Combinaison linéaire de fonctions vectorielles dérivables de classe $\mathscr{C}^k$ 9
3.4. Formule de Leibniz pour les fonctions vectorielles 9
4. Fonctions vectorielles continues par morceaux sur un segment 10
4.1. Définition d'une fonction vectorielle continue par morceaux 10
4.2. Continue par morceaux d'une fonction vectorielle via les fonctions coordonnées 10
4.3. Combinaison linéaire de fonctions vectorielles continues par morceaux 10
5. Intégration d'une fonction vectorielle continue par morceaux sur un segment 10
5.1. Lemme clé pour la définition de l'intégrale d'une fonction vectorielle c.p.m. sur un segment 11
5.2. Définition de l'intégrale d'une fonction vectorielle continue par morceaux sur un segment 11
5.3. Sommes de Riemann pour une fonction vectorielle continue par morceaux 12
5.4. Propriétés de l'intégrale des fonctions vectorielles continues par morceaux 13
6. Intégrale fonction de sa borne supérieure 13
6.1. Théorème fondamental de l'analyse pour les fonctions vectorielles continues 13
6.2. Théorème d'intégration par parties pour les fonctions vectorielles de classe $\mathscr{C}^1$ 14
6.3. Inégalité des accroissements finis pour une fonction vectorielle de classe $\mathscr{C}^1$ sur un segment 15
7. Formules de Taylor 15
7.1. Formule de Taylor avec reste intégral 15
7.2. Inégalité de Taylor-Lagrange 15
7.3. Formule de Taylor-Young 16

Notation. — Dans tout le document

- la lettre $\mathbf{K}$ désigne le corps $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$;
- $(E, ||\cdot||)$ est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie ;
- $\cdot$ désigne la multiplication d'un vecteur de E par un scalaire de $\mathbf{K}$ (par la gauche) ;
- I est un intervalle de $\mathbf{R}$ d'intérieur non vide.

1. Dérivabilité d'une fonction vectorielle en un point

1.1. Définition de la dérivabilité d'une fonction vectorielle en un point

Définition 1. — *Soient $f \in E^I$ et $a \in I$.*

(a) *On dit que f est dérivable en a s'il existe $\ell \in E$ tel que :*

$$\frac{f(t)-f(a)}{t-a} \xrightarrow[t\to a]{} \ell \ .$$

(b) *Si ce vecteur ℓ existe, il est unique. On le note $f'(a)$ et on le nomme vecteur dérivé de f en a.*

Remarque 2. — Nous conservons les notations de la précédente définition. Si la fonction f donne la position d'un objet en fonction du temps, alors sa dérivée est le vecteur vitesse.

Remarque 3. — Comme toutes les normes sont équivalentes sur E, les notions de dérivabilité et de vecteur dérivé ne dépendent par de la norme choisie sur E.

Exemple 4. — La fonction :

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R}^2 \\ t & \longmapsto & (\cos(t), \sin(t)) \end{array} \right.$$

est dérivable sur $\mathbf{R}$ et, pour tout $a \in \mathbf{R}$, $f'(a) = (-\sin(a), \cos(a))$.

1.2. Notation o de Landau pour les fonctions vectorielles

Définition 5. — *Soient $a \in I$, $\varphi \in \mathbf{R}^I$ et $f, g \in E^I$.*

(a) *On dit que le vecteur $f(t)$ de E est un o de $\varphi(t)$ lorsque t tend vers a, et on écrit $f(t) \underset{t\to a}{=} o(\varphi(t))$, si :*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists r > 0 \quad \forall t \in \underbrace{I \cap (\,]a-r, a[\cup]a, a+r[\,)}_{\text{voisinage épointé de } a} \quad ||f(t)|| \leqslant \varepsilon\, |\varphi(t)| \ .$$

(b) *On écrit $f(t) \underset{t\to a}{=} g(t) + o(\varphi(t))$, si $f(t) - g(t) \underset{t\to a}{=} o(\varphi(t))$, i.e. si :*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists r > 0 \quad \forall t \in \underbrace{I \cap (\,]a-r, a[\cup]a, a+r[\,)}_{\text{voisinage épointé de } a} \quad ||f(t)-g(t)|| \leqslant \varepsilon\, |\varphi(t)| \ .$$

Remarque 6. — On conserve les notations de la définition 5. Si la fonction φ ne s'annule pas sur un voisinage épointé de a alors :

$$f(t) \underset{t\to a}{=} o(\varphi(t)) \iff \frac{f(t)}{\varphi(t)} \xrightarrow[t\to a]{} 0_E$$

et :

$$f(t) \underset{t\to a}{=} g(t) + o(\varphi(t)) \iff \frac{f(t)-g(t)}{\varphi(t)} \xrightarrow[t\to a]{} 0_E \ .$$

1.3. Caractérisation de la dérivabilité d'une fonction vectorielle par l'existence d'un DL1

Proposition 7. — *Soient $f \in E^I$ et $a \in I$.*

(a) *Si la fonction f est dérivable en a, alors f possède le développement limité à l'ordre 1 en a suivant :*

$$f(t) \underset{t\to a}{=} f(a) + (t-a)\cdot f'(a) + o(t-a)\ .$$

(b) *Si f admet un développement limité à l'ordre 1 en a, i.e. :*

$$\exists (\alpha_0, \alpha_1) \in E^2 \quad f(t) \underset{t\to a}{=} \alpha_0 + (t-a)\cdot\alpha_1 + o(t-a) \qquad [DL_1(a) \text{ de la fonction } f]$$

alors $f(a) = \alpha_0$, f est dérivable en a et $f'(a) = \alpha_1$.

1.4. La dérivabilité d'une fonction vectorielle implique la continuité

Proposition 8. — *Soient $f \in E^I$ et $a \in I$. Alors :*

$$f \text{ est dérivable en } a \implies f \text{ est continue en } a$$

1.5. Dérivabilité et vecteur dérivé d'une fonction vectorielle via les fonctions coordonnées

Rappel 9. — Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E. La famille $\left(e_1^*, \dots, e_n^*\right)$ de formes linéaires sur E définies par :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \quad e_i^*(e_j) = \delta_{i,j}$$

est une base de $E^* := \mathscr{L}(E, \mathbf{K})$, appelée base duale de E. Elle permet d'exprimer les coordonnées d'un vecteur de E dans la base $(e_1, \dots, e_n)$:

$$\forall\, x \in E \quad x = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{e_i^*(x)}_{\text{scalaire}} \cdot e_i \qquad \left[e_i^*(x) \text{ est la } i\text{-ième coordonnée de } x \text{ dans la base } (e_1, \dots, e_n)\right].$$

Théorème 10. — *Soient $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E, $f \in E^I$ et $a \in I$.*

(a) *La fonction vectorielle f est dérivable en a si et seulement si, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, la fonction scalaire $e_i^* \circ f \in \mathbf{R}^I$ est dérivable en a ;*

(b) *Si la fonction vectorielle f est dérivable en a, alors*

$$f'(a) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\left(e_i^* \circ f\right)'(a)}_{\text{scalaire}} \cdot e_i$$

Exercice 11. — Soit la fonction :

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R}^2 \\ t & \longmapsto & \left(t^3 - t^2 + 1, t^4 + 7t\right). \end{array} \right.$$

Démontrer que, pour tout $a \in \mathbf{R}$, f est dérivable en a et calculer $f'(a)$.

Exercice 12. — Soit la fonction :

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathscr{M}_2(\mathbf{R}) \\ t & \longmapsto & \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}. \end{array} \right.$$

Démontrer que, pour tout $a \in \mathbf{R}$, f est dérivable en a et calculer $f'(a)$.

1.6. Dérivabilité à droite et à gauche d'une fonction vectorielle

Définition 13. — *Soient $f \in E^I$ et $a \in I$.*

(a) *On dit que f est dérivable en a à droite s'il existe $\delta \in E$ tel que :*

$$\frac{f(t)-f(a)}{t-a} \xrightarrow[t\to a^+]{} \delta\,.$$

Si ce vecteur δ existe, il est unique. On le note $f'_d(a)$ et on le nomme vecteur dérivé à droite de f en a.

(b) *On dit que f est dérivable en a à gauche s'il existe $\lambda \in E$ tel que :*

$$\frac{f(t)-f(a)}{t-a} \xrightarrow[t\to a^-]{} \lambda\,.$$

Si ce vecteur λ existe, il est unique. On le note $f'_g(a)$ et on le nomme vecteur dérivé à gauche de f en a.

1.7. Définition de la fonction dérivée d'une fonction vectorielle dérivable sur un intervalle

Notation. — L'ensemble des fonctions de I dans E qui sont dérivables en tout point de I est noté $\mathscr{D}(I,E)$.

Définition 14. — *La fonction dérivée d'une fonction $f \in \mathscr{D}(I,E)$, est définie par :*

$$f' \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & E \\ t & \longmapsto & f'(t)\,. \end{array} \right.$$

2. Opérations sur les fonctions vectorielles dérivables

2.1. Combinaison linéaire de fonctions vectorielles dérivables

Proposition 15. — *L'ensemble $\mathscr{D}(I,E)$ est un sous-espace vectoriel de E^I et l'application :*

$$\left| \begin{array}{ccc} \mathscr{D}(I,E) & \longrightarrow & E^I \\ f & \longmapsto & f' \end{array} \right.$$

est linéaire.

2.2. Composition d'une fonction vectorielle dérivable par une application linéaire

Proposition 16. — *Soient $(F, \|\cdot\|_F)$ un $\mathbf{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie et $L \in \mathscr{L}(E,F)$. Alors pour tout fonction $f \in \mathscr{D}(I,E)$, $L \circ f \in \mathscr{D}(I,F)$ et :*

$$\forall\, t \in I \quad (L\circ f)'(t) = L\left(f'(t)\right)$$

i.e. $(L\circ f)' = L \circ f'$.

Démonstration. Soient $a \in I$ et $t \in I$. D'après la proposition 7 :

$$f(x) = f(a) + (t-a)\cdot f'(a) + (t-a)\,\varepsilon(t-a)$$

où $\varepsilon(t-a) \xrightarrow[t\to a]{} 0_E$. On a donc :

$$L\circ f(t) = L\left(f(a) + (t-a)\cdot f'(a) + (t-a)\cdot \varepsilon(t-a)\right) = L(f(a)) + (t-a)\cdot L(f'(a)) + (t-a)\cdot L(\varepsilon(t-a))\,.$$

Comme E est de dimension finie, F est continue, d'où :

$$L(\varepsilon(t-a)) \xrightarrow[t\to a]{} 0_F \ .$$

et donc $(t-a)\cdot L(\varepsilon(t-a)) \underset{t\to a}{=} o(t-a)$. Ainsi, $L\circ f$ possède un DL en a à l'ordre 1 :

$$L\circ f(t) \underset{t\to a}{=} L(f(a)) + (t-a)\cdot L(f'(a)) + o(t-a) \ .$$

D'après la proposition 7, $L\circ f$ est dérivable en a et $(L\circ f)'(a) = L\circ f'(a)$. □

Exercice 17. — Soient $(f_1,\dots,f_n)\in\mathscr{D}(I,\mathbf{R})^n$ et $P\in\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$. Démontrer que l'application :

$$g\left|\begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R}) \\ t & \longmapsto & P\begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t)\end{pmatrix}\end{array}\right.$$

est dérivable sur I et exprimer, pour tout $t\in I$, $g'(t)$ en fonction de $f_1'(t),\dots,f_n'(t)$ et P.

Exercice 18. — Considérons la matrice $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$ et le système différentiel linéaire :

$$(S)\ :\ X'=AX$$

d'inconnue $X\in\mathscr{D}^1\left(\mathbf{R},\mathscr{M}_{2,1}(\mathbf{R})\right)$.

1. Déterminer une matrice $P\in\mathbf{GL}_2(\mathbf{R})$ telle que $A=PDP^{-1}$, où $D:=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}$.
2. Résoudre le système différentiel linéaire :
$$(S')\ :\ Y'=DY$$
d'inconnue $Y\in\mathscr{D}^1\left(\mathbf{R},\mathscr{M}_{2,1}(\mathbf{R})\right)$.
3. En déduire l'ensemble solution de (S).

Exercice 19. — Considérons la matrice $A=\begin{pmatrix}4 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ et le système différentiel linéaire :

$$(S)\ :\ X'=AX$$

d'inconnue $X\in\mathscr{D}^1\left(\mathbf{R},\mathscr{M}_{2,1}(\mathbf{R})\right)$.

1. Déterminer une matrice $P\in\mathbf{GL}_2(\mathbf{R})$ telle que $A=PTP^{-1}$, où $T:=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 0 & 3\end{pmatrix}$.
2. Résoudre le système différentiel linéaire :
$$(S')\ :\ Y'=TY$$
d'inconnue $Y\in\mathscr{D}^1\left(\mathbf{R},\mathscr{M}_{2,1}(\mathbf{R})\right)$.
3. En déduire l'ensemble solution de (S).

2.3. Composition de fonctions vectorielles dérivables par une application bilinéaire

Proposition 20. — *Soient $(F,\|\cdot\|_F)$, $(G,\|\cdot\|_G)$ deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels normés de dimension finie, $f\in\mathscr{D}(I,E)$, $g\in\mathscr{D}(I,F)$ et $B\colon E\times F\longrightarrow G$ une application bilinéaire. Alors l'application $B(f,g)$ définie par :*

$$B(f,g)\left|\begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & G \\ t & \longmapsto & B\left(f(t),g(t)\right)\end{array}\right.$$

est dérivable sur I et :

$$\forall\, t\in I\quad B(f,g)'(t)=B\left(f'(t),g(t)\right)+B\left(f(t),g'(t)\right)\,.$$

Démonstration. Soient $a\in I$ et $t\in T$. Alors d'après la proposition 7 :

$$f(t)=f(a)+(t-a)\cdot f'(a)+(t-a)\cdot\varepsilon_1(t-a)\quad\text{et}\quad g(t)=g(a)+(t-a)\cdot g'(a)+(t-a)\cdot\varepsilon_2(t-a)$$

où $\varepsilon_1(t-a)\xrightarrow[t\to a]{}0_E$ et $\varepsilon_2(t-a)\xrightarrow[t\to a]{}0_F$. Alors :

$$\begin{aligned} B(f(t),g(t)) &= B\left(f(a)+(t-a)\cdot f'(a)+(t-a)\cdot\varepsilon_1(t-a)\,,\ g(a)+(t-a)\cdot g'(a)+(t-a)\cdot\varepsilon_2(t-a)\right)\\ &= B\left(f(a),g(a)\right)+(t-a)\cdot\left[B\left(f'(a),g(a)\right)+B\left(f(a),g'(a)\right)\right]+(t-a)\cdot\varepsilon(t-a)\,.\end{aligned}$$

où $\varepsilon(t-a):=B(\varepsilon_1(t-a),g(t))+B(f(t),\varepsilon_2(t-a))$. Comme E et F sont de dimensions finies, l'application B est continue. Ainsi :

$$\exists\, C>0\quad\forall\,(u,v)\in E\times F\quad \|B(u,v)\|_G\leqslant C\,\|u\|_E\,\|v\|_F$$

d'où :

$$0\leqslant\|\varepsilon(t-a)\|_G\leqslant M\left[\,\|\varepsilon_1(t-a)\|_E\,\|g(t)\|_F+\|f(t)\|_E\,\|\varepsilon_2(t-a)\|_F\,\right].$$

Ainsi, comme f et g sont bornées au voisinage de a (puisque continues en a), $\varepsilon(t-a)\xrightarrow[t\to a]{}0$. Donc $B(f,g)$ admet le $DL_1(a)$:

$$B(f(t),g(t))\underset{t\to a}{=}B\left(f(a),g(a)\right)\ +\ (t-a)\cdot\left[B\left(f'(a),g(a)\right)+B\left(f(a),g'(a)\right)\right]+o(t-a)$$

D'après la proposition 7, $B(f,g)$ est dérivable en a et $(B(f,g))'(a)=B(f'(a),g(a))+B(f(a),g'(a))$. □

Remarque 21. — Les résultats des propositions 16 et 20 restent vrais, si l'on remplace « dérivable » par « de classe $\mathscr{C}^1$ ».

Exemple 22. — Supposons E muni d'un $\mathbf{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ et considérons $(f,g)\in\mathscr{D}(I,E)^2$. Alors l'application :

$$\langle f\,,\,g\rangle\left|\begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & \langle f(t),\,g(t)\rangle\end{array}\right.$$

est dérivable sur I et :

$$\forall\, t\in I\quad\langle f\,,\,g\rangle'(t)=\left\langle f'(t),\,g(t)\right\rangle+\left\langle f(t),\,g'(t)\right\rangle\,.$$

Exercice 23. — Supposons E muni d'un $\mathbf{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ et notons $\|\cdot\|_2$ la norme associée. Soit $f\in\mathscr{D}(I,E)$ telle que :

$$\forall t\in I\qquad\|f(t)\|_E=1\,.$$

En d'autres termes, f prend ses valeurs sur la sphère unité de $(E,\|\cdot\|_2)$. Démontrer que, pour tout $t\in I$, les vecteurs $f(t)$ et $f'(t)$ sont orthogonaux.

2.4. Composition de fonctions vectorielles dérivables par une application multilinéaire

Proposition 24. — *Soient* $\left(E_1, ||\cdot||_{E_1}\right), \ldots, \left(E_n, ||\cdot||_{E_n}\right), (G, ||\cdot||_G)$ *des* $\mathbf{K}$*-espaces vectoriels normés de dimension finie,* $f_1 \in \mathscr{D}(I, E_1), \ldots, f_n \in \mathscr{D}(I, E_n)$ *et :*

$$M : E_1 \times \ldots \times E_n \longrightarrow F$$

une application n-linéaire. Alors l'application $M(f_1, \ldots, f_n)$ *définie par :*

$$M(f_1, \ldots, f_n) \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & F \\ t & \longmapsto & M\left(f_1(t), \ldots, f_n(t)\right) \end{array} \right.$$

est dérivable sur I *et, pour tout* $t \in I$ *:*

$$M(f_1, \ldots, f_n)'(t) = \left\{ \begin{array}{ll} & M\left(f_1'(t), f_2(t), f_3(t), \ldots, f_n(t)\right) \\ + & M\left(f_1(t), f_2'(t), f_3(t), \ldots, f_n(t)\right) \\ + & \ldots \\ + & M\left(f_1(t), f_2(t), f_3(t), \ldots, f_n'(t)\right) . \end{array} \right.$$

Exemple 25. — Soit une application :

$$f \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathscr{M}_n(\mathbf{R}) \\ t & \longmapsto & f(t) = \left(a_{i,j}(t)\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} = \underbrace{(C_1(t), \ldots, C_n(t))}_{\text{vecteurs colonnes de la matrice } f(t)} \end{array} \right.$$

dérivable sur I. Alors l'application :

$$\det(f) \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & \det(f(t)) = \det\left(\left(a_{i,j}(t)\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}\right) = \det\left(C_1(t), \ldots, C_n(t)\right) \end{array} \right.$$

est dérivable sur I et pour tout $t \in I$:

$$\det(f)'(t) = \left\{ \begin{array}{ll} & \det\left(C_1'(t), C_2(t), C_3(t), \ldots, C_n(t)\right) \\ + & \det\left(C_1(t), C_2'(t), C_3(t), \ldots, C_n(t)\right) \\ + & \ldots \\ + & \det\left(C_1(t), C_2(t), C_3(t), \ldots, C_n'(t)\right) . \end{array} \right.$$

Exercice 26. — Soient $n \in \mathbf{N}^*$ et $(x, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbf{R}^{n+1}$. Calculer le déterminant de la matrice :

$$\begin{pmatrix} a_1 + x & x & \ldots & \ldots & x \\ x & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & x \\ x & \ldots & \ldots & x & a_n + x \end{pmatrix} .$$

Exercice 27. — Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Considérons une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ et l'application :

$$\varphi \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & \det(I_n + tA) . \end{array} \right.$$

Démontrer que φ est dérivable sur $\mathbf{R}$ et calculer $\varphi'(0)$.

2.5. Ccomposition d'une fonction numérique dérivable par une fonction vectorielle dérivable

Proposition 28. — *Soient $f \in \mathscr{D}(I,E)$, J un intervalle de $\mathbf{R}$ et $\varphi \in \mathscr{D}(J,\mathbf{R})$ telle que $\varphi(J) \subset I$. Alors l'application $f \circ \varphi$ est dérivable sur J et :*

$$\forall\, t \in J \quad (f\circ\varphi)'(t) = \varphi'(t)\cdot f'(\varphi(t))\,.$$

Démonstration. Soit $b \in J$. Comme la fonction φ est dérivable en a et la fonction f est dérivable en $\varphi(a)$:

$$\varphi(t) = \varphi(a) + (t-a)\cdot\varphi'(a) + (t-a)\cdot\varepsilon_1(t)$$

et :

$$f(x) = f(\varphi(a)) + (x-\varphi(a))\cdot f'(\varphi(a)) + (x-\varphi(a))\cdot\varepsilon_2(x)$$

où $\varepsilon_1(t) \xrightarrow[t\to a]{} 0_{\mathbf{R}}$ et $\varepsilon_2(x) \xrightarrow[x\to\varphi(a)]{} 0_E$.
Ainsi :

$$f(\varphi(t)) = f(\varphi(a)) + ((t-a)\cdot\varphi'(a) + (t-a)\cdot\varepsilon_1(t))\cdot f'(\varphi(a)) + ((t-a)\cdot\varphi'(a) + (t-a)\cdot\varepsilon_1(t))\cdot\varepsilon_2(\varphi(t))$$

que l'on peut réécrire :

$$f(\varphi(t)) = \left\{\begin{array}{ll} & f(\varphi(a)) \\ + & (t-a)\cdot\big(\varphi'(a)\cdot f'(\varphi(a))\big) \\ + & (t-a)\cdot\underbrace{\big(((t-a)\cdot\varepsilon_1(t))\cdot f'(\varphi(a)) + (\varphi'(a)+\varepsilon_1(t))\cdot\varepsilon_2(\varphi(t))\big)}_{:=\varepsilon(t)}\,. \end{array}\right.$$

Clairement $(t-a)\cdot\varepsilon_1(t))\cdot f'(\varphi(a)) \xrightarrow[t\to a]{} 0_E$ et, comme φ est continue en a, $(\varphi'(a)+\varepsilon_1(t))\cdot\varepsilon_2(\varphi(t)) \xrightarrow[t\to a]{} 0_E$.
Par conséquent, $\varepsilon(t) \xrightarrow[t\to a]{} 0_E$.
Nous en déduisons que $f\circ\varphi$ est dérivable en a et que $(f\circ\varphi)'(a) = \varphi'(a)\cdot f'(\varphi(a))$.

□

3. Fonctions vectorielles de classe $\mathscr{C}^k$

3.1. Définition d'une fonction vectorielle de classe $\mathscr{C}^k$

Définition 29. — *Soit $f \in E^I$.*

(a) *L'application f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I si f est dérivable sur I et si sa dérivée f' est continue sur I.*

(b) *Soit un entier $k \geqslant 2$. L'application f est de classe $\mathscr{C}^k$ sur I si f est dérivable sur I et si sa dérivée f' est de classe $\mathscr{C}^{k-1}$ sur I.*

(c) *L'application f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I si f est de classe $\mathscr{C}^k$ sur I, pour tout $k \in \mathbf{N}^*$.*

Notation. — Pour tout $k \in [\![1,+\infty]\!]$, on pose :

$$\mathscr{C}^k(I,E) := \big\{f \in E^I \ :\ f \text{ est de classe } \mathscr{C}^k \text{ sur } I\big\}$$

et pour tout $f \in \mathscr{C}^k(I,E)$:

$$f^{(2)} = \big(f'\big)' \quad , \quad f^{(3)} = \big(f^{(2)}\big)' \quad , \quad \dots \quad , \quad f^{(\ell+1)} = \big(f^{(\ell)}\big)' \quad , \quad \dots \quad , \quad f^{(k)} = \big(f^{(k-1)}\big)'\,.$$

3.2. Caractère $\mathscr{C}^k$ d'une fonction vectorielle via les fonctions coordonnées

Proposition 30. — *Soient $f \in E^I$ et $k \in [\![1, +\infty]\!]$.*

(a) *f est de classe $\mathscr{C}^k$ sur I si et seulement si, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $e_i^* \circ f \in \mathscr{C}^k(I, \mathbf{K})$.*

(b) *Si f est de classe $\mathscr{C}^k$ sur I alors :*

$$\forall \ell \in [\![1,k]\!] \quad \forall t \in I \quad f^{(\ell)}(t) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\left(e_i^* \circ f\right)^{(\ell)}(t)}_{scalaire} \cdot e_i \, .$$

***Exercice 31.* —** Soit la fonction :

$$f \left| \begin{array}{ccc} [0, 2\pi] & \longrightarrow & \mathbf{R}^2 \\ t & \longmapsto & (2\sin(t) + \sin(2t)) \, , \, -2\cos(t) - \cos(2t)) \end{array} \right. .$$

Démontrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[0, 2\pi]$ et calculer sa dérivée seconde.

3.3. Combinaison linéaire de fonctions vectorielles dérivables de classe $\mathscr{C}^k$

Proposition 32. — *Pour tout $k \in [\![1, +\infty]\!]$, l'ensemble $\mathscr{C}^k(I, E)$ est un sous-espace vectoriel de E^I.*

3.4. Formule de Leibniz pour les fonctions vectorielles

Proposition 33. — *Soient $(F, ||\cdot||_F)$, $(G, ||\cdot||_G)$ deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels normés de dimension finie, $B : E \times F \longrightarrow G$ une application bilinéaire, $k \in \mathbf{N}^*$, $f \in \mathscr{C}^k(I, E)$ et $g \in \mathscr{C}^k(I, F)$, où $k \in \mathbf{N}^*$. L'application :*

$$B(f,g) \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & G \\ t & \longmapsto & B\left(f(t), g(t)\right) \end{array} \right.$$

est de classe $\mathscr{C}^k$ sur I et :

$$\forall t \in I \quad B(f,g)^{(k)}(t) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} B\left(f^{(i)}(t), g^{(k-i)}(t)\right) \, .$$

Démonstration. Nous raisonnons par récurrence sur l'entier $k \in \mathbf{N}^*$.

- *Initialisation à $n = 1$.* — Il s'agit précisément du résultat de la proposition 20.
- *Hérédité.* — Supposons le résultat vrai pour un $k \in \mathbf{N}^*$ fixé et démontrons qu'il est encore vrai pour $k+1$.
  Soit $(f, g) \in \mathscr{C}^{k+1}(I, E) \times \mathscr{C}^{k+1}(I, F)$.
  Alors, comme $(f, g) \in \mathscr{C}^k(I, E) \times \mathscr{C}^k(I, F)$, l'hypothèse de récurrence assure que $B(f, g)$ est de classe $\mathscr{C}^k$ sur I et :
  $$\forall t \in I \quad B(f,g)^{(k)}(t) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} B\left(f^{(i)}(t), g^{(k-i)}(t)\right). \tag{1}$$
  Soit $i \in [\![0, k]\!]$. Les fonctions $f^{(i)}$ et $g^{(k-i)}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur I. D'après la proposition 20, la fonction $B\left(f^{(i)}, g^{(k-i)}\right)$ est donc également de classe $\mathscr{C}^1$ sur I.
  La fonction $[B(f, g)]^{(k)}$ est de classe $\mathscr{C}^1$, comme combinaison linéaire de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$. Ainsi $B(f, g)$ est de classe $\mathscr{C}^{k+1}$ sur I.
  Grâce à (1) et à la proposition 20, nous calculons, pour tout $t \in I$:
  $$B(f,g)^{(k+1)}(t) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \cdot \left[B\left(f^{(i+1)}(t), g^{(k-i)}(t)\right) + B\left(f^{(i)}(t), g^{(k+1-i)}(t)\right)\right]$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^{k+1} \binom{k}{j-1} \cdot B\left(f^{(j)}(t), g^{(k+1-j)}(t)\right) + \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \cdot B\left(f^{(i)}(t), g^{(k+1-i)}(t)\right) \\
&= \sum_{j=0}^{k+1} \binom{k}{j-1} \cdot B\left(f^{(j)}(t), g^{(k+1-j)}(t)\right) + \sum_{i=0}^{k+1} \binom{k}{i} \cdot B\left(f^{(i)}(t), g^{(k+1-i)}(t)\right) \\
&= \sum_{i=0}^{k+1} \left(\binom{k}{i-1} + \binom{k}{i} \right) \cdot B\left(f^{(j)}(t), g^{(k+1-j)}(t)\right) \\
&= \sum_{i=0}^{k+1} \binom{k+1}{i} \cdot B\left(f^{(i)}(t), g^{(k+1-i)}(t)\right) \qquad \text{[relation de Pascal]} .
\end{aligned}
$$

□

4. Fonctions vectorielles continues par morceaux sur un segment

Notation. — $[a,b]$ désigne un segment de $\mathbf{R}$ $(a<b)$.

4.1. Définition d'une fonction vectorielle continue par morceaux

Définition 34. — *Une fonction $f \in E^{[a,b]}$ est dite continue par morceaux sur le segment $[a,b]$ s'il existe une subdivision :*

$$a_0 = a < a_1 < \ldots < a_p = b$$

du segment $[a,b]$ telle que, pour tout $i \in [\![0, p-1]\!]$, la restriction de f à $]a_i, a_{i+1}[$ est prolongeable en une fonction continue sur le segment $[a_i, a_{i+1}]$.

4.2. Continue par morceaux d'une fonction vectorielle via les fonctions coordonnées

Proposition 35. — *Une fonction $f \in E^{[a,b]}$ est continue par morceaux sur $[a,b]$ si et seulement si, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $e_i^* \circ f \in \mathscr{CM}([a,b], \mathbf{K})$.*

4.3. Combinaison linéaire de fonctions vectorielles continues par morceaux

Proposition 36. — *L'ensemble :*

$$\mathscr{CM}([a,b],E) := \left\{ f \in E^{[a,b]} \ : \ f \text{ est continue par morceaux sur } [a,b] \right\}$$

un sous-espace vectoriel de $E^{[a,b]}$.

Remarque 37. — Soient c,d des éléments de $[a,b]$ tels que $c<d$. et $f \in \mathscr{CM}([a,b],E)$. Alors :

$$f_{|[c,d]} \left| \begin{array}{ccc} [c,d] & \longrightarrow & E \\ t & \longmapsto & f(t) \end{array} \right.$$

est continue par morceaux sur $[c,d]$.

5. Intégration d'une fonction vectorielle continue par morceaux sur un segment

Notation. — $[a,b]$ désigne un segment de $\mathbf{R}$ $(a<b)$.

5.1. Lemme clé pour la définition de l'intégrale d'une fonction vectorielle c.p.m. sur un segment

Lemme 38. — *Soient $f \in \mathscr{CM}([a,b],E)$, $\underline{e}=(e_1,\dots,e_n)$, $\underline{u}=(u_1,\dots,u_n)$ deux bases de E et $\left(e_1^*,\dots,e_n^*\right)$, $\left(u_1^*,\dots,u_n^*\right)$ leurs bases duales. Alors :*

$$\sum_{i=1}^{n} \underbrace{\left(\int_a^b e_i^* \circ f(t)\,\mathrm{d}t\right)}_{\text{élément de } \mathbf{K}} \cdot e_i = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\left(\int_a^b u_i^* \circ f(t)\,\mathrm{d}t\right)}_{\text{élément de } \mathbf{K}} \cdot u_i$$

où, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $\displaystyle\int_a^b e_i^* \circ f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^b u_i^* \circ f(t)\,\mathrm{d}t$ sont les intégrales des fonctions $e_i^* \circ f \in \mathscr{CM}([a,b],\mathbf{R})$ et $u_i^* \circ f \in \mathscr{CM}([a,b],\mathbf{R})$, construites en MP2I.

Démonstration. Nous démontrons l'égalité entre :

$$I_{\underline{e}}(f) := \sum_{i=1}^{n}\left(\int_a^b e_i^* \circ f(t)\,\mathrm{d}t\right)\cdot e_i \qquad \text{et} \qquad I_{\underline{u}}(f) := \sum_{j=1}^{n}\left(\int_a^b u_j^* \circ f(t)\,\mathrm{d}t\right)\cdot u_j\,.$$

$$\begin{aligned}
I_{\underline{e}}(f) &:= \sum_{i=1}^{n}\left(\int_a^b e_i^*(f(t))\,\mathrm{d}t\right)\cdot e_i \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(\int_a^b e_i^*\left(\sum_{j=1}^{n} u_j^*(f(t))\cdot u_j\right)\mathrm{d}t\right)\cdot e_i && \left[\text{décomposition du vecteur } f(t) \text{ dans la base } \underline{u}\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(\int_a^b \left(\sum_{j=1}^{n} u_j^*(f(t)) \times_{\mathbf{K}} e_i^*(u_j)\right)\mathrm{d}t\right)\cdot e_i && \left[\text{linéarité de } e_i^*\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(e_i^*(u_j) \times_{\mathbf{K}} \int_a^b u_j^*(f(t))\,\mathrm{d}t\right)\cdot e_i && [\text{linéarité de l'intégrale d'une fonction à valeurs réelles}] \\
&= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\left(\int_a^b u_j^*(f(t))\,\mathrm{d}t\right)\times_{\mathbf{K}} e_i^*(u_j)\right)\cdot e_i && [\text{commutativité de la multiplication dans } \mathbf{K}] \\
&= \sum_{j=1}^{n}\left(\int_a^b u_j^*(f(t))\,\mathrm{d}t\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^{n} e_i^*(u_j)\cdot e_j\right) && [\text{axiome de la structure d'espace vectoriel}] \\
&= \sum_{j=1}^{n}\left(\int_a^b u_j^*(f(t))\,\mathrm{d}t\right)\cdot u_j && \left[\text{décomposition du vecteur } u_j \text{ dans la base } \underline{e}\right] \\
&=: I_{\underline{u}}(f)
\end{aligned}$$

□

5.2. Définition de l'intégrale d'une fonction vectorielle continue par morceaux sur un segment

Définition 39. — *Soit $f \in \mathscr{CM}([a,b],E)$. L'intégrale de f sur $[a,b]$ est le vecteur de E défini par*

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t := \sum_{i=1}^{n}\left(\int_a^b e_i^* \circ f(t)\,\mathrm{d}t\right)\cdot e_i$$

où, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $\displaystyle\int_a^b e_i^* \circ f(t)\,\mathrm{d}t$ est l'intégrale de la fonction $e_i^* \circ f \in \mathscr{CM}([a,b],\mathbf{R})$, construite en MP2I.

Remarque 40. — D'après le lemme 38, la définition 39 de l'intégrale d'une fonction vectorielle continue par morceaux sur un segment à valeurs dans E est indépendante de la base de E choisie. Elle est donc intrinsèque à la fonction vectorielle.

Exercice 41. — Soit l'application :

$$f \left| \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbf{R}^2 \\ t & \longmapsto & \left(\dfrac{1}{4-t^2}, \dfrac{1}{1+t^2}\right). \end{array} \right.$$

Calculer $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$.

5.3. Sommes de Riemann pour une fonction vectorielle continue par morceaux

Théorème 42. — *Soit $f \in \mathscr{CM}([a,b],E)$.*

$$\underbrace{\frac{b-a}{N}\cdot\sum_{k=0}^{N-1} f\left(a+k\,\frac{b-a}{N}\right)}_{=:S_N^g(f)} \xrightarrow[N\to+\infty]{} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad \underbrace{\frac{b-a}{N}\cdot\sum_{k=1}^{N} f\left(a+k\,\frac{b-a}{N}\right)}_{=:S_N^d(f)} \xrightarrow[N\to+\infty]{} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

Démonstration. Nous démontrons le résultat pour la suite $\left(S_N^g(f)\right)_{N\in\mathbf{N}^*}$ des sommes de Riemann à gauche.

(a) Notons tout d'abord que nous connaissons le résultat pour $E=\mathbf{R}$, d'après le cours de MP2I.

(b) Pour tout $N\in\mathbf{N}^*$:

$$\begin{aligned} S_N^g &= \frac{b-a}{N}\cdot\sum_{k=0}^{N-1} f\left(a+k\,\frac{b-a}{N}\right) \\ &= \frac{b-a}{N}\cdot\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{i=1}^{n} e_i^*\left(f\left(a+k\,\frac{b-a}{N}\right)\right)\cdot e_i \qquad \left[\text{décomposition de } f\left(a+k\,\frac{b-a}{N}\right) \text{ dans la base } \underline{e}\right] \\ &= \frac{b-a}{N}\cdot\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{i=1}^{n} e_i^*\circ f\left(a+k\,\frac{b-a}{N}\right)\cdot e_i \\ &= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=0}^{N-1}\frac{b-a}{N}\cdot e_i^*\circ f\left(a+k\,\frac{b-a}{N}\right)\right)\cdot e_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} S_N^g\left(e_i^*\circ f\right)\cdot e_i\,. \end{aligned}$$

(c) Soit $i\in[\![1,n]\!]$. Comme $e_i^*\circ f\in\mathscr{CM}([a,b],\mathbf{R})$, nous savons que :

$$S_N^g\left(e_i^*\circ f\right)\xrightarrow[N\to+\infty]{}\int_a^b e_i^*\circ f(t)\,\mathrm{d}t \qquad [\text{cours de MP2I}]\,.$$

(d) De (b) et (c), nous déduisons :

$$S_N^g=\sum_{i=1}^{n} S_N^g\left(e_i^*\circ f\right)\cdot e_i \xrightarrow[N\to+\infty]{} \sum_{i=1}^{n}\left(\int_a^b e_i^*\circ f(t)\,\mathrm{d}t\right)\cdot e_i=\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

□

5.4. Propriétés de l'intégrale des fonctions vectorielles continues par morceaux

Théorème 43. —

1. *Linéarité. — Soient* $(f,g)\in\mathscr{CM}([a,b],E)^2$ *et* $(\lambda,\mu)\in\mathbf{K}^2$. *Alors :*
$$\int_a^b \lambda\cdot f(t)+\mu\cdot g(t)\,\mathrm{d}t=\lambda\cdot\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t+\mu\cdot\int_a^b d(t)\,\mathrm{d}t$$
2. *Relation de Chasles. — Soient* $\varphi\in\mathscr{CM}([a,b],E)$ *et* $c\in[a,b]$. *Alors :*
$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t=\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t+\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$$
3. *Composée par une application linéaire. Soient* $(F,||\cdot||_F)$ *un espace vectoriel normé de dimension finie,* $L\in\mathscr{L}(E,F)$, $f\in\mathscr{CM}([a,b],E)$ *et* $L\circ f\in\mathscr{CM}([a,b],F)$. *Alors :*
$$L\left(\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right)=\int_a^b L\circ f(t)\,\mathrm{d}t\,.$$
4. *Inégalité triangulaire. Soient* $||\cdot||$ *une norme quelconque sur* E *et* $f\in\mathscr{CM}([a,b],E)$. *Alors l'application*
$$\left|\begin{array}{ccc}[a,b]&\longrightarrow&\mathbf{R}\\ t&\longmapsto&||f(t)||\end{array}\right.$$
est continue par morceaux sur $[a,b]$ *et :*
$$\left\|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right\|\leqslant\int_a^b||f(t)||\,\mathrm{d}t\,.$$

6. Intégrale fonction de sa borne supérieure

6.1. Théorème fondamental de l'analyse pour les fonctions vectorielles continues

Lemme 44. — *Soit* $f\in\mathscr{D}(I,E)$ *telle que, pour tout* $t\in I$, $f'(t)=0_E$. *Alors la fonction* f *est constante sur l'intervalle* I.

Théorème 45. — *Soit* $f\in\mathscr{C}^0(I,E)$ *et* $a\in I$. *L'application :*
$$F_a\left|\begin{array}{ccc}I&\longrightarrow&E\\ x&\longmapsto&\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\end{array}\right.$$
est l'unique fonction de I *dans* E *telle que :*

1. *la fonction* F_a *est de classe* $\mathscr{C}^1$ *sur* I *;*
2. $F_a'=f$ *;*
3. $F_a(a)=0_E$.

Démonstration. L'assertion 3 est claire. Comme f est continue sur I, il suffit de démontrer que F_a est dérivable sur I avec comme fonction dérivée f, pour établir les assertions 1 et 2.

(a) Nous démontrons tout d'abord que la fonction F_a est dérivable au point a, avec $f(a)$ comme vecteur dérivé en ce point, i.e. :

$$\frac{F_a(x)-F_a(a)}{x-a} \xrightarrow[x\to a]{} f(a)\,.$$

Soit $\varepsilon>0$. Comme la fonction f est continue en a :

$$\exists\, r>0 \quad \forall\, x\in I \quad |x-a|\leqslant r \implies \|f(x)-f(a)\|\leqslant \varepsilon\,. \tag{2}$$

Soit $x\in I\setminus\{a\}$ tel que $|x-a|\leqslant r$. Nous calculons :

$$\frac{F_a(x)-F_a(a)}{x-a}-f(a)=\frac{F_a(x)}{x-a}-\frac{1}{x-a}\int_a^x f(a)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)-f(a)\,\mathrm{d}t$$

puis appliquons le changement de variable affine $u=\dfrac{t-a}{x-a}$ pour obtenir :

$$\frac{F_a(x)-F_a(a)}{x-a}-f(a)=\int_0^1 f(a+(x-a)u)-f(a)\,\mathrm{d}u\,.$$

L'inégalité triangulaire livre alors :

$$\left\|\frac{F_a(x)-F_a(a)}{x-a}-f(a)\right\|\leqslant\int_0^1\|f(a+(x-a)u)-f(a)\|\,\mathrm{d}u\,. \tag{3}$$

Comme, pour tout $u\in[0,1]$:

$$|a+(x-a)u-a|=u\,|x-a|\leqslant|x-a|\leqslant r$$

nous déduisons de (2) et (3) que :

$$\left\|\frac{F_a(x)-F_a(a)}{x-a}-f(a)\right\|\leqslant\varepsilon\,.$$

Nous avons établi que :

$$\forall\,\varepsilon>0\quad\exists\, r>0\quad\forall\, x\in I\setminus\{a\}\quad |x-a|\leqslant r\implies\left\|\frac{F_a(x)-F_a(a)}{x-a}-f(a)\right\|\leqslant\varepsilon\,.$$

(b) Soit $x_0\in I$. Le résultat (a) a été établi pour un point a quelconque de I. Il vaut donc en particulier au point x_0, i.e. la fonction F_{x_0} est dérivable au point x_0 et $F'_{x_0}(x_0)=f(x_0)$.

(c) D'après la relation de Chasles :

$$\forall\, x\in I\quad F_a(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t=\int_a^{x_0}f(t)\,\mathrm{d}t+\int_{x_0}^x f(t)\,\mathrm{d}t=\underbrace{\int_a^{x_0}f(t)\,\mathrm{d}t}_{\text{constante}}+F_{x_0}(x)\,.$$

Nous déduisons alors de (b) que la fonction F_a est dérivable en x_0, avec $F'_a(x_0)=F'_{x_0}(x_0)=f(x_0)$.

□

6.2. Théorème d'intégration par parties pour les fonctions vectorielles de classe $\mathscr{C}^1$

Théorème 46. — *Soient $(F\,\|\cdot\|_F)$, $(G\,\|\cdot\|_G)$ deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies, $B\colon E\times F\longrightarrow G$ une application bilinéaire et $(f,g)\in\mathscr{C}^1([a,b],E)\times\mathscr{C}^1([a,b],F)$. Alors :*

$$\int_a^b B(f'(t),g(t))\,\mathrm{d}t=B(f(b),g(b))-B(f(a),g(a))-\int_a^b B(f(t),g'(t))\,\mathrm{d}t\,.$$

6.3. Inégalité des accroissements finis pour une fonction vectorielle de classe $\mathscr{C}^1$ sur un segment

Théorème 47. — *Soit $f \in \mathscr{C}^1(I,E)$. Alors :*

$$\forall (a,b) \in I^2 \quad \|f(b)-f(a)\|_E \leqslant |b-a| \times \left\|f'\right\|_{\infty,[a,b]} .$$

L'égalité accroissements finis n'est pas nécessairement valable pour les fonctions à valeurs vectorielles. En effet, l'application :

$$f \left| \begin{array}{ccc} [0,2\pi] & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ t & \longmapsto & e^{it} \end{array} \right.$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et, pour tout $t \in [0,2\pi]$, $f'(t) = i\,e^{it}$ est de module 1. Il n'existe donc aucun point $c \in]0,2\pi[$ tel que :

$$f'(c) = \frac{f(2\pi)-f(0)}{2\pi-0} = 0 .$$

Exercice 48. — Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbf{R},E)$ telle que f' est bornée sur $\mathbf{R}$. Démontrer que la fonction f est lipschitzienne.

7. Formules de Taylor

7.1. Formule de Taylor avec reste intégral

Théorème 49. — *Soient $p \in \mathbf{N}$ et $f \in \mathscr{C}^{p+1}(I,E)$. Alors :*

$$\forall (a,x) \in I^2, \quad f(x) = \sum_{k=0}^{p} (x-a)^k \cdot \frac{f^{(k)}(a)}{k!} + \underbrace{\int_a^x \frac{(x-t)^p}{p!} \cdot f^{(p+1)}(t)\,\mathrm{d}t}_{=:R_p(f,a,x)}.$$

Le vecteur $R_p(f,a,x)$ de E est appelé reste intégral.

7.2. Inégalité de Taylor-Lagrange

Corollaire 50. — *Soient $p \in \mathbf{N}$ et $f \in \mathscr{C}^{p+1}(I,E)$ telle que :*

$$\exists M \in \mathbf{R}_+ \quad \forall t \in I \quad \left\|f^{(p+1)}(t)\right\| \leqslant M .$$

Alors :

$$\forall (a,x) \in I^2 \quad \underbrace{\left\| f(x) - \left(\sum_{k=0}^{p} (x-a)^k \cdot \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \right) \right\|}_{=\|R_p(f,a,x)\|} \leqslant M \times \frac{|x-a|^{p+1}}{(p+1)!} .$$

Exercice 51. — Soit $f \in \mathscr{C}^2(\mathbf{R},E)$ telle que les fonctions f et f'' soient bornées. On pose :

$$M_0 := \|f\|_\infty \qquad \text{et} \qquad M_2 := \left\|f''\right\|_\infty .$$

1. Démontrer que :
$$\forall (x,h) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+^* \quad \left\|f'(x)\right\| \leqslant \frac{2M_0}{h} + \frac{hM_2}{2} .$$
2. Qu'en déduire pour f' ?
3. Démontrer :
$$\left\|f'\right\|_\infty =: M_1 \leqslant 2\sqrt{M_0 M_2} \qquad \text{[inégalité de Kolmogorov]} .$$

7.3. Formule de Taylor-Young

Corollaire 52. — *Soient $p \in \mathbf{N}$, $f \in \mathscr{C}^p(I,E)$ et $a \in I$. Alors :*

$$f(t) \underset{t\to a}{=} \sum_{k=0}^{p} (t-a)^k \cdot \frac{f^{(k)}(a)}{k!} + o\left((t-a)^p\right) .$$