

# Espaces vectoriels normés 3

- 1. Applications linéaires continues ..... 1
  - 1.1. Caractérisation des applications linéaires continues ..... 1
  - 1.2. Opérations sur les applications linéaires continues ..... 2
  - 1.3. Norme subordonnée d'une application linéaire continue ..... 3
  - 1.4. Inégalités pour les normes subordonnées d'applications linéaires continues ..... 3
  - 1.5. Applications multilinéaires continues ..... 4
- 2. Comparaison de normes ..... 6
  - 2.1. Définition de deux normes équivalentes ..... 6
  - 2.2. Caractérisation séquentielle de l'équivalence de deux normes ..... 7
  - 2.3. Invariance des notions topologiques par passage à une norme équivalente ..... 8
- 3. Espaces vectoriels normés de dimension finie ..... 9
  - 3.1. Équivalence des normes sur un espace de dimension finie ..... 9
  - 3.2. Caractère intrinsèque des notions topologiques sur un espace de dimension finie ..... 10
  - 3.3. Convergence des suites dans un espace de dimension finie ..... 11
  - 3.4. Compacité dans un espace de dimension finie ..... 11
  - 3.5. Suite bornée ayant une unique valeur d'adhérence dans un espace de dimension finie ..... 12
  - 3.6. Caractère fermé d'un sous-espace de dimension finie ..... 12
  - 3.7. Continuité d'une application linéaire donc la source est un espace de dimension finie ..... 13
  - 3.8. Norme subordonnée d'une matrice carrée ..... 14
  - 3.9. Inégalités pour les normes subordonnées de matrices carrées ..... 14
  - 3.10. Continuité des applications polynomiales sur un espace de dimension finie ..... 14
  - 3.11. Applications multilinéaires sur un produit d'espaces de dimension finie ..... 15

*Notation.* — Dans ce chapitre,  $n, p$  sont des entiers naturels non nuls et  $\mathbf{K}$  désigne le corps  $\mathbf{R}$  ou  $\mathbf{C}$ .

## 1. Applications linéaires continues

### 1.1. Caractérisation des applications linéaires continues

**Théorème 1.** — Soient  $(E, \| \cdot \|_E), (F, \| \cdot \|_F)$  des espaces vectoriels normés et  $u \in \mathcal{L}(E, F)$ . Les cinq assertions suivantes sont équivalentes.

- (a) L'application  $u$  est continue sur  $E$ .
- (b) L'application  $u$  est continue en  $0$ .
- (c) La restriction de  $u$  à la boule unité fermée est bornée.
- (d)  $\exists C > 0 \quad \forall x \in E \quad \|u(x)\|_F \leq C \times \|x\|_E$
- (e) L'application  $u$  est lipschitzienne.

♥ Une démonstration du théorème 1 est à connaître.



En pratique, pour démontrer que l'application linéaire  $u : (E, N_E) \longrightarrow (F, N_F)$  est continue, on pourra considérer un vecteur  $x$  de  $E$  et chercher une constante réelle  $C$ , indépendante de  $x$ , telle que :

$$\|u(x)\|_F \leq C \|x\|_E .$$

**Exemple 2.** — Toute application linéaire :

$$u : (\mathbf{K}^n, \| \cdot \|_\infty) \longrightarrow (\mathbf{K}^p, \| \cdot \|_\infty)$$

est continue. En effet, si nous notons  $(e_1, \dots, e_n)$  la base canonique de  $\mathbf{K}^n$ , alors, pour tout  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{K}^n$  :

$$\|u(x)\|_\infty = \left\| \sum_{i=1}^n x_i u(e_i) \right\|_\infty \leq \sum_{i=1}^n \underbrace{|x_i|}_{\leq \|x\|_\infty} \|u(e_i)\|_\infty \leq \underbrace{\left( \sum_{i=1}^n \|u(e_i)\|_\infty \right)}_{\text{constante indépendante de } x} \|x\|_\infty .$$

**Exemple 3.** — Soient  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  un produit scalaire sur un  $\mathbf{R}$ -espace vectoriel  $E$ , de norme associée  $\| \cdot \|$ , et  $x \in E$  fixé. l'application linéaire :

$$\langle x, \cdot \rangle \left| \begin{array}{l} (E, \| \cdot \|) \longrightarrow (\mathbf{R}, | \cdot |) \\ y \longmapsto \langle x, y \rangle \end{array} \right.$$

est continue. En effet, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, pour tout  $y \in E$  :

$$| \langle x, \cdot \rangle (y) | = | \langle x, y \rangle | \leq \underbrace{\| x \|}_{\text{constante indépendante de } y} \| y \| .$$

**Exemple 4.** — L'application linéaire :

$$\text{Eval}_2 \left| \begin{array}{l} (\mathbf{R}[X], \| \cdot \|_1) \longrightarrow (\mathbf{R}, | \cdot |) \\ P \longmapsto P(2) \end{array} \right.$$

n'est pas continue car elle n'est pas bornée sur la boule unité fermée de  $(\mathbf{R}[X], \| \cdot \|_1)$ . En effet, pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,  $X^n \in \overline{B(0, 1)}$  et  $\text{Eval}_2(X^n) = 2^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ .

En pratique, pour démontrer que l'application linéaire  $u : (E, N_E) \longrightarrow (F, N_F)$  n'est pas continue, on pourra chercher une suite  $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$  de vecteurs de  $E$  telle que :



$$x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{N_E} 0_E \quad \text{et} \quad \text{non} \left( u(x_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{N_F} u(0_E) = 0_F \right) .$$

On aura ainsi établi la négation du critère séquentiel de continuité de  $u$  en  $0_E$ .

**Exercice 5.** — Soient  $a, b$  des réels tels que  $a < b$ . Démontrer que l'application :

$$\varphi \left| \begin{array}{l} \mathcal{C}^0([a, b], \mathbf{R}) \longrightarrow \mathbf{R} \\ f \longmapsto \int_a^b f(t) dt \end{array} \right.$$

est continue lorsque l'on munit  $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbf{R})$  de la norme  $\| \cdot \|_1$  (resp.  $\| \cdot \|_2, \| \cdot \|_\infty$ ).

**Exercice 6.** — Démontrer que l'application linéaire :

$$\text{Eval}_0 \left| \begin{array}{l} \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbf{R}) \longrightarrow (\mathbf{R}, | \cdot |) \\ f \longmapsto f(0) \end{array} \right.$$

est continue si l'on munit  $\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbf{R})$  de la norme  $\| \cdot \|_\infty$ , mais discontinue si l'on munit  $\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbf{R})$  de la norme  $\| \cdot \|_1$ .

**Exercice 7.** — Soient  $(E, \| \cdot \|)$  un espace vectoriel normé et  $\varphi : E \longrightarrow \mathbf{K}$  une forme linéaire non nulle.

1. Démontrer que le noyau de  $\varphi$  est soit fermé dans  $E$ , soit dense dans  $E$ .
2. Démontrer que l'application  $\varphi$  est continue si et seulement si  $\text{Ker}(\varphi)$  est une partie fermée de  $(E, \| \cdot \|)$ .

### 1.2. Opérations sur les applications linéaires continues

*Notation.* — Si  $(E, \| \cdot \|_E)$  et  $(F, \| \cdot \|_F)$  sont deux espaces vectoriels normés, on pose :

$$\mathcal{L}_c(E, F) := \{ f \in F^E : \text{l'application } f \text{ est linéaire et continue} \} = \mathcal{L}(E, F) \cap \mathcal{C}^0(E, F) .$$

**Théorème 8.** — Soient  $(E, \| \cdot \|_E), (F, \| \cdot \|_F), (G, \| \cdot \|_G)$  trois espaces vectoriels normés.

- (a) Pour tout  $u, v \in \mathcal{L}_c(E, F)$ , pour tout  $\lambda, \mu \in \mathbf{K}$ ,  $\lambda u + \mu v \in \mathcal{L}_c(E, F)$ .
- (b) Pour tout  $u \in \mathcal{L}_c(E, F)$ , pour tout  $v \in \mathcal{L}_c(F, G)$ ,  $v \circ u \in \mathcal{L}_c(E, G)$ .

**Remarque 9.** — Soient  $(E, \| \cdot \|_E)$  et  $(F, \| \cdot \|_F)$  deux espaces vectoriels normés.

1. Par définition,  $\mathcal{L}_c(E, F)$  est une partie de  $\mathcal{L}(E, F)$ .
2. L'application nulle :

$$\left| \begin{array}{l} E \longrightarrow F \\ x \longmapsto 0_F \end{array} \right.$$

est linéaire et continue. Elle appartient donc à  $\mathcal{L}_c(E, F)$ .

3. De plus,  $\mathcal{L}_c(E, F)$  est stable par combinaison linéaire (assertion 1 du précédent théorème).

Nous en déduisons que  $\mathcal{L}_c(E, F)$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{L}(E, F)$ . Il hérite donc d'une structure naturelle d'espace vectoriel.

### 1.3. Norme subordonnée d'une application linéaire continue

**Proposition-Définition 10.** — Soient  $(E, \|\cdot\|_E)$ ,  $(F, \|\cdot\|_F)$  deux espaces vectoriels normés et  $u \in \mathcal{L}_c(E, F)$ . On appelle norme subordonnée de  $u$  à  $\|\cdot\|_E$  et  $\|\cdot\|_F$  le nombre réel :

$$\|u\| := \sup \{ \|u(x)\|_F : x \in E \text{ et } \|x\|_E \leq 1 \} .$$

L'application :

$$\| \cdot \| \left| \begin{array}{l} \mathcal{L}_c(E, F) \longrightarrow \mathbf{R}_+ \\ u \longmapsto \|u\| \end{array} \right.$$

est une norme sur  $\mathcal{L}_c(E, F)$ .

♥ Une démonstration de la proposition-définition 10 ( $\| \cdot \|$  est une norme sur  $\mathcal{L}_c(E, F)$ ) est à connaître.

**Remarque 11.** — En conservant les notations de la proposition 10 et en supposant  $E \neq \{0_E\}$ , nous avons :

$$\|u\| := \sup_{x \in \overline{B(0_E, 1)}} \|u(x)\|_F = \sup_{x \in B(0_E, 1)} \|u(x)\|_F = \sup_{x \in S(0_E, 1)} \|u(x)\|_F \quad [\text{définition alternative de la norme subordonnée}] .$$

Ainsi, dans la définition de  $\|u\|$ , la borne supérieure peut donc indifféremment être prise sur tous les vecteurs de la boule unité fermée, sur tous les vecteurs de la boule unité ouverte ou sur tous les vecteurs de la sphère unité.



La norme subordonnée  $\|u\|$  d'une application linéaire continue  $u: (E, \|\cdot\|_E) \longrightarrow (F, \|\cdot\|_F)$  peut être vue comme « la meilleure constante de Lipschitz » pour l'application  $u$ , i.e. la constante réelle  $C$  optimale telle que :

$$\forall x \in E \quad \|u(x)\|_F \leq C \|x\|_E .$$

**Exercice 12.** — Calculer la norme subordonnée de l'application linéaire continue :

$$u \left| \begin{array}{l} (\mathbf{R}^2, \|\cdot\|_\infty) \longrightarrow (\mathbf{R}^2, \|\cdot\|_\infty) \\ (x, y) \longmapsto (x + 2y, 3x + 4y) \end{array} \right.$$

et généraliser.

**Exercice 13.** — Démontrer que l'application :

$$\text{Eval}_0 \left| \begin{array}{l} (\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbf{R}), \|\cdot\|_\infty) \longrightarrow (\mathbf{R}, |\cdot|) \\ f \longmapsto f(0) \end{array} \right.$$

est linéaire continue, puis calculer  $\|\text{Eval}_0\|$ .

**Exercice 14.** — Soient  $u \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^n)$  et  $A = (a_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2}$  sa matrice dans la base canonique.

- Démontrer que l'application linéaire  $u: (\mathbf{R}^n, \|\cdot\|_\infty) \longrightarrow (\mathbf{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$  est continue et calculer sa norme subordonnée.
- Démontrer que l'application linéaire  $u: (\mathbf{R}^n, \|\cdot\|_1) \longrightarrow (\mathbf{R}^n, \|\cdot\|_1)$  est continue et calculer sa norme subordonnée.

### 1.4. Inégalités pour les normes subordonnées d'applications linéaires continues

**Proposition 15.** — Soient  $(E, \|\cdot\|_E)$ ,  $(F, \|\cdot\|_F)$  deux espaces vectoriels normés.

$$\forall u \in \mathcal{L}_c(E, F) \quad \forall x \in E \quad \|u(x)\|_F \leq \|u\| \times \|x\|_E$$

**Théorème 16.** — Soient  $(E, \|\cdot\|_E)$  un espace vectoriel normé. La norme  $\| \cdot \|$  sur  $(\mathcal{L}_c(E), +, \cdot, \circ)$  est une norme d'algèbre, i.e. :

(a)  $\|\text{id}_E\| = 1$

(b)  $\forall (u, v) \in \mathcal{L}_c(E)^2 \quad \|u \circ v\| \leq \|u\| \times \|v\| \quad [\text{sous-multiplicativité de la norme } \|\cdot\|]$

### 1.5. Applications multilinéaires continues

**Proposition 17.** — Soient  $(E, \|\cdot\|_E)$ ,  $(F, \|\cdot\|_F)$ ,  $(G, \|\cdot\|_G)$  trois espaces vectoriels normés et  $B : E \times F \rightarrow G$  une application bilinéaire. On munit  $E \times F$  de la norme produit. L'application  $B$  est continue si et seulement si :

$$\exists C > 0 \quad \forall (x, y) \in E \times F \quad \|B(x, y)\|_G \leq C \times \|x\|_E \times \|y\|_F .$$

*Démonstration.* Rappelons que la norme produit  $\|\cdot\|$  placée sur  $E \times F$  est définie par :

$$\forall (x, y) \in E \times F, \quad \|(x, y)\| := \max(\|x\|_E, \|y\|_F) .$$

Procédons par double implication.

$\Rightarrow$  Supposons l'application  $B$  continue. Alors  $B$  est continue en tout point de  $E \times F$ , en particulier continue au point  $(0_E, 0_F)$ . Remarquons que,  $B$  étant bilinéaire,  $B(0_E, 0_F) = 0_G$ . Dans la définition de la continuité de  $B$  en  $(0_E, 0_F)$ , nous spécifions  $\varepsilon$  à  $1 > 0$  pour obtenir qu'il existe  $\alpha > 0$  tel que pour tout  $(x, y) \in E \times F$  :

$$\underbrace{\|(x, y)\| \leq \alpha}_{\|(x, y) - (0_E, 0_F)\| \leq \alpha} \implies \underbrace{\|B(x, y)\|_G \leq 1}_{\|B(x, y) - B(0_E, 0_F)\|_G \leq 1} .$$

Nous scindons alors l'étude en deux parties suivant que les vecteurs  $x$  et  $y$  sont nuls ou non.

- Soient  $x$  un vecteur de  $E$  non nul et  $y$  un vecteur de  $F$  non nul. Alors le vecteur  $\left(\frac{\alpha}{\|x\|_E} x, \frac{\alpha}{\|y\|_F} y\right)$  de  $E \times F$  a une norme  $\|\cdot\|$  égale à  $\alpha$ . Donc :

$$\left\| B\left(\frac{\alpha}{\|x\|_E} x, \frac{\alpha}{\|y\|_F} y\right) \right\|_G \leq 1 .$$

En utilisant la bilinéarité de  $B$ , l'homogénéité de la norme  $\|\cdot\|_G$  et le fait que  $\alpha, \|x\|_E$  et  $\|y\|_F$  sont strictement positifs, nous en déduisons :

$$\|B(x, y)\|_G \leq \frac{1}{\alpha^2} \times \|x\|_E \times \|y\|_F . \tag{1}$$

- Si  $(x, y) \in E \times F$  est tel que  $x = 0_E$  ou  $y = 0_F$ , alors la bilinéarité de  $B$  livre  $B(x, y) = 0_G$ . L'inégalité (1) s'étend donc à tous les vecteurs  $(x, y)$  de  $E \times F$ .

$\Leftarrow$  Supposons qu'il existe un réel  $C > 0$  tel que :

$$\forall (x, y) \in E \times F \quad \|B(x, y)\|_G \leq C \times \|x\|_E \times \|y\|_F .$$

Soient  $(x, y) \in E \times F$ . Démontrons que  $B$  est continue en  $(x, y)$ , en appliquant le critère séquentiel de continuité. Soit  $((x_n, y_n))_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $E \times F$  telle que

$$(x_n, y_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\|\cdot\|} (x, y) .$$

D'après le cours sur les convergences des suites dans un espace produit :

$$x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\|\cdot\|_E} x \quad \text{et} \quad y_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\|\cdot\|_F} y .$$

Soient  $n \in \mathbb{N}$ .

$$\begin{aligned} \|B(x_n, y_n) - B(x, y)\|_G &\leq \|B(x_n, y_n) - B(x_n, y)\|_G + \|B(x_n, y) - B(x, y)\|_G && \text{[inégalité triangulaire]} \\ &= \|B(x_n, y_n - y)\|_G + \|B(x_n - x, y)\|_G && \text{[} B \text{ est bilinéaire]} \\ &\leq C \times \|x_n\|_E \times \|y_n - y\|_F + C \times \|x_n - x\|_E \times \|y\|_F && \text{[cf. hypothèse]} \end{aligned}$$

Comme toute norme est continue (puisque 1-lipschitzienne d'après la seconde inégalité triangulaire) :

$$C \times \|x_n\|_E \times \|y_n - y\|_F + C \times \|x_n - x\|_E \times \|y\|_F \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathbf{R}} C \times \|x\|_E \times 0 + C \times 0 \times \|y\|_F = 0 .$$

D'après le théorème d'encadrement,  $\|B(x_n, y_n) - B(x, y)\|_G \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ , i.e.  $B(x_n, y_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\|\cdot\|_G} B(x, y)$ .

□

**Exemple 18.** — Si  $E$  est un  $\mathbf{R}$ -espace vectoriel muni d'un produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , de norme associée  $\| \cdot \|$ , alors l'inégalité de Cauchy-Schwarz livre :

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\| .$$

L'application bilinéaire :

$$\langle \cdot, \cdot \rangle \left| \begin{array}{l} (E, \| \cdot \|) \times (E, \| \cdot \|) \longrightarrow \mathbf{R} \\ (x, y) \longmapsto \langle x, y \rangle \end{array} \right.$$

est donc continue.

**Proposition 19.** — Soient un entier  $p \geq 2$ ,  $(E_1, \| \cdot \|_{E_1}), \dots, (E_p, \| \cdot \|_{E_p})$  et  $(F, \| \cdot \|_F)$  des espaces vectoriels normés et :

$$f : E_1 \times \dots \times E_p \longrightarrow F$$

une application multilinéaire. On munit  $E_1 \times \dots \times E_n$  de la norme produit. L'application  $f$  est continue si et seulement si :

$$\exists C > 0 \quad \forall (x_1, \dots, x_p) \in E_1 \times \dots \times E_p \quad \|f(x_1, \dots, x_p)\|_F \leq C \|x_1\|_{E_1} \times \dots \times \|x_p\|_{E_p} .$$

**Corollaire 20.** — L'application :

$$\det \left| \begin{array}{l} (\mathcal{M}_n(\mathbf{K}), \| \cdot \|_\infty) \longrightarrow (\mathbf{K}, | \cdot |) \\ A \longmapsto \det(A) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \times \prod_{k=1}^n [A]_{k, \sigma(k)} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \times \prod_{k=1}^n [A]_{\sigma(k), k} \end{array} \right.$$

est continue.

*Démonstration.* Pour tout  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ , pour tout  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , notons  $[A]_{\bullet, j}$  la  $j$ -ième colonne de la matrice  $A$ .

• *Identification des espaces vectoriels  $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$  et  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})^n$ .* — L'application :

$$f \left| \begin{array}{l} \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \longrightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})^n \\ A \longmapsto ([A]_{\bullet, 1}, \dots, [A]_{\bullet, n}) \end{array} \right. \quad [\text{identification d'une matrice avec la liste de ses colonnes}]$$

est un isomorphisme.

• *Multilinéarité et continuité du déterminant de source  $(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})^n, \| \cdot \|) = (\mathcal{M}_n(\mathbf{K}), \| \cdot \|_\infty)^n$ .* — Nous savons que l'application :

$$\det \circ f^{-1} \left| \begin{array}{l} \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})^n \longrightarrow \mathbf{K} \\ (A_1, \dots, A_n) \longmapsto \det(A_1 | \dots | A_n) \end{array} \right.$$

est  $n$ -linéaire (et alternée). Comme :

$$\forall (A_1, \dots, A_n) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})^n \quad |\det(A_1 | \dots | A_n)| \leq \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} |\varepsilon(\sigma)| \times \prod_{k=1}^n |[A_k]_{\sigma(k)}| \leq \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \prod_{k=1}^n \|A_k\|_\infty = n! \times \prod_{k=1}^n \|A_k\|_\infty$$

la proposition 19 nous livre la continuité de l'application :

$$\det \circ f^{-1} \left| \begin{array}{l} (\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})^n, \| \cdot \|) \longrightarrow (\mathbf{K}, | \cdot |) \\ (A_1, \dots, A_n) \longmapsto \det(A_1 | \dots | A_n) \end{array} \right.$$

où  $\| \cdot \|$  désigne la norme produit sur  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})^n$ , chacune des  $n$  copies de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$  étant munie de la norme  $\| \cdot \|_\infty$ . Précisément,  $\| \cdot \|$  est la norme définie par :

$$\| \cdot \| \left| \begin{array}{l} \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})^n \longrightarrow \mathbf{R}_+ \\ (A_1, \dots, A_n) \longmapsto \max_{1 \leq j \leq n} \|A_j\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq n} \max_{1 \leq i \leq n} |[A_j]_i| = \max_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2} |[A_j]_i| = \|f^{-1}((A_1, \dots, A_n))\|_\infty . \end{array} \right.$$

• *Identification des espaces vectoriels normés  $(\mathcal{M}_n(\mathbf{K}), \| \cdot \|_\infty)$  et  $(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})^n, \| \cdot \|)$ .* — L'expression de la norme  $\| \cdot \|$  nous apprend que l'application :

$$f \left| \begin{array}{l} (\mathcal{M}_n(\mathbf{K}), \| \cdot \|_\infty) \longrightarrow (\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})^n, \| \cdot \|) \\ A \longmapsto ([A]_{\bullet, 1}, \dots, [A]_{\bullet, n}) \end{array} \right.$$

est une isométrie vectorielle (isomorphisme qui préserve les normes), i.e. :

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \quad \|A\|_\infty = \|f(A)\| .$$

Elle est donc continue (1-lipschitzienne).

- *Conclusion.* — L'application  $\det : (\mathcal{M}_n(\mathbf{K}), \|\cdot\|_\infty) \longrightarrow (\mathbf{K}, |\cdot|)$  est continue, comme composée des deux applications continues :

$$\det \circ f^{-1} : (\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})^n, \|\cdot\|) \longrightarrow (\mathbf{K}, |\cdot|) \quad \text{et} \quad f : (\mathcal{M}_n(\mathbf{K}), \|\cdot\|_\infty) \longrightarrow (\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})^n, \|\cdot\|) .$$

□

## 2. Comparaison de normes

*Notation.* — La lettre  $E$  désigne un  $\mathbf{K}$ -espace vectoriel.

### 2.1. Définition de deux normes équivalentes

**Définition 21.** — Soient  $N_1$  et  $N_2$  deux normes sur  $E$ . On dit que  $N_1$  est équivalente à  $N_2$  si :

$$\exists (\alpha, \beta) \in \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}_+^* \quad \forall x \in E \quad \alpha N_1(x) \leq N_2(x) \leq \beta N_1(x) .$$

**Proposition 22.** — La relation  $\mathcal{R}$ , définie sur l'ensemble des normes sur  $E$  par, pour toutes normes  $N_1$  et  $N_2$  sur  $E$  :

$$N_1 \mathcal{R} N_2 \quad :\iff \quad N_1 \text{ est équivalente à } N_2$$

est une relation d'équivalence.

**Exemple 23.** — On considère les normes  $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$  et  $\|\cdot\|_\infty$  définies précédemment sur  $\mathbf{R}^n$ , où  $n$  est un entier supérieur ou égal à 2.

1. *Comparaison des normes  $\|\cdot\|_1$  et  $\|\cdot\|_2$  sur  $\mathbf{R}^n$ .* — Soit  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ . Nous calculons :

$$\left( \sum_{i=1}^n |x_i| \right)^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} |x_i| |x_j| \geq \sum_{i=1}^n x_i^2$$

et en déduisons que  $\|x\|_2 \leq \|x\|_1$ . D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour le produit scalaire usuel sur  $\mathbf{R}^n$  :

$$\|x\|_1 := \sum_{i=1}^n |x_i| = \sum_{i=1}^n |x_i| \times 1 = \langle (|x_1|, \dots, |x_n|), (1, \dots, 1) \rangle \leq \|x\|_2 \cdot \|(1, \dots, 1)\|_2 = \sqrt{n} \|x\|_2 .$$

Ainsi :

$$\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n} \|x\|_2 \quad [\text{inégalités optimales}] .$$

Les normes  $\|\cdot\|_1$  et  $\|\cdot\|_2$  sont donc équivalentes sur  $\mathbf{R}^n$ .

2. *Comparaison des normes  $\|\cdot\|_1$  et  $\|\cdot\|_\infty$  sur  $\mathbf{R}^n$ .* — Soit  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ . Pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  :

$$0 \leq |x_i| \leq \sum_{j=1}^n |x_j| = \underbrace{\|x\|_1}_{\text{indépendant de } i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$$

et donc :

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 = \sum_{j=1}^n |x_j| \leq n \|x\|_\infty \quad [\text{passage à la borne supérieure sur les entiers } i \in \llbracket 1, n \rrbracket] .$$

Ainsi :

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n \|x\|_\infty \quad [\text{inégalités optimales}] .$$

Les normes  $\|\cdot\|_1$  et  $\|\cdot\|_\infty$  sont donc équivalentes sur  $\mathbf{R}^n$ .

3. *Comparaison des normes  $\|\cdot\|_2$  et  $\|\cdot\|_\infty$  sur  $\mathbf{R}^n$ .* — Soit  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ . Pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  :

$$0 \leq x_i^2 \leq \|x\|_\infty^2$$

et donc :

$$\|x\|_\infty^2 \leq \sum_{i=1}^n x_i^2 \leq n \|x\|_\infty^2 .$$

Ainsi :

$$\| \cdot \|_\infty \leq \| \cdot \|_2 \leq \sqrt{n} \| \cdot \|_\infty \quad [\text{inégalités optimales}] .$$

Les normes  $\| \cdot \|_2$  et  $\| \cdot \|_\infty$  sont donc équivalentes sur  $\mathbf{R}^n$ , ce que l'on pouvait déduire des points 1 et 2, d'après la proposition 22.

Soient  $N_1$  et  $N_2$  deux normes sur  $E$ . «  $N_1$  est équivalente à  $N_2$  » se traduit géométriquement comme suit :

$$\exists (r, R) \in \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}_+^* \quad \overline{B_{N_1}(0_E, r)} \subseteq \overline{B_{N_2}(0_E, 1)} \subseteq \overline{B_{N_1}(0_E, R)}$$

ou encore :

$$\exists (r, R) \in \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}_+^* \quad B_{N_1}(0_E, r) \subseteq B_{N_2}(0_E, 1) \subseteq B_{N_1}(0_E, R) .$$

Ainsi,  $N_1$  est équivalente à  $N_2$  si et seulement si la boule unité fermée (resp. ouverte) pour la norme  $N_2$  est « coincée » entre deux boules fermées (resp. ouvertes) pour la norme  $N_1$ .

## 2.2. Caractérisation séquentielle de l'équivalence de deux normes

*Notation.* — Les lettres  $N_1$  et  $N_2$  désignent deux normes sur  $E$ .

**Théorème 24.** — *Les assertions suivantes sont équivalentes.*

(a)  $\exists \alpha \in \mathbf{R}_+^* \quad \forall x \in E \quad N_2(x) \leq \alpha N_1(x)$

(b) *L'application :*


$$\text{id}_{N_1}^{N_2} \left| \begin{array}{ccc} (E, N_1) & \longrightarrow & (E, N_2) \\ x & \longmapsto & x \end{array} \right.$$

*est continue.*

(c) *Toute suite d'éléments de  $E$  qui converge vers  $0_E$  pour la norme  $N_1$ , converge vers  $0_E$  pour la norme  $N_2$ .*

**Corollaire 25.** — *Les normes  $N_1$  et  $N_2$  sont équivalentes si et seulement si pour toute suite  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  de  $E$  :*

$$(u_n)_{n \in \mathbf{N}} \text{ converge vers } 0_E \text{ pour la norme } N_1 \iff (u_n)_{n \in \mathbf{N}} \text{ converge vers } 0_E \text{ pour la norme } N_2.$$

 | Ce corollaire peut être utilisé pour démontré que deux normes sur un même espace vectoriel ne sont pas équivalentes.

**Exercice 26.** — Démontrer que sur  $\mathbf{R}[X]$  :

1. les normes  $\| \cdot \|_1$  et  $\| \cdot \|_2$  ne sont pas équivalentes ;
2. les normes  $\| \cdot \|_1$  et  $\| \cdot \|_\infty$  ne sont pas équivalentes ;
3. les normes  $\| \cdot \|_2$  et  $\| \cdot \|_\infty$  ne sont pas équivalentes.

**Exercice 27.** — Soient  $a$  et  $b$  des réels tels que  $a < b$ . Démontrer que sur  $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbf{R})$  :

1. les normes  $\| \cdot \|_1$  et  $\| \cdot \|_2$  ne sont pas équivalentes ;
2. les normes  $\| \cdot \|_1$  et  $\| \cdot \|_\infty$  ne sont pas équivalentes ;
3. les normes  $\| \cdot \|_2$  et  $\| \cdot \|_\infty$  ne sont pas équivalentes.

**Exercice 28.** — Nous rappelons que :

$$L^1(\mathbf{N}, \mathbf{R}) := \left\{ (u_n)_{n \in \mathbf{N}} : \text{la série } \sum |u_n| \text{ converge} \right\} \quad \text{et} \quad L^\infty(\mathbf{N}, \mathbf{R}) := \left\{ (u_n)_{n \in \mathbf{N}} : \text{la suite } (u_n)_{n \in \mathbf{N}} \text{ est bornée} \right\}$$

sont des sous-espaces vectoriels de  $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ .

1. Démontrer que :

$$L^2(\mathbf{N}, \mathbf{R}) := \left\{ (u_n)_{n \in \mathbf{N}} : \text{la série } \sum u_n^2 \text{ converge} \right\}$$

est un sous-espace vectoriel de  $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ .

2. Démontrer que :

$$L^1(\mathbf{N}, \mathbf{R}) \subseteq L^2(\mathbf{N}, \mathbf{R}) \subseteq L^\infty(\mathbf{N}, \mathbf{R}) .$$

3. On introduit trois applications :

$$\| \cdot \|_1 \left| \begin{array}{l} L^1(\mathbf{N}, \mathbf{R}) \longrightarrow \mathbf{R}_+ \\ (u_n)_{n \in \mathbf{N}} \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \end{array} \right. \quad \| \cdot \|_2 \left| \begin{array}{l} L^2(\mathbf{N}, \mathbf{R}) \longrightarrow \mathbf{R}_+ \\ (u_n)_{n \in \mathbf{N}} \longmapsto \sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^2} \end{array} \right. \quad \| \cdot \|_\infty \left| \begin{array}{l} L^\infty(\mathbf{N}, \mathbf{R}) \longrightarrow \mathbf{R}_+ \\ (u_n)_{n \in \mathbf{N}} \longmapsto \sup_{n \in \mathbf{N}} |u_n| \end{array} \right.$$

Démontrer que  $\| \cdot \|_1$  est une norme sur  $L^1(\mathbf{N}, \mathbf{R})$ ,  $\| \cdot \|_2$  est une norme sur  $L^2(\mathbf{N}, \mathbf{R})$  et  $\| \cdot \|_\infty$  est une norme sur  $L^\infty(\mathbf{N}, \mathbf{R})$ .

4. Sur l'espace  $L^1(\mathbf{N}, \mathbf{R})$ , on dispose de trois normes  $\| \cdot \|_1$ , la norme induite par  $\| \cdot \|_2$  (notée aussi  $\| \cdot \|_2$ ) et la norme induite par  $\| \cdot \|_\infty$  (notée aussi  $\| \cdot \|_\infty$ ). Comparer ces trois normes sur  $L^1(\mathbf{N}, \mathbf{R})$ .

### 2.3. Invariance des notions topologiques par passage à une norme équivalente

Notation. — Les lettres  $N_1$  et  $N_2$  désignent deux normes sur  $E$ .

**Théorème 29.** — On suppose que :

$$\exists \alpha \in \mathbf{R}_+^* \quad \forall x \in E \quad N_2(x) \leq \alpha N_1(x).$$

et on considère une partie  $A$  de  $E$ .

(a) Pour toute suite  $(x_n)_{n \in \mathbf{N}} \in E^{\mathbf{N}}$ , pour tout  $\ell \in \mathbf{R}$  :

$$x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{N_1} \ell \implies x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{N_2} \ell.$$

- (b) Si  $A$  est ouverte pour la norme  $N_2$  alors elle est ouverte pour la norme  $N_1$ .
- (c) Si  $A$  est fermée pour la norme  $N_2$  alors elle est fermée pour la norme  $N_1$ .
- (d) Si  $A$  est bornée pour la norme  $N_1$  alors elle est bornée pour la norme  $N_2$ .
- (e) Si  $A$  est compacte pour la norme  $N_1$  alors elle est compacte pour la norme  $N_2$ .
- (f) L'adhérence de  $A$  pour la norme  $N_1$  est incluse dans l'adhérence de  $A$  pour la norme  $N_2$ .
- (g) L'intérieur de  $A$  pour la norme  $N_2$  est incluse dans l'intérieur de  $A$  pour la norme  $N_1$ .

**Corollaire 30.** — On suppose que les normes  $N_1$  et  $N_2$  sont équivalentes et on considère une partie  $A$  de  $E$ .

(a) Pour toute suite  $(x_n)_{n \in \mathbf{N}} \in E^{\mathbf{N}}$ , pour tout  $\ell \in \mathbf{R}$  :

$$x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{N_1} \ell \iff x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{N_2} \ell.$$

- (b) La partie  $A$  est ouverte pour la norme  $N_1$  si et seulement si elle est ouverte pour la norme  $N_2$ .
- (c) La partie  $A$  est fermée pour la norme  $N_1$  si et seulement si elle est fermée pour la norme  $N_2$ .
- (d) La partie  $A$  est bornée pour la norme  $N_1$  si et seulement si elle est bornée pour la norme  $N_2$ .
- (e) La partie  $A$  est compacte pour la norme  $N_1$  si et seulement si elle est compacte pour la norme  $N_2$ .
- (f) L'adhérence de  $A$  pour la norme  $N_1$  coïncide avec l'adhérence de  $A$  pour la norme  $N_2$ .
- (g) La partie  $A$  est dense dans  $E$  pour la norme  $N_1$  si et seulement si elle est dense dans  $E$  pour la norme  $N_2$ .
- (h) L'intérieur de  $A$  pour la norme  $N_1$  coïncide avec l'intérieur de  $A$  pour la norme  $N_2$ .
- (i) La frontière de  $A$  pour la norme  $N_1$  coïncide avec la frontière de  $A$  pour la norme  $N_2$ .

Éléments de démonstration. Le corollaire 30 est conséquence directe du théorème 29. On propose toutefois une démonstration indépendante pour l'assertion 2.

Par hypothèse :

$$\exists (\alpha, \beta) \in \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}_+^* \quad \forall x \in E \quad \alpha N_1(x) \leq N_2(x) \leq \beta N_1(x).$$

L'application linéaire :

$$\text{id}_{N_1}^{N_2} \left| \begin{array}{l} (E, N_1) \longrightarrow (E, N_2) \\ x \longmapsto x \end{array} \right.$$

est  $\beta$ -lipschitzienne, donc continue. Par suite si  $U_2$  est un ouvert de  $E$  pour la norme  $N_2$  :

$$\left( \text{id}_{N_1}^{N_2} \right)^{-1} (U_2) = U_2$$

est un ouvert de  $E$  pour la norme  $N_1$  (image réciproque d'un ouvert par une application continue). De même, l'application linéaire :

$$\text{id}_{N_2}^{N_1} \left| \begin{array}{ccc} (E, N_2) & \longrightarrow & (E, N_1) \\ x & \longmapsto & x \end{array} \right.$$

est  $\frac{1}{\alpha}$ -lipschitzienne, donc continue. Par suite si  $U_1$  est un ouvert de  $E$  pour la norme  $N_1$  :

$$\left(\text{id}_{N_2}^{N_1}\right)^{-1}(U_1) = U_1$$

est un ouvert de  $E$  pour la norme  $N_2$  (image réciproque d'un ouvert par une application continue). □

Pour étudier une propriété topologique sur un espace vectoriel normé  $(E, \|\cdot\|_E)$ , on peut donc remplacer la norme  $\|\cdot\|_E$  par une autre norme sur  $E$  qui est équivalente à  $\|\cdot\|_E$ .

**Corollaire 31.** — Soient  $F$  un  $\mathbf{K}$ -espace vectoriel,  $\|\cdot\|_E, N_E$  deux normes équivalentes sur  $E$ ,  $\|\cdot\|_F, N_F$  deux normes équivalentes sur  $F$  et  $f : E \longrightarrow F$  une application. Alors :

$$f : (E, \|\cdot\|_E) \longrightarrow (F, \|\cdot\|_F) \text{ est continue} \iff f : (E, N_E) \longrightarrow (F, N_F) \text{ est continue} .$$

### 3. Espaces vectoriels normés de dimension finie

#### 3.1. Équivalence des normes sur un espace de dimension finie

**Théorème 32.** — Toutes les normes sur  $\mathbf{K}^n$  sont équivalentes.

*Démonstration.* Nous notons  $\mathcal{B}_0 = (e_1, \dots, e_n)$  la base canonique de  $\mathbf{K}^n$  et considérons une norme  $N$  sur cet espace.

- La norme  $\|\cdot\|_\infty$  domine la norme  $N$ . — On vérifie :

$$\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{K}^n \quad N(x) = N\left(\sum_{k=1}^n x_k e_k\right) \leq \sum_{k=1}^n \underbrace{|x_k|}_{\leq \|x\|_\infty} N(e_k) \leq \underbrace{\left(\sum_{k=1}^n N(e_k)\right)}_{=: \beta > 0} \|x\|_\infty .$$

- Compacité de la sphère unité de  $(\mathbf{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$ . — La sphère unité de  $(\mathbf{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$  :

$$S := \{x \in \mathbf{K}^n : \|x\|_\infty = 1\}$$

est fermée, bornée dans  $(\mathbf{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$ , donc compacte dans  $(\mathbf{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$  (caractérisation des compacts de  $(\mathbf{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$ ).

- La norme  $N$  induit une application numérique continue sur  $(\mathbf{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$ . — De l'inégalité  $N \leq \alpha \|\cdot\|_\infty$  déjà obtenue, nous déduisons la continuité de l'application linéaire :

$$f \left| \begin{array}{ccc} (\mathbf{K}^n, \|\cdot\|_\infty) & \longrightarrow & (\mathbf{K}^n, N) \\ x & \longmapsto & x \end{array} \right.$$

est continue. Composée avec l'application 1-lipschitzienne (seconde inégalité triangulaire pour la norme  $N$ ) :

$$N \left| \begin{array}{ccc} (\mathbf{K}^n, N) & \longrightarrow & (\mathbf{R}, |\cdot|) \\ x & \longmapsto & N(x) \end{array} \right.$$

nous obtenons l'application continue :

$$N \circ f \left| \begin{array}{ccc} (\mathbf{K}^n, \|\cdot\|_\infty) & \longrightarrow & (\mathbf{R}, |\cdot|) \\ x & \longmapsto & N(x) \end{array} \right.$$

- La norme  $N$  domine la norme  $\|\cdot\|_\infty$ . — D'après le théorème des bornes atteintes, appliqué à la restriction de l'application continue  $N \circ f : (\mathbf{K}^n, \|\cdot\|_\infty) \longrightarrow (\mathbf{R}, |\cdot|)$  à la partie compacte  $S$  de dans  $(\mathbf{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$  :

$$(\star) \quad \exists x_m \in S \quad \forall x \in S \quad \underbrace{N(x_m)}_{=: \alpha} \leq N(x).$$

Par séparation de la norme  $N$ ,  $N(x_m) > 0$  ( $x_m \neq 0_E$  car sur la sphère unité pour la norme  $\|\cdot\|_\infty$ ). Nous déduisons de  $(\star)$  que :

$$\forall x \in E \quad \alpha \|x\|_\infty \leq N(x) .$$

- Les normes  $N$  et  $\|\cdot\|_\infty$  sont équivalentes. — Comme nous avons construit des constantes  $\alpha > 0$  et  $\beta > 0$  telles que :

$$\alpha \|\cdot\|_\infty \leq N(\cdot) \leq \beta \|\cdot\|_\infty$$

les normes  $N$  et  $\|\cdot\|_\infty$  sont équivalentes.

D'après l'étude précédente, si  $N_1$  et  $N_2$  sont deux normes sur  $\mathbf{K}^n$ , alors elles sont équivalentes à  $\|\cdot\|_\infty$ . Comme la relation « être équivalentes » définie sur l'ensemble des normes de  $\mathbf{K}^n$  est une relation d'équivalence, les normes  $N_1$  et  $N_2$  sont équivalentes. □

**Corollaire 33.** — Toutes les normes sur un  $\mathbf{K}$ -espace vectoriel de dimension finie sont équivalentes.

*Démonstration.* Soient  $E$  un  $\mathbf{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n \geq 1$  et deux normes  $N_1$  et  $N_2$  sur  $E$ .

- Identification de  $E$  et de  $\mathbf{K}^n$  au moyen d'une base de  $E$ . — Considérons une base  $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_n)$  de  $E$ . Les applications :

$$\varphi \left| \begin{array}{l} \mathbf{K}^n \longrightarrow E \\ (x_1, \dots, x_n) \longmapsto \sum_{k=1}^n x_k u_k \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \psi \left| \begin{array}{l} E \longrightarrow \mathbf{K}^n \\ x \longmapsto \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x)^\top \end{array} \right.$$

sont des isomorphismes réciproques l'un de l'autre.

- Les normes  $N_1$  et  $N_2$  induisent des normes sur  $\mathbf{K}^n$  via l'identification avec  $E$ . — On vérifie que les applications :

$$N_1 \circ \varphi \left| \begin{array}{l} \mathbf{K}^n \longrightarrow \mathbf{R}_+ \\ (x_1, \dots, x_n) \longmapsto N_1 \left( \sum_{k=1}^n x_k u_k \right) \end{array} \right. \quad \text{et} \quad N_2 \circ \varphi \left| \begin{array}{l} \mathbf{K}^n \longrightarrow \mathbf{R}_+ \\ (x_1, \dots, x_n) \longmapsto N_2 \left( \sum_{k=1}^n x_k u_k \right) \end{array} \right.$$

sont deux normes sur  $\mathbf{K}^n$ , en prenant appui sur la séparation, l'homogénéité, l'inégalité triangulaire pour les normes  $N_1, N_2$  et le fait que  $\varphi$  est un isomorphisme.

- Les normes  $N_1$  et  $N_2$  sont équivalentes. — D'après le théorème 32 :

$$\exists (\alpha, \beta) \in \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}_+^* \quad \forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{K}^n \quad \alpha N_1(\varphi(x_1, \dots, x_n)) \leq N_2(\varphi(x_1, \dots, x_n)) \leq \beta N_1(\varphi(x_1, \dots, x_n)).$$

La surjectivité de  $\varphi$  entraîne que :

$$\forall x \in E \quad \alpha N_1(x) \leq N_2(x) \leq \beta N_1(x).$$

Les normes  $N_1$  et  $N_2$  sont donc équivalentes. □

### 3.2. Caractère intrinsèque des notions topologiques sur un espace de dimension finie

**Corollaire 34.** — Soit  $E$  un  $\mathbf{K}$ -espace vectoriel normé de dimension finie.

- (a) La convergence d'une suite de vecteurs de  $E$ , ainsi que sa limite éventuelle, ne dépendent pas de la norme placée sur  $E$ .
- (b) La notion de partie ouverte de  $E$  ne dépend pas de la norme placée sur  $E$ .
- (c) La notion de partie fermée de  $E$  ne dépend pas de la norme placée sur  $E$ .
- (d) La notion de partie bornée de  $E$  ne dépend pas de la norme placée sur  $E$ .
- (e) La notion de partie compacte de  $E$  ne dépend pas de la norme placée sur  $E$ .
- (f) La notion d'adhérence d'une partie de  $E$  ne dépend pas de la norme placée sur  $E$ .
- (g) La notion de partie dense dans  $E$  ne dépend pas de la norme placée sur  $E$ .
- (h) La notion d'intérieur d'une partie de  $E$  ne dépend pas de la norme placée sur  $E$ .
- (i) La notion de frontière d'une partie de  $E$  ne dépend pas de la norme placée sur  $E$ .

**Remarque 35.** — Soit  $E$  un  $\mathbf{K}$ -espace vectoriel normé de dimension finie.

1. Si  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  est une base de  $E$ , alors

$$N_{\mathcal{B}} \left| \begin{array}{l} E \longrightarrow \mathbf{R}_+ \\ x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \longmapsto \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} |x_i| \end{array} \right.$$

est une norme sur  $E$ . Aussi existe-t-il une norme sur  $E$ .

2. Puisque les propriétés topologiques de  $E$  ne dépendent pas de la norme placée sur  $E$ , on n'indique généralement pas quelle norme on considère sur  $E$ . Par exemple, si une suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de vecteurs de  $E$  converge vers un vecteur  $\ell$  de  $E$ , on note :

$$x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{E} \ell \quad [\text{sans mentionner de norme}] .$$



Pour étudier une propriété topologique sur un  $\mathbf{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $E$ , on peut considérer la norme de notre choix sur  $E$ . Cette souplesse est parfois commode, à condition d'avoir une certaine culture des normes existantes, sur des espaces de dimension finie « usuels » par exemple.

### 3.3. Convergence des suites dans un espace de dimension finie

*Notation.* — On considère un  $\mathbf{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $E$  et une base  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  de  $E$ .

**Rappel 36.** — Pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on définit  $e_i^*$  comme étant l'unique forme linéaire sur  $E$  telle que :

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad e_i^*(e_j) = \delta_{i,j}$$

i.e. :

$$e_i^* \left| \begin{array}{l} E \longrightarrow \mathbf{K} \\ \sum_{j=1}^n x_j e_j \longmapsto x_i \end{array} \right. \quad [\text{application } i\text{-ème coordonnée dans la base } \mathcal{B}] .$$

Alors  $\mathcal{B}^* := (e_1^*, \dots, e_n^*)$  est une base de  $\mathcal{L}(E, \mathbf{K})$ , appelée base duale de la base  $\mathcal{B}$ .

**Proposition 37.** — Soient  $E$  un  $\mathbf{K}$ -espace vectoriel de dimension finie,  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ ,  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$  et  $\ell \in E$ .

$$x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{E} \ell \iff \underbrace{\left( \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad e_i^*(x_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathbf{K}} e_i^*(\ell) \right)}_{\text{convergence coordonnée par coordonnée dans la base } \mathcal{B}}$$

### 3.4. Compacité dans un espace de dimension finie

**Théorème 38.** — Soit  $A$  une partie d'un  $\mathbf{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $E$ . Alors

$$A \text{ est compacte} \iff A \text{ est fermée et bornée.}$$

*Démonstration.* L'implication directe a déjà été établie. Nous ne considérons donc que l'implication réciproque.

- *Construction d'une norme  $N_\infty$  sur  $E$  et identification des espaces vectoriels normés  $(E, N_\infty)$  et  $(\mathbf{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$ .* — Soit  $(e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ . On considère la norme  $N_\infty$  sur  $E$  définie par :

$$N_\infty \left| \begin{array}{l} E \longrightarrow \mathbf{R}_+ \\ x \longmapsto \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} |e_i^*(x)| \end{array} \right. .$$

Les applications :

$$f \left| \begin{array}{l} (E, N_\infty) \longrightarrow (\mathbf{K}^n, \|\cdot\|_\infty) \\ x \longmapsto (e_1^*(x), \dots, e_n^*(x)) \end{array} \right. \quad \text{et} \quad g \left| \begin{array}{l} (\mathbf{R}^n, \|\cdot\|_\infty) \longrightarrow (E, N_\infty) \\ (x_1, \dots, x_n) \longmapsto \sum_{i=1}^n x_i e_i \end{array} \right.$$

sont des isométries vectorielles (isomorphismes préservant les normes) réciproques d'une de l'autre. Elles sont en particulier continues, puisque 1-lipschitziennes.

- *Application de la caractérisation des compacts de  $(\mathbf{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$ .* — Soit  $A$  une partie fermée et bornée de  $E$  (pour toute norme sur  $E$ , en particulier pour la norme  $N_\infty$ ). Comme  $f$  est une isométrie vectorielle,  $f(A)$  est une partie fermée et bornée de  $(\mathbf{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$ . Nous savons alors que  $f(A)$  est une partie compacte de  $(\mathbf{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$  (caractérisation des compacts de  $(\mathbf{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$ ). Nous en déduisons que :

$$A = g(f(A))$$

est une partie compacte de  $(E, N_\infty)$  (image continue d'un compact).

□

**Exemple 39.** — Le groupe orthogonal :

$$\mathbf{O}_n(\mathbf{R}) := \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) : A^\top A = I_n\}$$

est une partie compacte de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ . D'après le théorème 38, il suffit de montrer que  $\mathbf{O}_n(\mathbf{R})$  est une partie fermée et bornée de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$  (pour une norme quelconque, puisque toutes sont équivalentes).

- **Caractère borné de  $\mathbf{O}_n(\mathbf{R})$ .** — Considérons le produit scalaire usuel  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  sur  $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$  et sa norme  $\|\cdot\|$  associée :

$$\langle \cdot, \cdot \rangle \left| \begin{array}{l} \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \longrightarrow \mathbf{R} \\ (A, B) \longmapsto \text{tr}(A^\top B) \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \|\cdot\|_2 \left| \begin{array}{l} \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \longrightarrow \mathbf{R}_+ \\ A \longmapsto \sqrt{\langle A, A \rangle} \end{array} \right.$$

Comme la norme  $\|\cdot\|_2$  de toute matrice de  $\mathbf{O}_n(\mathbf{R})$  vaut  $\sqrt{n}$ ,  $\mathbf{O}_n(\mathbf{R})$  est une partie bornée de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ .

- **Continuité de l'application  $f : A \in \mathbf{O}_n(\mathbf{R}) \mapsto A \times A^\top \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ .** — Nous établissons que l'application :

$$f \left| \begin{array}{l} \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \\ A \longmapsto A \times A^\top \end{array} \right.$$

est continue, à l'aide de la caractérisation séquentielle.

Soit  $(A_k)_{k \in \mathbf{N}}$  est une suite de matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$  qui converge vers une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$  (au sens d'une norme quelconque, donc en particulier au sens de la norme produit  $\|\cdot\|_\infty$ ). Alors :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2 \quad [A_k]_{i,j} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{\mathbf{R}} [A]_{i,j}.$$

Grâce aux théorèmes d'opérations sur les suites numériques convergentes, nous en déduisons que, pour tout  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$  :

$$[f(A_k)]_{i,j} = [A_k \times A_k^\top]_{i,j} = \sum_{\ell=1}^n [A_k]_{i,\ell} \times [A_k]_{j,\ell} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{\mathbf{R}} \sum_{\ell=1}^n [A]_{i,\ell} \times [A]_{j,\ell} = [A \times A^\top]_{i,j} = [f(A)]_{i,j}.$$

Ainsi la suite de matrices  $(f(A_k))_{k \in \mathbf{N}}$  converge vers la matrice  $f(A)$  au sens de la norme produit  $\|\cdot\|_\infty$ , donc au sens d'une norme quelconque.

- **Caractère fermé de  $\mathbf{O}_n(\mathbf{R})$ .** — Comme :

$$\mathbf{O}_n(\mathbf{R}) = f^{-1}(\{I_n\})$$

la partie  $\mathbf{O}_n(\mathbf{R})$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$  est fermée (image réciproque d'un fermé par une application continue).

### 3.5. Suite bornée ayant une unique valeur d'adhérence dans un espace de dimension finie

**Théorème 40.** — Soit  $E$  un  $\mathbf{K}$ -espace de dimension finie et  $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$  une suite bornée de vecteurs de  $E$ . Si la suite  $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$  possède une unique valeur d'adhérence dans  $E$  alors elle converge dans  $E$ .

### 3.6. Caractère fermé d'un sous-espace de dimension finie

**Théorème 41.** — Soient  $(E, N)$  un  $\mathbf{K}$ -espace vectoriel normé (non nécessairement de dimension finie) et  $F$  un sous-espace vectoriel de dimension finie de  $E$ . Alors  $F$  est une partie fermée de  $E$ .

*Démonstration.* Notons  $N_F$  la norme sur  $F$  induite par la norme  $N$  sur  $E$ , i.e.

$$N_F \left| \begin{array}{l} F \longrightarrow \mathbf{R}_+ \\ x \longmapsto N(x) \end{array} \right.$$

Soient  $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$  une suite de vecteurs de  $F$  et  $x$  un vecteur de  $E$  tels que :

$$x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{N} x. \tag{2}$$

Nous démontrons que  $x \in F$  (caractérisation séquentielle des fermés).

La suite  $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$  est convergente donc bornée, i.e. :

$$\exists r > 0 \quad \forall n \in \mathbf{N} \quad \underbrace{N(x_n)}_{N_F(x_n)} \leq r.$$

Ainsi :

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad x_n \in \{y \in F : N_F(y) \leq r\} = \overline{B_{N_F}(0, r)}. \quad [\text{boule fermée dans } F \text{ pour la norme } N_F]$$

Comme  $F$  est un espace de dimension finie, le théorème 38 nous livre que la partie  $\overline{B_{N_F}(0, r)}$  est compacte (pour la norme  $N_F$  ou pour toute norme sur  $F$ ). Il existe donc une application  $\varphi : \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{N}$  strictement croissante et  $x_F \in F$  tels que :

$$x_{\varphi(n)} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{N_F \text{ ou } N} x_F. \tag{3}$$

Or (2) implique :

$$x_{\varphi(n)} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{N} x. \tag{4}$$

De (3), (4) et de l'unicité de la limite de la suite  $(x_{\varphi(n)})_{n \in \mathbf{N}}$  qui converge dans  $(E, N)$ , nous déduisons que  $x = x_F \in F$ . □

Un sous-espace vectoriel  $F$  d'un  $\mathbf{K}$ -espace vectoriel normé  $(E, N)$  n'est pas nécessairement fermé. En effet, si  $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbf{R})$ ,  $N = \|\cdot\|_1$  alors la forme linéaire non nulle :



$$\text{Eval}_0 \left| \begin{array}{l} (E, N) \longrightarrow \mathbf{R} \\ f \longmapsto f(0) \end{array} \right.$$

est discontinue (exercice 6). Ainsi  $F := \text{Ker}(\text{Eval}_0)$  est un hyperplan de  $E$  qui est dense dans  $E$  (exercice 7) donc non fermé dans  $E$ .

**Exemple 42.** — Soient  $\|\cdot\|$  une norme sur  $\mathbf{K}[X]$  et  $n \in \mathbf{N}$ . Le sous-espace  $\mathbf{K}_n[X]$  est fermé dans  $(\mathbf{K}[X], \|\cdot\|)$ .

### 3.7. Continuité d'une application linéaire donc la source est un espace de dimension finie

**Théorème 43.** — Soient  $E$  un  $\mathbf{K}$ -espace vectoriel de dimension finie,  $(F, N_F)$  un  $\mathbf{K}$ -espace vectoriel normé (non nécessairement de dimension finie) et  $u \in \mathcal{L}(E, F)$ . Alors  $u$  est continue.

*Démonstration.*

- De la norme placée sur  $E$ . — Comme  $E$  est de dimension finie, toutes les normes sur  $E$  sont équivalentes. La continuité de  $u$  ne dépend donc pas du choix de la norme sur  $E$ .
- Choix d'une norme sur  $E$ . — Fixons une base  $(e_1, \dots, e_n)$  de  $E$  et considérons la norme  $N_E$  sur  $E$  définie par :

$$N_E \left| \begin{array}{l} E \longrightarrow \mathbf{R}_+ \\ x \longmapsto \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} |e_i^*(x)| \end{array} \right.$$

- Continuité de l'application  $u : (E, N_E) \longrightarrow (F, N_F)$ . — Pour tout vecteur  $x \in E$

$$N_F(u(x)) = N_F\left(u\left(\sum_{i=1}^n e_i^*(x) e_i\right)\right) = N_F\left(\sum_{i=1}^n e_i^*(x) u(e_i)\right) \leq \sum_{i=1}^n \underbrace{|e_i^*(x)|}_{\leq N_E(x)} N_F(u(e_i)) \leq \underbrace{\left(\sum_{i=1}^n N_F(u(e_i))\right)}_{\text{indépendant de } x} N_E(x)$$

L'application  $u : (E, N_E) \longrightarrow (F, N_F)$  est donc continue. □

**Corollaire 44.** — Si  $E$  et  $F$  sont deux  $\mathbf{K}$ -espaces vectoriels de dimension finie, alors :

$$\mathcal{L}_c(E, F) = \mathcal{L}(E, F).$$

**Exercice 45.** — On munit  $\mathbf{R}[X]$  de la norme  $\|\cdot\|_\infty$  et on considère l'application :

$$\varphi \left| \begin{array}{l} \mathbf{R}[X] \longrightarrow \mathbf{R} \\ P \longmapsto P'(1) \end{array} \right.$$

1. Démontrer que l'application  $\varphi$  est discontinue.
2. Justifier que, pour tout  $n \in \mathbf{N}$ , l'application :

$$\varphi|_{\mathbf{R}_n[X]} \left| \begin{array}{l} \mathbf{R}_n[X] \longrightarrow \mathbf{R} \\ P \longmapsto P'(1) \end{array} \right.$$

est continue.

### 3.8. Norme subordonnée d'une matrice carrée

**Proposition 46.** — Soient  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$  et  $\|\cdot\|$  une norme sur  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ .

1. L'application :

$$\varphi_A \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}) \\ X & \longmapsto & AX \end{array} \right.$$

est continue.

2. On appelle norme subordonnée de  $A$  à la norme  $\|\cdot\|$  le nombre réel :

$$\| \|A\| \| := \| \varphi_A \| := \sup \{ \|AX\| : X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}) \text{ et } \|X\| \leq 1 \} = \sup \{ \|AX\| : X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}) \text{ et } \|X\| = 1 \} .$$

3. L'application :

$$\| \cdot \| \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) & \longrightarrow & \mathbf{R}_+ \\ A & \longmapsto & \| \|A\| \| \end{array} \right.$$

est une norme sur  $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ .

**Exercice 47.** — On munit  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{C})$  de la norme  $\|\cdot\|_\infty$ . Démontrer que :

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C}) \quad \| \|A\| \| = \max \left\{ \sum_{j=1}^n |[A]_{i,j}| : i \in \llbracket 1, n \rrbracket \right\} .$$

### 3.9. Inégalités pour les normes subordonnées de matrices carrées

**Corollaire 48.** — Soient  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$  et  $\|\cdot\|$  une norme sur  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ .

1.  $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \quad \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R}) \quad \|AX\| \leq \| \|A\| \| \times \|X\|$

2.  $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})^2 \quad \| \|AB\| \| \leq \| \|A\| \| \times \| \|B\| \| \quad [\text{sous-multiplicativité de la norme } \|\cdot\|]$

**Exercice 49.** — Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$  une matrice diagonalisable telle que :

$$\underbrace{\rho(A)}_{\text{rayon spectral de } A} := \max \{ |\lambda| : \lambda \in \text{Spec}_{\mathbf{C}}(A) \} < 1 .$$

Démontrer que :

$$A^k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0_{\mathcal{M}_n(\mathbf{C})} .$$

### 3.10. Continuité des applications polynomiales sur un espace de dimension finie

**Théorème 50.** — Soient un  $\mathbf{K}$ -espace vectoriel de dimension finie,  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$  et  $(a_{i_1, \dots, i_n})_{(i_1, \dots, i_n) \in \mathbf{N}^n}$  une famille presque nulle d'éléments de  $\mathbf{K}$ . Alors l'application polynomiale :

$$f \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbf{K} \\ x & \longmapsto & \sum_{(i_1, \dots, i_n) \in \mathbf{N}^n} a_{i_1, \dots, i_n} e_1^*(x)^{i_1} \dots e_n^*(x)^{i_n} \end{array} \right.$$

est continue.

*Démonstration.* On s'appuie sur la caractérisation séquentielle de la continuité. Soit  $x \in E$  et  $(x_k)_{k \in \mathbf{N}} \in E^{\mathbf{N}}$  telle que :

$$x_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} x .$$

D'après la proposition 37 :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad e_i^*(x_k) \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} e_i^*(x) .$$

Par théorème d'opérations sur les limites de suites numériques convergentes :

$$f(x_k) = \sum_{(i_1, \dots, i_n) \in \mathbf{N}^n} a_{i_1, \dots, i_n} e_1^*(x_k)^{i_1} \dots e_n^*(x_k)^{i_n} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} \sum_{(i_1, \dots, i_n) \in \mathbf{N}^n} a_{i_1, \dots, i_n} e_1^*(x)^{i_1} \dots e_n^*(x)^{i_n} = f(x) .$$

□

**Corollaire 51.** — *L'application déterminant :*

$$\det \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) & \longrightarrow & \mathbf{K} \\ A & \longmapsto & \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \times [A]_{1,\sigma(1)} \times \dots \times [A]_{n,\sigma(n)} \end{array} \right.$$

est continue.

*Démonstration.* Remarquons que toutes les normes sur  $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$  sont équivalentes ( $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$  est de dimension finie. Il n'est donc pas nécessaire de préciser quelle norme est placée sur  $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ ).

- *Une première démonstration basée sur le caractère  $n$ -linéaire du déterminant.* — En identifiant les espaces vectoriels normés  $(\mathcal{M}_n(\mathbf{K}), \|\cdot\|_\infty)$  et  $(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})^n, \|\cdot\|)$ , où  $\|\cdot\|$  est la norme produit obtenue en munissant chacune des copies de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$  de la norme  $\|\cdot\|_\infty$ , nous avons pris appui sur le caractère  $n$ -linéaire (par rapport aux colonnes) du déterminant pour démontrer que l'application :

$$\det \left| \begin{array}{ccc} (\mathcal{M}_n(\mathbf{K}), \|\cdot\|_\infty) & \longrightarrow & (\mathbf{K}, |\cdot|) \\ A & \longmapsto & \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \times [A]_{1,\sigma(1)} \times \dots \times [A]_{n,\sigma(n)} \end{array} \right.$$

est continue (cf. corollaire 20).

- *Une deuxième démonstration basée sur le caractère polynomial du déterminant.* — Notons  $(E_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1,n \rrbracket^2}$  la base canonique de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ . Sa base duale  $(E_{i,j}^*)_{(i,j) \in \llbracket 1,n \rrbracket^2}$  vérifie :

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \quad \forall (i,j) \in \llbracket 1,n \rrbracket^2 \quad E_{i,j}^*(A) = [A]_{i,j} \quad [\text{coefficient d'adresse } (i,j) \text{ de la matrice } A].$$

L'application déterminant s'écrit :

$$\det \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) & \longrightarrow & \mathbf{K} \\ A & \longmapsto & \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \times E_{1,\sigma(1)}^*(A) \times \dots \times E_{n,\sigma(n)}^*(A) \end{array} \right.$$

et est donc polynomiale. Comme  $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$  est de dimension finie, l'application  $\det$  est continue (théorème 50). □

### 3.11. Applications multilinéaires sur un produit d'espaces de dimension finie

**Théorème 52.** — *Soient  $E_1, \dots, E_n$  des  $\mathbf{K}$ -espaces vectoriels de dimension finie et si  $(F, \|\cdot\|)$  est un  $\mathbf{K}$ -espace vectoriel normé, alors toute application multilinéaire  $f : E_1 \times \dots \times E_n \longrightarrow F$  est continue.*

**Corollaire 53.** — *L'application bilinéaire :*

$$\left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \times \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \\ (A, B) & \longmapsto & AB \end{array} \right.$$

est continue.

**Corollaire 54.** — *Soient  $E, F, G$  des  $\mathbf{K}$ -espaces vectoriels de dimension finie. L'application bilinéaire :*

$$\left| \begin{array}{ccc} \mathcal{L}(F, G) \times \mathcal{L}(E, F) & \longrightarrow & \mathcal{L}(E, G) \\ (v, u) & \longmapsto & v \circ u \end{array} \right.$$

est continue.