Espaces vectoriels normés 2

Notation. — Dans ce chapitre, $\mathbf{K}$ désigne le corps $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$ et $(E, ||\cdot||)$ est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel normé.

1. Complément sur la notion de valeur d'adhérence

Définition 1. — *Soient $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'éléments de E et x un vecteur de E. On dit que x est une valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ s'il existe une suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ qui converge vers x, i.e. si :*

$$\exists\, \varphi : \mathbf{N} \to \mathbf{N} \nearrow\!\!\nearrow \qquad u_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} x\,.$$

La proposition suivante éclaire le concept de valeur d'adhérence et fournit des outils pratiques pour étudier les valeurs d'adhérence d'une suite.

Proposition 2. — *Soient $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'éléments de E et x un vecteur de E. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. *Le vecteur x est une valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$.*
2. $\forall\,\varepsilon > 0 \quad \forall\, N \in \mathbf{N} \quad \exists\, n \geqslant N \quad ||u_n - x|| \leqslant \varepsilon$ *[comparer à la définition de la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ vers x]*
3. *Pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble d'indices $\{n \in \mathbf{N} \,:\, ||u_n - x|| \leqslant \varepsilon\}$ est infini.*

Démonstration.

(a) *L'implication 1 $\Longrightarrow$ 2.* — Supposons que x soit une valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$. Alors il existe une application $\varphi : \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{N}$ strictement croissante telle que

$$u_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} x\,. \tag{1}$$

Soient un réel $\varepsilon > 0$ et un entier $N \geqslant 0$. D'après (1) :

$$\exists\, n_0 \in \mathbf{N} \quad \forall\, n \geqslant n_0 \quad \left|\left|u_{\varphi(n)} - x\right|\right| \leqslant \varepsilon\,. \tag{2}$$

Posons $n = \varphi(\max\{N, n_0\}) \geqslant \max\{N, n_0\}$. Cet entier n est plus grand que N et comme il est également plus grand que n_0, nous déduisons de (2) l'inégalité :

$$||u_n - x|| \leqslant \varepsilon\,.$$

(b) *L'implication 2 $\Longrightarrow$ 3.* — Nous raisonnons par contraposée et supposons qu'il existe un réel $\varepsilon > 0$ tel que l'ensemble d'indices $\{n \in \mathbf{N} : ||u_n - x|| \leqslant \varepsilon\}$ est fini. Une partie finie de $\mathbf{N}$ étant majorée, il existe un entier $N \geqslant 1$ tel que :

$$\{n \in \mathbf{N} : ||u_n - x|| \leqslant \varepsilon\} \subset [\![0, N-1]\!] .$$

Donc, pour tout $n \geqslant N$, $||u_n - x|| > \varepsilon$. Nous avons démontré que :

$$\exists\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N \in \mathbf{N} \quad \forall\, n \geqslant N \quad ||u_n - x|| > \varepsilon .$$

La négation de l'assertion 2 est donc établie.

(c) *L'implication 3 $\Longrightarrow$ 1.* — Nous supposons l'assertion (3) vraie et construisons par récurrence une suite d'entiers naturels $(\varphi(n))_{n\in\mathbf{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbf{N}$:

$$\varphi(n) < \varphi(n+1) \quad \text{et} \quad \left|\left| u_{\varphi(n)} - x \right|\right| \leqslant \frac{1}{n+1} .$$

- *Initialisation.* D'après (3), l'ensemble $\{n \in \mathbf{N} : ||u_n - x|| \leqslant 1\}$ est infini, donc non vide. Soit $\varphi(0)$ un élément de cet ensemble, de sorte que :

$$\varphi(0) \in \mathbf{N} \quad \text{et} \quad \left|\left| u_{\varphi(0)} - x \right|\right| \leqslant \frac{1}{0+1} .$$

Toujours d'après (3), l'ensemble $\left\{n \in \mathbf{N} : ||u_n - x|| \leqslant \frac{1}{2}\right\}$ est infini, donc :

$$\left\{n \in \mathbf{N} : ||u_n - x|| \leqslant \frac{1}{2}\right\} \not\subset [\![0, \varphi(0)]\!] .$$

Il existe donc un entier $\varphi(1) > \varphi(0)$ tel que :

$$\left|\left| u_{\varphi(1)} - x \right|\right| \leqslant \frac{1}{1+1} .$$

Nous avons construit deux entiers naturels $\varphi(0)$ et $\varphi(1)$ tels que $\varphi(0) < \varphi(1)$ et :

$$\forall\, k \in \{0, 1\} \quad \left|\left| u_{\varphi(k)} - x \right|\right| \leqslant \frac{1}{k+1} .$$

- *Hérédité.* Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Supposons construits des entiers naturels $\varphi(0), \ldots, \varphi(n)$ tels que $\varphi(0) < \ldots < \varphi(n)$ et :

$$\forall\, k \in \{0, n\} \quad \left|\left| u_{\varphi(k)} - x \right|\right| \leqslant \frac{1}{k+1} .$$

D'après (3), l'ensemble $\left\{n \in \mathbf{N} : ||u_n - x|| \leqslant \frac{1}{n+2}\right\}$ est infini, donc :

$$\left\{n \in \mathbf{N} : ||u_n - x|| \leqslant \frac{1}{n+2}\right\} \not\subset [\![0, \varphi(n)]\!] .$$

Il existe donc un entier $\varphi(n+1) > \varphi(n)$ tel que :

$$\left|\left| u_{\varphi(n+1)} - x \right|\right| \leqslant \frac{1}{n+1+1} .$$

Nous disposons à présent d'entiers naturels $\varphi(0), \ldots, \varphi(n), \varphi(n+1)$ tels que $\varphi(0) < \ldots < \varphi(n) < \varphi(n+1)$ et :

$$\forall\, k \in \{0, n+1\} \quad \left|\left| u_{\varphi(k)} - x \right|\right| \leqslant \frac{1}{k+1} .$$

À cette suite d'entiers $(\varphi(n))_{n\in\mathbf{N}}$ nous associons l'application :

$$\varphi \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{N} & \longrightarrow & \mathbf{N} \\ n & \longmapsto & \varphi(n) \end{array} \right.$$

qui est, par construction, strictement croissante. De plus :

$$\forall\, n \in \mathbf{N} \quad \left|\left| u_{\varphi(n)} - x \right|\right| \leqslant \frac{1}{n+1} .$$

D'après le théorème d'encadrement, $\left|\left| u_{\varphi(n)} - x \right|\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0_{\mathbf{R}}$, i.e. $u_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{||\cdot||} x$.

□

Exercice 3. — Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de nombres réels telle que $u_{n+1} - u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Démontrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est un intervalle de $\mathbf{R}$.

2. Compacité

Notation. — $(E, || \cdot ||)$ désigne un **K**-espace vectoriel normé et A une partie non vide de E.

2.1. Propriété de Bolzano-Weierstraß et définition de la compacité

Définition 4. — *On dit que A vérifie la propriété de Bolzano-Weierstraß si toute suite d'éléments de A possède une valeur-d'adhérence dans A, i.e. si :*

$$\forall\, (a_n)_{n\in\mathbf{N}} \in A^{\mathbf{N}} \quad \exists\, a \in A \quad \exists\, \varphi : \mathbf{N} \to \mathbf{N} \ \nearrow\!\!\nearrow \qquad a_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} a\,.$$

Définition 5. — *On dit que A est une partie compacte de $(E, || \cdot ||_E)$ si A vérifie la propriété de Bolzano-Weierstraß.*

Exemple 6. — Une partie finie de E est compacte.

Exemple 7. — Pour tout $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ tel que $a \leqslant b$, le segment :

$$[a, b] := \{x \in \mathbf{R} \ :\ a \leqslant x \leqslant b\}$$

est compact.

Exemple 8. — Plus généralement, une union finie de parties compactes de E est compacte.

2.2. Une partie compacte est fermée et bornée

Proposition 9. — *Si A est un compact, alors A est fermé et borné.*

♥ Une démonstration de la proposition 9 est à connaître.

Exercice 10. — Soit un entier $n \geqslant 2$. Justifier que $\mathbf{GL}_n(\mathbf{R})$ n'est pas une partie compacte de $(\mathscr{M}_n(\mathbf{K}), || \cdot ||_\infty)$.

Une partie fermée et bornée d'un espace vectoriel normé n'est pas nécessairement compacte, comme l'illustre l'exemple suivant.

Exemple 11. — Considérons l'espace vectoriel normé $(\mathbf{R}[X], || \cdot ||_\infty)$ et sa sphère unité $S(0, 1)$.

1. La suite $(X^n)_{n\in\mathbf{N}} \in S(0,1)^{\mathbf{N}}$ ne possède aucune valeur d'adhérence dans $S(0, 1)$. Démontrons le en raisonnant pas l'absurde. Supposons donc qu'il existe une application $\varphi : \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{N}$ strictement croissante et un polynôme $P \in S(0, 1)$ tels que :
$$X^{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{|| \cdot ||_\infty} P\,.$$
Alors pour tout $n > \deg P$, $\varphi(n) \geqslant n > \deg P$ et donc :
$$1 = \left| \left[X^{\varphi(n)} - P\right]_{\varphi(n)} \right| \leqslant \left|\left|X^{\varphi(n)} - P\right|\right|_\infty\,.$$
En faisant tendre n vers $+\infty$, nous obtenons $1 \leqslant 0$. Contradiction.
2. D'après 1, $S(0, 1)$, qui est une partie fermée et bornée de $(\mathbf{R}[X], || \cdot ||_\infty)$, n'est pas compacte.

Exercice 12. — Considérons l'espace vectoriel normé $\left(\mathscr{C}^0([0, 2\pi], \mathbf{R}), || \cdot ||_\infty\right)$ et sa boule unité fermée $\overline{B(0,1)}$.

1. Démontrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \overline{B(0,1)}^{\mathbf{N}}$ définie par, pour tout $n \in \mathbf{N}$:
$$f_n \left| \begin{array}{ccc} [0, 2\pi] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \sin(nx) \end{array} \right.$$
n'a pas de valeur d'adhérence dans $\overline{B(0,1)}$.
2. Qu'en déduire pour la boule unité fermée $\overline{B(0,1)}$?

Exercice 13. — Munissons le **R**-espace vectoriel $\ell^\infty(\mathbf{R}) := \left\{(u_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}} \ :\ (u_n)_{n\in\mathbf{N}} \text{ est bornée} \right\}$ de la norme :

$$|| \cdot ||_\infty \left| \begin{array}{ccc} \ell^\infty(\mathbf{R}) & \longrightarrow & \mathbf{R}_+ \\ (u_n)_{n\in\mathbf{N}} & \longmapsto & \sup\limits_{n\in\mathbf{N}} |u_n|\,. \end{array} \right.$$

Démontrer que la boule unité fermée de $(\ell^\infty(\mathbf{R}), || \cdot ||_\infty)$ n'est pas compacte.

2.3. Caractérisation des parties compactes de $(\mathbf{K}^n, || \cdot ||_\infty)$

Notation. — La lettre n désigne un entier naturel non nul.

Proposition 14. — *Toute suite bornée de $(\mathbf{K}^n, || \cdot ||_\infty)$ possède une valeur d'adhérence.*

Démonstration. Nous ne considérons que le cas où $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ et raisonnons par récurrence sur l'entier $n \geqslant 1$.

- *Initialisation à $n = 1$.* — L'espace vectoriel normé $\left(\mathbf{R}^1, || \cdot ||_\infty\right)$ coïncide avec $(\mathbf{R}, | \cdot |)$. Le théorème de Bolzano-Weierstraß et le théorème sur le passage à la limite dans une inégalité large livrent le résultat.
- *Hérédité.* — Soit $n \in \mathbf{N}^*$ tel que, toute suite bornée de $(\mathbf{R}^n, || \cdot ||_\infty)$ possède une valeur d'adhérence. Soit $\left(u_k = \left(u_{1,k}, \ldots, u_{n,k}, u_{n+1,k}\right)\right)_{k \in \mathbf{N}}$ une suite d'éléments de $\left(\mathbf{R}^{n+1}, || \cdot ||_\infty\right)$, qui est bornée. Ainsi :

$$\exists M \in \mathbf{R}_+ \quad \forall k \in \mathbf{N} \quad \left|\left|\left(u_{1,k}, \ldots, u_{n,k}, u_{n+1,k}\right)\right|\right|_\infty = \max_{1 \leqslant i \leqslant n+1} \left|u_{i,k}\right| \leqslant M \, . \tag{3}$$

— De (3), nous déduisons :

$$\forall k \in \mathbf{N} \quad \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \left|u_{i,k}\right| \leqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant n+1} \left|u_{i,k}\right| \leqslant M \, .$$

La suite $\left(\left(u_{1,k}, \ldots, u_{n,k}\right)\right)_{k \in \mathbf{N}}$ est donc une suite d'élements de $(\mathbf{R}^n, || \cdot ||_\infty)$ qui est bornée. D'après l'hypothèse de récurrence, il existe une application $\varphi : \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{N}$ strictement croissante et $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ tels que :

$$\left(u_{1,\varphi(k)}, \ldots, u_{n,\varphi(k)}\right) \xrightarrow[k \to +\infty]{|| \cdot ||_\infty} (x_1, \ldots, x_n)$$

i.e. :

$$u_{1,\varphi(k)} \xrightarrow[k \to +\infty]{| \cdot |} x_1 \quad , \quad \ldots \quad , \quad u_{n,\varphi(k)} \xrightarrow[k \to +\infty]{| \cdot |} x_n \, . \tag{4}$$

— D'après (3) :

$$\forall k \in \mathbf{N} \quad \left|u_{n+1,\varphi(k)}\right| \leqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant n+1} \left|u_{i,\varphi(k)}\right| \leqslant M \, .$$

La suite $\left(u_{n+1,\varphi(k)}\right)_{k \in \mathbf{N}}$ de nombres réels est donc bornée. D'après le théorème de Bolzano-Weierstraß, il existe une application $\psi : \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{N}$ strictement croissante et $x_{n+1} \in \mathbf{R}$ tels que :

$$u_{n+1,\varphi(\psi(k))} \xrightarrow[k \to +\infty]{| \cdot |} x_{n+1} \, . \tag{5}$$

— De (4) et (5), nous déduisons :

$$u_{1,\varphi\circ\psi(k)} \xrightarrow[k \to +\infty]{| \cdot |} x_1 \quad , \quad \ldots \quad , \quad u_{n,\varphi\circ\psi(k)} \xrightarrow[k \to +\infty]{| \cdot |} x_n \quad , \quad u_{n+1,\varphi\circ\psi(k)} \xrightarrow[k \to +\infty]{| \cdot |} x_{n+1}$$

i.e. :

$$u_{\varphi\circ\psi(k)} = \left(u_{1,\varphi\circ\psi(k)}, \ldots, u_{n,\varphi\circ\psi(k)}, u_{n+1,\varphi\circ\psi(k)}\right) \xrightarrow[k \to +\infty]{|| \cdot ||_\infty} (x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) \, .$$

□

Théorème 15. — *Une partie de $(\mathbf{K}^n, || \cdot ||_\infty)$ est compacte si et seulement si elle est fermée et bornée.*

Démonstration. L'implication directe a déjà été établie (cf. proposition 9). Pour démontrer l'implication réciproque, nous considérons une partie A de $(\mathbf{K}^n, || \cdot ||_\infty)$, qui est fermée et bornée. Démontrons que A vérifie la propriété de Bolzano-Weierstraß. Soit $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite d'éléments de A.

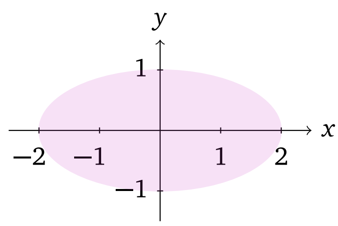
- Comme A est bornée, la suite $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est également bornée. D'après la proposition 14, il existe une application $\varphi : \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{N}$ et un vecteur x de $\mathbf{R}^n$ tels que $a_{\varphi(n)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} x$.
- Comme A est fermée et que les termes de la suite convergente $\left(a_{\varphi(n)}\right)_{n \in \mathbf{N}}$ appartiennent à A, $x = \lim\limits_{n \to +\infty} a_{\varphi(n)} \in A$.

□

***Exercice 16.* —** Démontrer que la partie :

$$K := \left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \; : \; x^2 + 4\,y^2 \leqslant 4\right\}$$

de $\left(\mathbf{R}^2, || \cdot ||_\infty\right)$ est compacte.



Exercice 17. — Soient K une partie compacte de $(\mathbf{K}^n, ||\cdot||_\infty)$.

1. Soit r un réel strictement positif. Démontrer que :
$$K_r := \bigcup_{x \in K} \overline{B(x,r)}$$
est compact.
2. Démontrer qu'il existe $(a,r) \in E \times \mathbf{R}_{>0}$ tel que
   (a) $K \subset \overline{B(a,r)}$;
   (b) pour tout $(a',r') \in E \times \mathbf{R}_{>0}$ tel que $K \subset \overline{B(a',r')}$, $r \leqslant r'$.
   Il existe donc une boule fermée de $(\mathbf{K}^n, ||\cdot||_\infty)$ de rayon minimal qui contient K.

2.4. Caractérisation des parties compactes de $(\mathscr{M}_n(\mathbf{K}), ||\cdot||_\infty)$

Notation. — La lettre n désigne un entier naturel non nul.

Corollaire 18. — *Une partie de $(\mathscr{M}_n(\mathbf{K}), ||\cdot||_\infty)$ est compacte si et seulement si elle est fermée et bornée.*

Démonstration. L'application :
$$f \left| \begin{array}{ccc} (\mathscr{M}_n(\mathbf{K}), ||\cdot||_\infty) & \longrightarrow & (\mathbf{K}^{n^2}, ||\cdot||_\infty) \\ M & \longmapsto & \big([M]_{1,1}, \ldots, [M]_{1,n}, [M]_{2,1}, \ldots, [M]_{2,n}, \ldots, [M]_{n,1}, \ldots, [M]_{n,n}\big) \end{array} \right.$$
est un isomorphisme qui préserve les normes, i.e. :
$$\forall\, M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K}) \quad ||f(M)||_\infty = ||M||_\infty \ .$$
Une partie A de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ est donc bornée (resp. fermée, compacte) si et seulement si la partie $f(A)$ de $\mathbf{K}^{n^2}$ est bornée (resp. fermée, compacte). Le résultat est donc conséquence du théorème 15. □

Exercice 19. — Notons :
$$\mathbf{O}_n(\mathbf{R}) := \left\{A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R}) \ : \ AA^\top = I_n\right\} \qquad [\text{groupe orthogonal}] \ .$$

1. Démontrer que $\mathbf{O}_n(\mathbf{R})$ est un sous-groupe de $(\mathbf{GL}_n(\mathbf{R}), \times)$.
2. Démontrer que le groupe $(\mathbf{O}_n(\mathbf{R}), \times)$ est compact.

2.5. Un fermé relatif d'un compact est compact

Proposition 20. — *Supposons A compacte et considérons une partie B de A. Alors B est compact si et seulement si B est un fermé relatif de A.*

♥ Une démonstration de la proposition 20 est à connaître.

Exercice 21. — Notons :
$$\mathbf{SO}_n(\mathbf{R}) := \{A \in \mathbf{O}_n(\mathbf{R}) \ : \ \det A = 1\} \qquad [\text{groupe spécial orthogonal}] \ .$$

1. Démontrer que $\mathbf{SO}_n(\mathbf{R})$ est un sous-groupe de $(\mathbf{O}_n(\mathbf{R}), \times)$.
2. Démontrer que le groupe $(\mathbf{SO}_n(\mathbf{R}), \times)$ est compact.

2.6. CNS de convergence pour une suite d'éléments d'un compact

Proposition 22. — *Supposons A compacte et considérons une suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}} \in A^{\mathbf{N}}$. Alors la suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge si et seulement si elle amdet une unique valeur d'adhérence.*

Exercice 23. — Soit $d \in \mathbf{N}^*$, $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de vecteurs de $\left(\mathbf{K}^d, ||\cdot||_\infty\right)$ qui est bornée et qui vérifie :

$$u_n + \frac{1}{2}u_{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{||\cdot||} 0_{\mathbf{K}^d}$$

1. Soit a une valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$. Démontrer que $-2\,a$ est également valeur d'adhérence.
2. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers le vecteur nul de $\mathbf{K}^d$.

Exercice 24. — Soient $(E_1, ||\cdot||_1)$, $(E_2, ||\cdot||_2)$ deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels normés, F_1 une partie fermée de E_1, K_2 une partie compacte de E_2 et $f : F_1 \longrightarrow K_2$ une application. On note :

$$\Gamma := \{(x, f(x)) \;:\; x \in F_1\} \qquad \text{[graphe de l'application } f\text{]}$$

et on munit $E_1 \times E_2$ de la norme N définie par :

$$N \left| \begin{array}{ccc} E_1 \times E_2 & \longrightarrow & \mathbf{R}_+ \\ (x_1, x_2) & \longmapsto & \max\left\{||x_1||_1, ||x_2||_2\right\} \end{array} \right. \qquad \text{[norme produit]}\ .$$

Démontrer que l'application f est continue si et seulement si son graphe Γ est une partie fermée de $(E_1 \times E_2, N)$.

2.7. Produit d'un nombre fini de compacts

Théorème 25. — *Soient $(E_1, N_1), \ldots, (E_n, N_n)$ des $\mathbf{K}$-espaces vectoriels normés. On munit le $\mathbf{K}$-espace vectoriel normé $\prod_{i=1}^{n} E_i$ de la norme :*

$$N \left| \begin{array}{ccc} \prod_{i=1}^{n} E_i & \longrightarrow & \mathbf{R}_+ \\ (x_1, \ldots, x_n) & \longmapsto & \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} N_i(x_i) \end{array} \right. \qquad \text{[norme produit]}\ .$$

Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, soit K_i une partie compacte de (E_i, N_i). Alors $\prod_{i=1}^{n} K_i$ est une partie compacte de $\left(\prod_{i=1}^{n} E_i, N\right)$.

Démonstration. Nous raisonnons par récurrence sur l'entier $n \geqslant 1$.

- *Initialisation à $n = 1$.* — L'assertion est claire.
- *Hérédité.* — Soit $n \in \mathbf{N}^*$ tel que tout produit de n compacts de n $\mathbf{K}$-espace vectoriels normés soit une partie compacte de leur espace produit. Soit $(E_1, N_1), \ldots, (E_n, N_n), (E_{n+1}, N_{n+1})$ des $\mathbf{K}$-espaces vectoriels normés. Pour tout $i \in [\![1, n+1]\!]$, soit K_i une partie compacte de (E_i, N_i).

  Démontrons que $\prod_{i=1}^{n+1} K_i$ est une partie compacte de $\left(\prod_{i=1}^{n+1} E_i, N\right)$. Soit $\left(u_k = \left(u_{1,k}, \ldots, u_{n,k}, u_{n+1,k}\right)\right)_{k\in\mathbf{N}}$ une suite d'éléments de $\prod_{i=1}^{n+1} K_i$.

  — D'après hypothèse de récurrence, $\prod_{i=1}^{n} K_i$ est une partie compacte de $\prod_{i=1}^{n} E_i$. Comme $\left(u_k = \left(u_{1,k}, \ldots, u_{n,k}\right)\right)_{k\in\mathbf{N}}$ est une suite d'éléments de $\prod_{i=1}^{n} E_i$, il existe une application $\varphi : \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{N}$ strictement croissante et $(x_1, \ldots, x_n) \in \prod_{i=1}^{n} E_i$ tels que $\left(u_{1,\varphi(k)}, \ldots, u_{n,\varphi(k)}\right) \xrightarrow[k\to+\infty]{\text{norme produit}} (x_1, \ldots, x_n)$, i.e. :

$$u_{1,\varphi(k)} \xrightarrow[k\to+\infty]{N_1} x_1 \quad , \quad \ldots \quad , \quad u_{n,\varphi(k)} \xrightarrow[k\to+\infty]{N_n} x_n\ . \qquad (6)$$

— La suite $\left(u_{n+1,\varphi(k)}\right)_{k\in\mathbf{N}}$ est une suite du compact K_{n+1} de E_{n+1}. Il existe donc une application $\psi : \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{N}$ strictement croissante et $x_{n+1} \in E_{n+1}$ tels que :

$$u_{n+1,\varphi(\psi(k))} \xrightarrow[k\to+\infty]{N_{n+1}} x_{n+1}\,. \tag{7}$$

— De (6) et (7), nous déduisons :

$$u_{1,\varphi\circ\psi(k)} \xrightarrow[k\to+\infty]{N_1} x_1 \quad , \quad \ldots \quad , \quad u_{n,\varphi\circ\psi(k)} \xrightarrow[k\to+\infty]{N_2} x_n \quad , \quad u_{n+1,\varphi\circ\psi(k)} \xrightarrow[k\to+\infty]{N_{n+1}} x_{n+1}$$

i.e. :

$$u_{\varphi\circ\psi(k)} = \left(u_{1,\varphi\circ\psi(k)}, \ldots, u_{n,\varphi\circ\psi(k)}, u_{n+1,\varphi\circ\psi(k)}\right) \xrightarrow[k\to+\infty]{N} (x_1, \ldots, x_n, x_{n+1})\,.$$

□

Exercice 26. — Démontrer l'équivalence des deux assertions suivantes.

1. La sphère unité $S(0_E, 1) := \{x \in E \ : \ ||x|| = 1\}$ une partie compacte de $(E, ||\cdot||)$.
2. La boule unité fermée $\overline{B(0_E, 1)} := \{x \in E \ : \ ||x|| \leqslant 1\}$ est une partie compacte de $(E, ||\cdot||)$.

Exercice 27. — Si A, B sont des parties non vides de E, on définit la distance entre A et B par :

$$\mathrm{d}(A, B) := \inf\{||a - b|| \ : \ (a, b) \in A \times B\}\,.$$

1. Soient K, L deux parties compactes, non vides et disjointes de E. Démontrer que $\mathrm{d}(K, L) > 0$.
2. Donner deux parties F, G fermées, non vides et disjointes de $\left(\mathbf{R}^2, ||\cdot||_\infty\right)$ telles que $\mathrm{d}(F, G) = 0$.

3. Applications continues sur une partie compacte

Notation. — $(E, ||\cdot||_E)$ désigne un $\mathbf{K}$-espace vectoriel normé et A une partie non vide de E.

3.1. Image continue d'un compact

Théorème 28. — *Soient $(F, ||\cdot||_F)$ un $\mathbf{K}$-espace vectoriel normé et $f \in \mathscr{C}^0(A, F)$. Si A est une partie compacte de $(E, ||\cdot||_E)$, alors :*

$$f(A) := \{f(a) \ : \ a \in A\}$$

est un compact de $(F, ||\cdot||_F)$.

♥ Une démonstration du théorème 28 est à connaître.

3.2. Théorème des bornes atteintes

Corollaire 29. — *Si A est une partie compacte de $(E, ||\cdot||_E)$ et $f \in \mathscr{C}^0(A, \mathbf{R})$, alors f est bornée et atteint ses bornes, i.e. :*

$$\exists\,(x_m, x_M) \in A^2 \quad \forall\, x \in A \quad f(x_m) \leqslant f(x) \leqslant f(x_M)\,.$$

♥ Une démonstration du corollaire 29 est à connaître.

Exercice 30. — On munit $\mathbf{R}^3$ de la norme $||\cdot||_\infty$. Démontrer que l'application :

$$f \left| \begin{array}{ccc} [-1,1]^3 & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (x, y, z) & \longmapsto & x\,\sin(y) + y\,\cos(z) + z^3 \end{array} \right.$$

est bornée et atteint ses bornes.

Exercice 31. — On considère l'espace vectoriel normé $(\mathbf{R}^n, ||\cdot||_\infty)$ et la partie :

$$K := \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n \ : \ x_1 + \ldots + x_n = 1 \text{ et } x_1 \geqslant 0, \ldots, x_n \geqslant 0\} \ .$$

Soit $f : K \longrightarrow \mathbf{R}$ une application continue telle que, pour tout $x \in K$, $f(x) > 0$. Démontrer que :

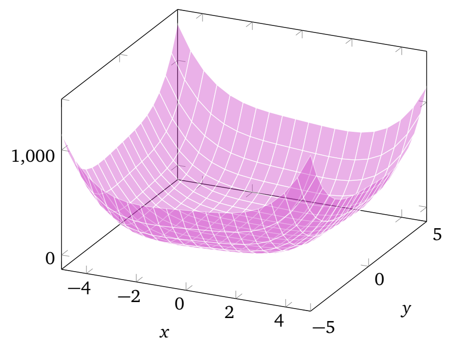
$$\inf\{f(x) \ : \ x \in K\} > 0 \, .$$

3.3. Fonctions coercives

Définition 32. — *Soit $f : E \longrightarrow \mathbf{R}$ une application. On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque $||x||$ tend vers $+\infty$, ce que l'on note $f(x) \xrightarrow[||x|| \to +\infty]{} +\infty$ si*

$$\forall A \in \mathbf{R}_+ \quad \exists R \in \mathbf{R}+ \quad \forall x \in E \quad ||x|| \geqslant R \implies f(x) \geqslant A$$

Exercice 33. — On illustre un des intérêts de la définition 32.



1. On considère l'espace vectoriel normé $(\mathbf{R}^n, ||\cdot||_\infty)$ et une application $f \in \mathscr{C}^0(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$ telle que $f(x) \xrightarrow[||x|| \to +\infty]{} +\infty$. Démontrer que l'application f possède un minimum.
2. Démontrer que l'application :

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x^4 + y^4 - 4xy \end{array} \right.$$

possède un minimum global.

3.4. Théorème de Heine

Théorème 34. — *Soient $(F, ||\cdot||_F)$ un **K**-espace vectoriel normé et $f \in \mathscr{C}^0(A, F)$. Si A est une partie compacte de $(E, ||\cdot||_E)$, alors l'application f est uniformément continue sur A.*

♥ Une démonstration du théorème 34 est à connaître.

4. Connexité par arcs

Notation. — Dans toute cette partie, $(E, ||\cdot||)$ désigne un **K**-espace vectoriel normé et A une partie non vide de E.

4.1. Arc joignant deux points

Définition 35. — *Soit $(a_1, a_2) \in A^2$. Une application arc tracé dans A joignant a_1 à a_2 est une application*

$$\varphi : [\alpha, \beta] \longrightarrow A \text{ telle que } \left\{ \begin{array}{l} \varphi \text{ est continue} \\ \varphi(\alpha) = a_1 \\ \varphi(\beta) = a_2 \end{array} \right.$$

où α et β sont des réels tels que $\alpha < \beta$.

Exemple 36. — Soient $(a, r) \in E \times \mathbf{R}_+^*$ et x_1, x_2 deux points de la boule ouverte $B(a, r)$. Alors l'application

$$\varphi \left| \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & B(a,r) \\ t & \longmapsto & t\,x_1 + (1-t)\,x_2 \end{array} \right. \qquad \text{[application bien définie car } B(a,r) \text{ est convexe]}$$

est un arc tracé dans $B(a, r)$ joignant a à b.

Proposition 37. — *Soient a_1, a_2, a_3 des points de A.*

1. *L'application :*
$$\varphi \left| \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & A \\ t & \longmapsto & a_1 \end{array} \right.$$
est un arc tracé dans A joignant a_1 à a_1.
2. *Supposons qu'il existe un arc $\varphi : [\alpha, \beta] \longrightarrow A$ tracé dans A joignant a_1 à a_2, où α, β sont des réels tels que $\alpha < \beta$. Si ψ est l'application :*
$$\psi \left| \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & [\alpha, \beta] \\ t & \longmapsto & t\,\alpha + (1-t)\,\beta \end{array} \right.$$
alors l'application $\varphi \circ \psi : [0,1] \longrightarrow A$ est un arc tracé dans A joignant a_2 à a_1.
3. *Soient $\varphi_1 : [\alpha_1, \beta_1] \longrightarrow A$ un arc tracé dans A joignant a_1 à a_2 et $\varphi_2 : [\alpha_2, \beta_2] \longrightarrow A$ un arc tracé dans A joignant a_2 à a_3, où $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ sont des réels tels que $\alpha_1 < \alpha_2$. Alors l'application :*
$$\varphi \left| \begin{array}{ccc} [\alpha_1, \beta_1 + \beta_2 - \alpha_2] & \longrightarrow & A \\ t & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{ll} \varphi_1(t) & \text{si } t \leqslant \beta_1 \\ \varphi_2(t - \beta_1 + \alpha_2) & \text{si } t > \beta_1 \end{array} \right. \end{array} \right.$$
est bien définie et est un arc tracé dans A joignant a_1 à a_3.

4.2. Partie connexe par arcs

Définition 38. — *On dit que A est connexe par arcs si, pour tout couple $(a, b) \in A^2$, il existe un arc tracé dans A joignant a à b.*

Exercice 39. — L'intersection de deux parties connexes par arcs est-elle nécessairement connexe par arcs ?

Exercice 40. — Une réunion de deux parties connexes par arcs disjointes peut-elle être connexe par arcs ?

Exercice 41. — Démontrer que le produit de deux parties connexes par arcs est connexe par arcs.

Exercice 42. — L'intérieur d'une partie connexe par arcs est-il nécessairement connexe par arcs ?

Exercice 43. — Démontrer que $\mathbf{C}^*$ est une partie connexe par arcs de $\mathbf{C}$ et en déduire que, pour tout entier $n \geqslant 2$, $\mathbf{GL}_n(\mathbf{C})$ est une partie connexe par arcs de $(\mathscr{M}_n(\mathbf{C}), ||\cdot||_\infty)$.

Exercice 44. — Démontrer que , pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\mathbf{GL}_n(\mathbf{R})$ n'est pas une partie connexe par arcs de $(\mathscr{M}_n(\mathbf{R}), ||\cdot||_\infty)$.

4.3. Les parties convexes sont connexes par arcs

Proposition 45. — *Une partie convexe de E est connexe par arcs.*

Exemple 46. — Une boule de E est une partie connexe par arcs.

Exemple 47. — Un sous-espace vectoriel de E est une partie connexe par arcs.

4.4. Les parties étoilées sont connexes par arcs

Définition 48. — *La partie A est dite étoilée si :*
$$\exists\, a_0 \in A \quad \forall\, a \in A \quad [a_0, a] \subset A\,.$$

Proposition 49. — *Une partie étoilée de E est une partie connexe par arcs.*

Exercice 50. — Démontrer que $A := \left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \ : \ |xy| \leqslant 1\right\}$ est une partie connexe par arcs de $\left(\mathbf{R}^2, ||\cdot||_\infty\right)$.

4.5. Composantes connexes par arcs

***Rappel 51.* —** Un relation $\mathscr{R}$ sur A est appelée relation d'équivalence si elle vérifie les trois propriétés suivantes.

1. $\forall\, a \in A \quad a\,\mathscr{R}\,a$ [réflexivité]
2. $\forall\, (a_1, a_2) \in A^2 \quad a_1\,\mathscr{R}\,a_2 \implies a_2\,\mathscr{R}\,a_1$ [symétrie]
3. $\forall\, (a_1, a_2, a_3) \in A^3 \quad a_1\,\mathscr{R}\,a_2$ et $a_2\,\mathscr{R}\,a_3 \implies a_1\,\mathscr{R}\,a_3$ [transitivité]

Si $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence sur A et $a \in A$, on définit la classe de a par :

$$\overline{a} := \left\{a' \in E \;:\; a\,\mathscr{R}\,a'\right\} \subset A\,.$$

L'ensemble des classes d'équivalence est noté $A/\mathscr{R}$ (ensemble quotient de A par la relation d'équivalence $\mathscr{R}$). Les classes d'équivalence forment une partition de A :

$$A = \bigsqcup_{C \in A/\mathscr{R}} C\,.$$

Proposition 52. — *La relation $\sim$ sur A définie par :*

$$\forall\, (a_1, a_2) \in A^2 \quad a_1 \sim a_2 \;:\Longleftrightarrow\; \textit{il existe un arc tracé dans } A \textit{ joignant } a_1 \textit{ à } a_2$$

est une relation d'équivalence sur A.

Définition 53. — *Une classe d'équivalence pour la relation $\sim$ sur A, introduite dans la proposition 52, est appelée composante connexe par arcs.*

***Remarque 54.* —** Une composante connexe par arcs de A est une partie connexe par arcs de E.

***Remarque 55.* —** Si A est connexe par arcs, alors il ne possède qu'une seule composante connexe par arcs : la partie A toute entière.

***Exercice 56.* —** Quelles sont les composantes connexes de $\mathbf{R}^*$?

***Exercice 57.* —** Soit U une partie ouverte de E. Démontrer que les composantes connexes de U sont des parties ouvertes de E.

***Exercice 58.* —** On rappelle que, d'après l'algorithme du pivot de Gauß, toute matrice de $\mathbf{GL}_n(\mathbf{R})$ s'écrit comme un produit de matrices de transvection ou de dilatation. En déduire que :

$$\mathbf{GL}_n(\mathbf{R})^+ := \{A \in \mathbf{GL}_n(\mathbf{R}) \;:\; \det A > 0\} \qquad \text{et} \qquad \mathbf{GL}_n(\mathbf{R})^- := \{A \in \mathbf{GL}_n(\mathbf{R}) \;:\; \det A < 0\}$$

sont les deux composantes connexes par arcs de $\mathbf{GL}_n(\mathbf{R})$.

4.6. Caractérisation des parties connexes par arcs de R

Proposition 59. — *Une partie A de $\mathbf{R}$ est connexe par arcs si et seulement si A est un intervalle de $\mathbf{R}$.*

4.7. Image continue d'une partie connexe par arcs

Théorème 60. — *Soient $(F, ||\cdot||_F)$ un $\mathbf{K}$-espace vectoriel normé et $f : A \longrightarrow F$ une application continue. Alors :*

$$A \textit{ est connexe par arcs} \quad\implies\quad f(A) \textit{ est connexe par arcs.}$$

***Exercice 61.* —** $\mathrm{SO}_2(\mathbf{R})$ est connexe par arcs Démontrer que :

$$\mathrm{SO}_2(\mathbf{R}) := \left\{A \in \mathscr{M}_2(\mathbf{R}) \;:\; A^\top A = I_2 \text{ et } \det(A) = 1\right\}$$

est connexe par arcs.

***Exercice 62.* —** Deux espaces vectoriels normés (E_1, N_1) et (E_2, N_2) sont dit homéomorphes s'il existe une application $f : E_1 \longrightarrow E_2$ qui est bijective, continue et dont l'application réciproque $f^{-1} : E_2 \longrightarrow E_1$ est également continue. Démontrer que $\mathbf{R}$ et $\mathbf{R}^2$ ne sont pas homéomorphes.

4.8. Généralisation du théorème des valeurs intermédiaires

Corollaire 63. — *Soient une application $f : A \longrightarrow \mathbf{R}$ et a_1, a_2 des points de A.*

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ est continue} \\ A \text{ est connexe par arcs} \\ f(a_1)f(a_2) \leqslant 0 \end{array}\right\} \implies \exists\, a \in A \quad f(a) = 0_{\mathbf{R}}$$

Démonstration. L'image $f(A)$ de A par f est une partie connexe par arcs de $\mathbf{R}$ (théorème 60), donc un intervalle de $\mathbf{R}$ (théorème 59). Comme $f(x_1)$ et $f(x_2)$ sont dans $f(A)$, de signes opposés, 0 appartient aussi dans $f(A)$. Donc $0 \in \mathbf{R}$ possède au moins un antécédent par f dans A. □