

Équations différentielles linéaires

Acronymes. — Pour simplifier l'exposé, nous introduisons trois acronymes.

- EDL1 : équation différentielle linéaire d'ordre 1
- SDL1 : système différentiel linéaire d'ordre 1
- EDLS n : équation différentielle linéaire scalaire d'ordre n , où $n \geq 1$ est un entier

1. Définition et exemples d'équations différentielles linéaires d'ordre 1 (EDL1)	2
2. Définition et exemples de systèmes différentielles linéaires d'ordre 1 (SDL1)	7
3. Champ de vecteurs d'un SDL1	8
4. Définition et exemples d'équations différentielles linéaires scalaires d'ordre n (EDLS n)	11
5. Réduction à l'étude des EDL1	14
5.1. Réduction de l'étude d'une EDL1 à celle d'un SDL1	14
5.2. Réduction de l'étude d'un SDL1 à celle d'une EDL1	14
5.3. Réduction de l'étude d'une EDLS n à celle d'un SDL1	15
6. Mise sous forme intégrale d'un problème de Cauchy	16
6.1. Mise sous forme intégrale d'un problème de Cauchy pour une EDL1	16
6.2. Mise sous forme intégrale d'un problème de Cauchy pour un SDL1	16
7. Principe de superposition et conséquence pour l'ensemble solution	17
7.1. Cas des EDL1	17
7.2. Cas des SDL1	17
7.3. Cas des EDLS n	18
8. Théorème de Cauchy linéaire et conséquences	18
8.1. Cas des EDL1	18
8.2. Cas des SDL1	19
8.3. Cas des EDLS n	21
9. Rappels et compléments sur l'exponentielle d'un endomorphisme, d'une matrice	23
9.1. Définition de l'exponentielle d'un endomorphisme, d'une matrice	23
9.2. Exponentielle d'une matrice diagonale	23
9.3. Exponentielle de deux matrices semblables	23
9.4. Spectre d'une exponentielle de matrice	23
9.5. Exponentielle d'une somme de deux endomorphismes, deux matrices, qui commutent	23
9.6. Continuité de l'exponentielle	23
9.7. Dérivation de $t \mapsto \exp(tu)$, $t \mapsto \exp(tA)$	24
10. SDL1 homogène à coefficients constants	25
10.1. Résolution d'un SDL1 homogène à coefficients constants à l'aide d'une exponentielle de matrice	25
10.2. Résolution d'un SDL1 homogène à coefficients constants dans le cas diagonalisable	26
11. Méthode de variation des constantes pour obtenir une solution particulière d'un SDL1	27
12. Quelques méthodes pour résoudre un SDL1	28
13. EDLS2	29
13.1. Wronskien d'un couple de solutions d'une EDLS2 homogène	29
13.2. Caractérisation des bases de l'ensemble solution d'une EDLS2 homogène	29
13.3. Méthode du Wronskien (HP)	30
13.4. Méthode de variation de la constante ou de l'abaissement de l'ordre (HP)	30
13.5. Méthode de variation des constantes pour une EDLS2	31
14. Une méthode générique pour résoudre une EDLS2	33
15. Exemples de résolutions d'équations différentielles linéaires non normalisées	34

Notation. — Dans tout ce chapitre :

- I désigne un intervalle d'intérieur non vide de \mathbf{R} ;
- \mathbf{K} est le corps \mathbf{R} ou \mathbf{C} ;
- E désigne un \mathbf{K} -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$.

1. Définition et exemples d'équations différentielles linéaires d'ordre 1 (EDL1)

Définition 1. — Soient $a \in \mathcal{C}^0(I, \mathcal{L}(E))$ et $b \in \mathcal{C}^0(I, E)$.

(1) **Équation différentielle linéaire d'ordre 1 (EDL1).** L'équation :

$$(\mathcal{E}) \quad x' = a(t) \cdot x + b(t) \quad , \quad \text{d'inconnue } x \in \mathcal{C}^1(I, E)$$

est appelée équation différentielle linéaire d'ordre 1.

(2) **Équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1 (EDLH1).** — L'équation différentielle (\mathcal{E}) est dite homogène, si la fonction b est nulle.

(3) **Solution d'une EDL1.** — Une solution de (\mathcal{E}) est une fonction $x \in \mathcal{C}^1(I, E)$ telle que :

$$\forall t \in I \quad x'(t) = a(t) \cdot x(t) + b(t) .$$

(4) **L'EDL1 homogène associée à une EDL1.** — L'équation différentielle homogène associée à (\mathcal{E}) est :

$$(\mathcal{E}\mathcal{H}) \quad x' = a(t) \cdot x \quad , \quad \text{d'inconnue } x \in \mathcal{C}^1(I, E) .$$

(5) **Problème de Cauchy associé à une EDL1.** — Soit $(t_0, x_0) \in I \times E$. Le problème de Cauchy associé à (\mathcal{E}) avec condition initiale :

$$(CI) \quad x(t_0) = x_0$$

s'écrit :

$$(\mathcal{P}\mathcal{E}) \quad \begin{cases} x' = a(t) \cdot x + b(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad , \quad \text{d'inconnue } x \in \mathcal{C}^1(I, E) .$$

(6) **Solution d'un problème de Cauchy associé à une EDL1.** — Une solution de $(\mathcal{P}\mathcal{E})$ est une fonction $x \in \mathcal{C}^1(I, E)$ telle que :

$$\begin{cases} \forall t \in I \quad x'(t) = a(t)(x(t)) + b(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

i.e. une solution de (\mathcal{E}) vérifiant la condition (CI).

Remarque 2. — La définition 1 généralise celle d'EDL1 introduite en MP2I. En effet, considérons :

- $a \in \mathcal{C}^0(I, \mathbf{K})$;
- $b \in \mathcal{C}^0(I, \mathbf{K})$;
- l'EDL1 de MP2I :

$$(\mathcal{E}) \quad x' = a(t)x + b(t) \quad , \quad \text{d'inconnue } x \in \mathcal{C}^1(I, \mathbf{K}) .$$

Si l'on définit l'application \tilde{a} par :

$$\tilde{a} \left| \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbf{K}) \\ t \longmapsto \tilde{a}(t) \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} \mathbf{K} \longrightarrow \mathbf{K} \\ u \longmapsto a(t)u \end{array} \right.$$

alors :

$$(\tilde{\mathcal{E}}) \quad x' = \tilde{a}(t) \cdot x + b(t) \quad , \quad \text{d'inconnue } x \in \mathcal{C}^1(I, \mathbf{K})$$

est une EDL1 au sens de la définition 1 et, de plus, pour tout $x \in \mathcal{C}^1(I, \mathbf{K})$, une fonction x est solution de (\mathcal{E}) si et seulement si x est solution de $(\tilde{\mathcal{E}})$.

Exercice 3. — Résoudre l'équation différentielle :

$$(\mathcal{E}) \quad x' = \frac{1}{t} x + t^2 \quad , \quad \text{d'inconnue } x \in \mathcal{C}^1(]0, +\infty[, \mathbf{R}) .$$

Exercice 4. — Résoudre l'équation différentielle :

$$(\mathcal{E}) \quad x y' + 2 y = \frac{x}{1 + x^2} \quad , \quad \text{d'inconnue } y \in \mathcal{C}^1(]0, +\infty[, \mathbf{R}) .$$

Exercice 5. — Résoudre le problème de Cauchy :

$$(\mathcal{P}_{\mathcal{E}}) \quad \begin{cases} (\mathcal{E}) & y' + \tan(t)y = \sin(2t) \\ (\text{CI}) & y(0) = 1 \end{cases} \quad , \quad \text{d'inconnue } y \in \mathcal{C}^1\left(]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, \mathbf{R}\right) .$$

(a) *Résolution de l'EDLH1.* — Considérons :

$$(\mathcal{E}_{\mathcal{H}}) \quad y' = -\tan(t)y \quad , \quad \text{d'inconnue } y \in \mathcal{C}^1\left(]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, \mathbf{R}\right) .$$

La fonction :

$$a : t \mapsto -\tan(t) = \frac{-\sin(t)}{\cos(t)}$$

est continue sur l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et admet pour primitive la fonction :

$$A : t \mapsto \ln(|\cos(t)|) = \ln(\cos(t)) .$$

D'après le théorème de Cauchy linéaire, $\text{Sol}_{(\mathcal{E}_{\mathcal{H}})}$ est la droite vectorielle :

$$\text{Vect} \left(y_H \mid \begin{array}{l}]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\\ t \end{array} \begin{array}{l} \longrightarrow \mathbf{R} \\ \longmapsto e^{\ln(\cos(t))} = \cos(t) \end{array} \right) = \left\{ \begin{array}{l}]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\\ t \end{array} \begin{array}{l} \longrightarrow \mathbf{R} \\ \longmapsto k \cos(t) \end{array} : k \in \mathbf{R} \right\} .$$

(b) *Résolution de l'EDL1.* — Cherchons une solution particulière y_p à l'EDL1 (\mathcal{E}) sous la forme :

$$y_p = k y_H \quad , \quad \text{où } k \in \mathcal{C}^1\left(]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, \mathbf{R}\right) .$$

On observe que la fonction y_p est solution de (\mathcal{E}) si et seulement si :

$$\forall t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\quad y_H(t) k'(t) = \sin(2t) = 2 \cos(t) \sin(t)$$

soit si et seulement si :

$$\forall t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\quad k'(t) = 2 \sin(t) .$$

La fonction :

$$y_p : t \mapsto (-2 \cos(t)) y_H(t) = -2 \cos^2(t)$$

est donc solution de (\mathcal{E}) .

D'après le cours, $\text{Sol}_{(\mathcal{E})}$ est la droite affine :

$$y_p + \text{Vect}(y_H) = \left\{ \left| \begin{array}{l}]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\\ t \end{array} \right. \begin{array}{l} \longrightarrow \mathbf{R} \\ \longmapsto k \cos(t) - 2 \cos^2(t) \end{array} : k \in \mathbf{R} \right\}.$$

(c) *Résolution du problème de Cauchy.* — Soit $y \in \mathcal{C}^1\left(]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, \mathbf{R}\right)$. D'après la résolution de (\mathcal{E}) , y est solution de $(\mathcal{P}\mathcal{E})$ si et seulement si :

$$\begin{cases} \exists k \in \mathbf{R} \quad \forall t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[& y(t) = k \cos(t) - 2 \cos^2(t) \\ k \cos(0) - 2 \cos^2(0) = 1; & . \end{cases}$$

Nous en déduisons que la fonction :

$$y : t \longmapsto 3 \cos(t) - 2 \cos^2(t) \text{ est l'unique solution de } (\mathcal{P}\mathcal{E}).$$

Exercice 6. — On considère l'équation différentielle :

$$(\mathcal{E}) \quad |t| x' + x = t^2.$$

1. Résoudre (\mathcal{E}) sur $]0, +\infty[$, puis sur $] -\infty, 0[$.

(a) *Résolution de (\mathcal{E}) sur $]0, +\infty[$* — Sur $]0, +\infty[$, l'EDL1 (\mathcal{E}) est équivalente à :

$$x' = -\frac{1}{t}x + t.$$

Son ensemble solution est la droite affine :

$$\text{Sol}_{(\mathcal{E}),]0, +\infty[} := \left\{ \left| \begin{array}{l}]0, +\infty[\\ t \end{array} \right. \begin{array}{l} \longrightarrow \mathbf{R} \\ \longmapsto \frac{k_1}{t} + \frac{t^2}{3} \end{array} : k_1 \in \mathbf{R} \right\}.$$

(b) *Résolution de (\mathcal{E}) sur $] -\infty, 0[$* — Sur $] -\infty, 0[$, l'EDL1 (\mathcal{E}) est équivalente à :

$$x' = \frac{1}{t}x - t.$$

Son ensemble solution est la droite affine :

$$\text{Sol}_{(\mathcal{E}),]-\infty, 0[} := \left\{ \left| \begin{array}{l}]-\infty, 0[\\ t \end{array} \right. \begin{array}{l} \longrightarrow \mathbf{R} \\ \longmapsto k_2 t - t^2 \end{array} : k_2 \in \mathbf{R} \right\}.$$

2. Soit $x \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ une fonction solution de (\mathcal{E}) .

(a) Que vaut $x(0)$?

Puisque x est solution de (\mathcal{E}) sur \mathbf{R} :

$$\forall t \in \mathbf{R} \quad |t| x'(t) + x(t) = t.$$

En spécialisant à $t \leftarrow 0$, il vient $x(0) = 0$.

- (b) Donner une expression de $x(t)$, pour tout $t > 0$, dans laquelle une constante réelle k_1 apparaît.

D'après la résolution de (\mathcal{E}) sur $]0, +\infty[$:

$$\exists k_1 \in \mathbf{R} \quad \forall t \in]0, +\infty[\quad x(t) = \frac{k_1}{t} + \frac{t^2}{3}.$$

- (c) Donner une expression de $x(t)$, pour tout $t < 0$, dans laquelle une constante réelle k_2 apparaît.

D'après la résolution de (\mathcal{E}) sur $] -\infty, 0[$:

$$\exists k_2 \in \mathbf{R} \quad \forall t \in] -\infty, 0[\quad x(t) = k_2 t - t^2.$$

- (d) En exploitant la continuité et la dérivabilité de x en 0, ajuster les valeurs de k_1 et k_2 .

D'après les trois questions précédentes :

$$\forall t \in \mathbf{R} \quad x(t) = \begin{cases} k_2 t - t^2 & \text{si } t < 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \\ \frac{k_1}{t} + \frac{t^2}{3} & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

La continuité de la fonction x en 0 à droite livre $k_1 = 0$. Ainsi :

$$\forall t \in \mathbf{R} \quad x(t) = \begin{cases} k_2 t - t^2 & \text{si } t < 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \\ \frac{t^2}{3} & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

La fonction x est dérivable en 0 à gauche, avec k_2 comme nombre dérivé à gauche.

La fonction x est dérivable en 0 à droite, avec 0 comme nombre dérivé à droite.

Comme la fonction x est dérivable en 0, $k_2 = 0$, d'où :

$$\forall t \in \mathbf{R} \quad x(t) = \begin{cases} -t^2 & \text{si } t < 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \\ \frac{t^2}{3} & \text{si } t > 0. \end{cases}$$

3. Résoudre (\mathcal{E}) sur \mathbf{R} , en prenant appui sur la question 2.

Nous raisonnons par analyse et synthèse.

- (a) *Analyse.* — Soit $x \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ une solution de l'EDL1 (\mathcal{E}) . D'après la question 2 :

$$x \left| \begin{array}{l} \mathbf{R} \longrightarrow \\ t \longmapsto \end{array} \right. \begin{array}{l} \mathbf{R} \\ \left\{ \begin{array}{ll} -t^2 & \text{si } t < 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \\ \frac{t^2}{3} & \text{si } t > 0. \end{array} \right. \end{array}$$

- (b) *Synthèse.* — Soit x la fonction candidate, obtenue dans l'analyse.

- *Régularité de la fonction x .* — La fonction x est clairement de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbf{R}^* .

Comme :

$$\forall t \in \mathbf{R}^* \quad \frac{x(t) - x(0)}{t - 0} = \begin{cases} -t & \text{si } t < 0 \\ \frac{t}{3} & \text{si } t > 0. \end{cases}$$

Nous en déduisons que x est dérivable à gauche en 0, avec 0 comme nombre dérivé à gauche et que x est dérivable à droite en 0, avec 0 comme nombre dérivé à droite.

La fonction x est donc dérivable à en 0, avec $x'(0) = 0$.

Comme :

$$\forall t \in \mathbf{R} \quad x'(t) = \begin{cases} -2t & \text{si } t < 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \\ \frac{2t}{3} & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

la fonction x' est continue sur \mathbf{R} .

D'après notre étude, la fonction x est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbf{R} .

- Calcul de $|t| x'(t) + x(t)$, pour tout $t \in \mathbf{R}$. — Nous calculons :

$$|t| x'(t) + x(t) = \begin{cases} (-t) \times (-2t) - t^2 = t^2 & \text{si } t < 0 \\ |0| \times 0 + 0 = 0^2 & \text{si } t = 0 \\ t \times \frac{2t}{3} + \frac{t^2}{3} = t^2 & \text{si } t > 0. \end{cases}$$

Nous en déduisons que la fonction x est solution de (\mathcal{E}) sur \mathbf{R} .

(c) Conclusion. — La fonction :

$$x \left| \begin{array}{l} \mathbf{R} \longrightarrow \\ t \longmapsto \end{array} \right. \begin{cases} -t^2 & \text{si } t < 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \\ \frac{t^2}{3} & \text{si } t > 0. \end{cases} \text{ est l'unique solution de } (\mathcal{E}) \text{ sur } \mathbf{R}.$$

Exercice 7. — Résoudre l'équation différentielle :

$$(\mathcal{E}) \quad t y' - 2y = t^3, \text{ d'inconnue } y \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R}, \mathbf{R}).$$

Exercice 8. — Résoudre l'équation différentielle :

$$(\mathcal{E}) \quad t^2 y' - y = 0, \text{ d'inconnue } y \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R}, \mathbf{R}).$$

Exercice 9. — Résoudre l'équation différentielle :

$$(\mathcal{E}) \quad (1-t)y' - y = t, \text{ d'inconnue } y \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R}, \mathbf{R}).$$

Exemple 10. — Soient les applications :

$$a \left| \begin{array}{l} \mathbf{R} \longrightarrow \\ t \longmapsto \end{array} \right. a(t) \left| \begin{array}{l} \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbf{R}^3) \\ (u_1, u_2, u_3) \longmapsto \mathbf{R}^3 \end{array} \right. (u_2, u_3, tu_1 + \text{ch}(t)u_2 - t^2u_3) \quad \text{et} \quad b \left| \begin{array}{l} \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}^3 \\ t \longmapsto \end{array} \right. (0, 0, \arctan(t)).$$

L'équation :

$$(\mathcal{E}) \quad x' = a(t) \cdot x + b(t), \text{ d'inconnue } x \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R}, \mathbf{R}^3)$$

est une EDL1.

2. Définition et exemples de systèmes différentielles linéaires d'ordre 1 (SDL1)

Définition 11. — Soient $A \in \mathcal{C}^0(I, \mathcal{M}_n(\mathbf{K}))$ et $B \in \mathcal{C}^0(I, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}))$.

(1) **Système différentiel linéaire d'ordre 1 (SDL1).** — Le système :

$$(\mathcal{S}) \quad X' = A(t)X + B(t) \quad , \quad \text{d'inconnue } X \in \mathcal{C}^1(I, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}))$$

est appelé système différentiel linéaire d'ordre 1.

(2) **Système différentiel linéaire homogène d'ordre 1 (SDLH1).** — Le système différentiel (\mathcal{S}) est dit homogène, si la fonction vectorielle B est nulle.

(3) **Solution d'un SDL1.** — Une solution de (\mathcal{S}) est une fonction $X \in \mathcal{C}^1(I, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}))$ telle que :

$$\forall t \in I \quad X'(t) = A(t)X(t) + B(t) .$$

(4) **Le SDL1 homogène associé à un SDL1.** — Le système différentiel homogène associé à (\mathcal{S}) est :

$$(\mathcal{S} \mathcal{H}) \quad X' = A(t)X \quad , \quad \text{d'inconnue } X \in \mathcal{C}^1(I, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})) .$$

(5) **Problème de Cauchy associé à un SDL1.** — Soit $(t_0, X_0) \in I \times \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$. Le problème de Cauchy associé à (\mathcal{S}) avec condition initiale :

$$(CI) \quad X(t_0) = X_0$$

s'écrit :

$$(\mathcal{P} \mathcal{S}) \quad \begin{cases} X' = A(t)X + B(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases} \quad , \quad \text{d'inconnue } X \in \mathcal{C}^1(I, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})) .$$

(6) **Solution d'un problème de Cauchy associé à une EDL1.** — Une solution de $(\mathcal{P} \mathcal{S})$ est une fonction $X \in \mathcal{C}^1(I, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}))$ telle que :

$$\begin{cases} \forall t \in I \quad X'(t) = A(t)X(t) + B(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

i.e. une solution de (\mathcal{S}) vérifiant la condition (CI).

Remarque 12. — Considérons deux familles $(a_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1,n \rrbracket^2}$ et $(b_i)_{i \in \llbracket 1,n \rrbracket}$ de fonctions continues sur I à valeurs dans \mathbf{K} .

• Le système différentiel :

$$(\mathcal{S}) \quad \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1}(t) & \dots & a_{1,n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}(t) & \dots & a_{n,n}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix} \quad , \quad \text{d'inconnue } \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{C}^1(I, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}))$$

est un SDL1. En effet, une fonction vectorielle est continue si et seulement si chacune de ses fonctions composantes est continue.

• Une solution de (\mathcal{S}) est une fonction vectorielle $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, où $x_1, \dots, x_n \in \mathcal{C}^1(I, \mathbf{K})$, telle que :

$$\forall t \in I \quad \begin{cases} x'_1(t) = a_{1,1}(t)x_1(t) + \dots + a_{1,n}(t)x_n(t) + b_1(t) \\ \vdots \\ x'_n(t) = a_{n,1}(t)x_1(t) + \dots + a_{n,n}(t)x_n(t) + b_n(t) . \end{cases}$$

Exemple 13. — Le système :

$$(\mathcal{S}) \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ t & \operatorname{ch}(t) & -t^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \arctan(t) \end{pmatrix}, \text{ d'inconnue } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{C}^1(I, \mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{R}))$$

est un SDL1.

Exercice 14. — Soit $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$.

1. Démontrer que la matrice A est diagonalisable sur \mathbf{R} .
2. Déterminer une matrice $P \in \mathbf{GL}_2(\mathbf{R})$ telle que la matrice $P^{-1}AP$ soit diagonale.
3. On considère le SDL1 homogène :

$$(\mathcal{S}) \quad \begin{cases} x'_1 = x_1 + x_2 \\ x'_2 = 4x_1 + x_2 \end{cases}, \text{ d'inconnue } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R}, \mathcal{M}_{2,1}(\mathbf{R})).$$

Résoudre (\mathcal{S}) en considérant le changement de variable $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

4. Justifier que l'ensemble des solutions de (\mathcal{S}) , noté $\operatorname{Sol}(\mathcal{S})$, est un plan vectoriel de $\mathcal{C}^1(\mathbf{R}, \mathcal{M}_{2,1}(\mathbf{R}))$.
5. Résoudre le problème de Cauchy :

$$(\mathcal{P}\mathcal{S}) \quad \begin{cases} (\mathcal{S}) \quad \begin{cases} x'_1 = x_1 + x_2 \\ x'_2 = 4x_1 + x_2 \end{cases} \\ \text{CI} \quad \begin{cases} x_1(0) = 1 \\ x_2(0) = 2 \end{cases} \end{cases}, \text{ d'inconnue } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R}, \mathcal{M}_{2,1}(\mathbf{R}))$$

associé à (\mathcal{S})

6. Soit t_0 un réel fixé. Démontrer que l'application :

$$\varphi_{t_0} \quad \left| \begin{array}{l} \operatorname{Sol}(\mathcal{S}) \longrightarrow \mathcal{M}_{2,1}(\mathbf{R}) \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x_1(t_0) \\ x_2(t_0) \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

est un isomorphisme de \mathbf{R} -espaces vectoriels.

3. Champ de vecteurs d'un SDL1

Convention. Dans cette partie, nous confondons les points du plan \mathbf{R}^2 et leurs coordonnées dans la base canonique. $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2)$.

Définition du SDL1 (\mathcal{S}) . Soit $A = (a_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1,2 \rrbracket^2} \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$. On lui associe le SDL1 (homogène) à coefficients constants :

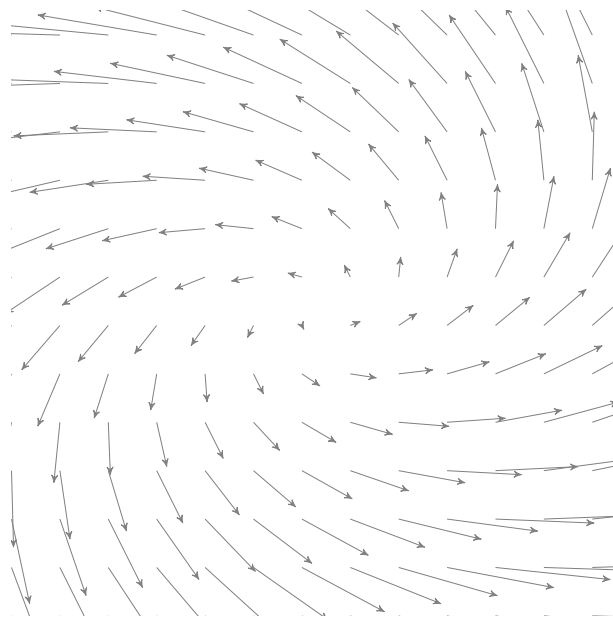
$$(\mathcal{S}) \quad \begin{cases} x' = a_{1,1}x + a_{1,2}y \\ y' = a_{2,1}x + a_{2,2}y \end{cases}, \text{ d'inconnue } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R}, \mathcal{M}_{2,1}(\mathbf{R}))$$

Champ de vecteurs associé au SDL1 (\mathcal{S}) . À ce SDL1 (\mathcal{S}) , nous associons le champ de vecteurs :

$$\xi \quad \left| \begin{array}{l} \mathcal{M}_{2,1}(\mathbf{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_{2,1}(\mathbf{R}) \\ \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \longmapsto A \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

On représente le champ de vecteurs ξ en traçant en tout point M du plan, le vecteur $\xi(M)$.

Représentation du champ de vecteurs ξ lorsque $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$



Trajectoire d'une solution du SDL1 (\mathcal{S}) et interprétation cinématique. Considérons une solution $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ du système différentiel (\mathcal{S}). Nous introduisons sa trajectoire :

$$\Gamma := \left\{ \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} : t \in \mathbf{R} \right\}$$

que nous pouvons assimiler à l'ensemble des positions $M(t)$ prises par un mobile au cours du temps t . En dérivant le vecteur position du mobile :

$$\overrightarrow{OM(t)} := \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix},$$

au temps t , on obtient son vecteur vitesse.

$$\frac{d\overrightarrow{OM(t)}}{dt} := \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \xi \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \xi \left(\overrightarrow{OM(t)} \right) \quad \left[\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ est solution de } (\mathcal{S}\mathcal{H}) \right].$$

Géométrie des solutions du SDL1 ($\mathcal{S}\mathcal{H}$). Fixons un temps t . Alors :

$$\overrightarrow{OM(t+h)} \underset{h \rightarrow 0}{=} \overrightarrow{OM(t)} + h \frac{d\overrightarrow{OM(t)}}{dt} + o(h)$$

d'où

$$\overrightarrow{M(t)M(t+h)} \underset{h \rightarrow 0}{=} h \xi \left(\overrightarrow{OM(t)} \right) + o(h)$$

Ainsi, si $h > 0$ est « petit », alors le vecteur $\overrightarrow{M(t)M(t+h)} = \begin{pmatrix} x(t+h) - x(t) \\ y(t+h) - y(t) \end{pmatrix}$ peut être approximé par un vecteur colinéaire à $\xi \left(\overrightarrow{OM(t)} \right) = A \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$, de même sens.

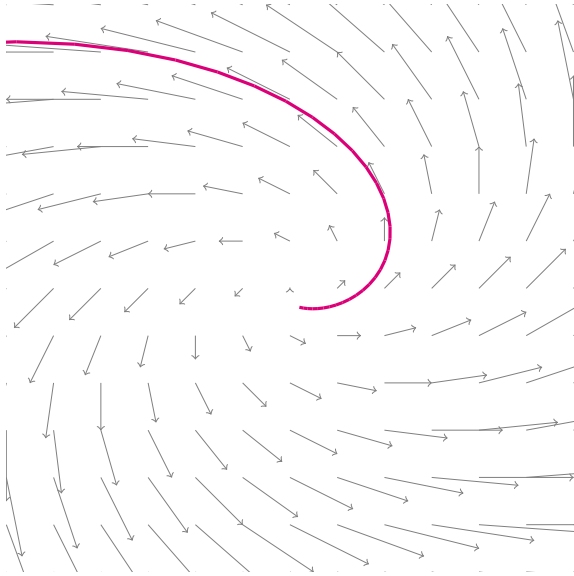


Si un point M (atteint en un temps t qui n'importe pas ici) appartient à la trajectoire Γ , alors la tangente à Γ au point M est portée par le vecteur $\xi(M)$. Nous en déduisons que :

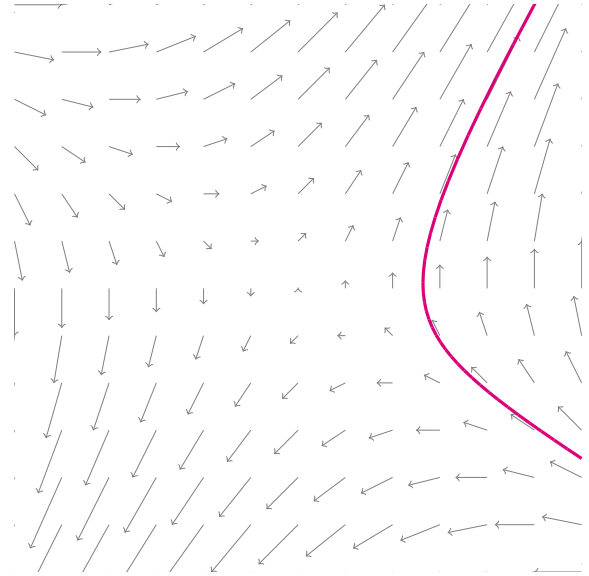
la trajectoire d'une solution du SDL1 (\mathcal{S}) épouse le champ de vecteurs ξ .

Champ de vecteurs et une trajectoire d'une solution pour le SDL1 (\mathcal{S}).

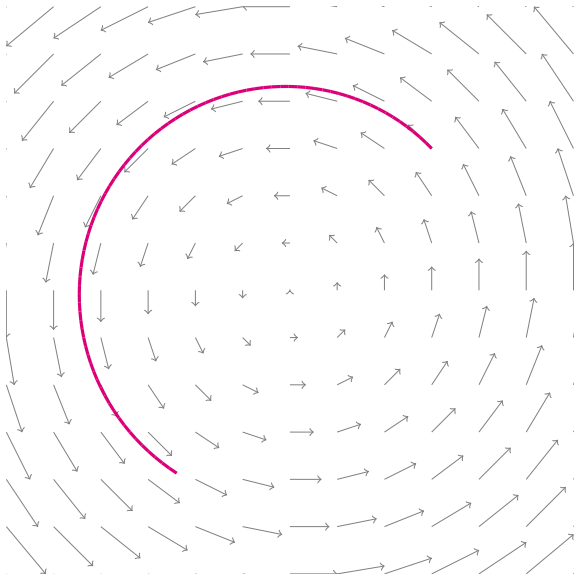
Cas où $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$



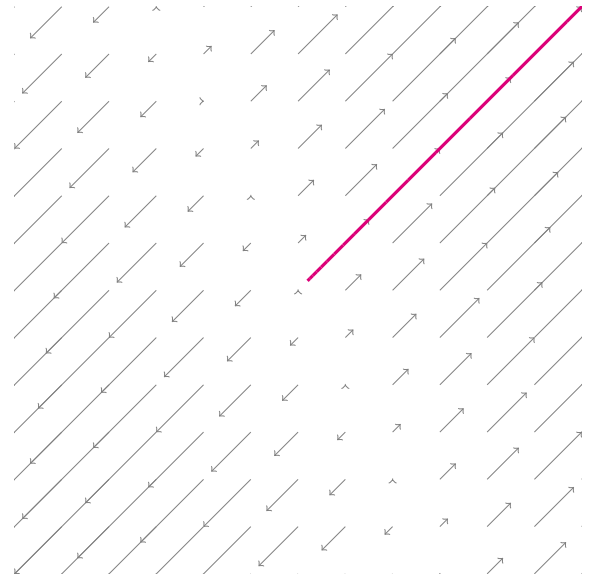
Cas où $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$



Cas où $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$



Cas où $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$



4. Définition et exemples d'équations différentielles linéaires scalaires d'ordre n (EDLS n)

Définition 15. — Soient $a_0, \dots, a_{n-1}, b \in \mathcal{C}^0(I, \mathbf{K})$.

(1) **Équation différentielle linéaire scalaire d'ordre n (EDLS n).** — L'équation :

$$(\mathcal{E}_n) \quad x^{(n)} = \sum_{i=0}^{n-1} a_i(t)x^{(i)} + b(t) \quad , \quad \text{d'inconnue } x \in \mathcal{C}^n(I, \mathbf{K})$$

est appelée équation différentielle linéaire scalaire d'ordre n .

(2) **Équation différentielle linéaire homogène d'ordre n (EDLSH n).** — L'équation différentielle (\mathcal{E}_n) est dite homogène, si la fonction b est nulle.

(3) **Solution d'une EDLS n .** — Une solution de (\mathcal{E}_n) est une fonction $x \in \mathcal{C}^n(I, \mathbf{K})$ telle que :

$$\forall t \in I \quad x^{(n)}(t) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i(t)x^{(i)}(t) + b(t).$$

(4) **L'EDLS n homogène associée à une EDLS n .** — L'équation différentielle homogène associée à (\mathcal{E}_n) est :

$$(\mathcal{E}\mathcal{H}_n) \quad x^{(n)} = \sum_{i=0}^{n-1} a_i(t)x^{(i)} \quad , \quad \text{d'inconnue } x \in \mathcal{C}^n(I, \mathbf{K}).$$

(5) **Problème de Cauchy associé à un EDLS n .** — Soient $t_0 \in I$ et $x_0, \dots, x_{n-1} \in \mathbf{K}$. Le problème de Cauchy associé à (\mathcal{E}_n) avec condition initiale :

$$(CI) \quad \forall i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \quad x^{(i)}(t_0) = x_i.$$

s'écrit :

$$(\mathcal{P}\mathcal{E}_n) \quad \begin{cases} x^{(n)} = \sum_{i=0}^{n-1} a_i(t)x^{(i)} + b(t) \\ \forall i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \quad x^{(i)}(t_0) = x_i \end{cases} \quad , \quad \text{d'inconnue } x \in \mathcal{C}^n(I, \mathbf{K}).$$

(6) **Solution d'un problème de Cauchy associé à une EDLS n .** — Une solution de $(\mathcal{P}\mathcal{E}_n)$ est une fonction $x \in \mathcal{C}^n(I, \mathbf{K})$ telle que :

$$\begin{cases} \forall t \in I \quad x^{(n)} = \sum_{i=0}^{n-1} a_i(t)x^{(i)} + b(t) \\ \forall i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \quad x^{(i)}(t_0) = x_i \end{cases}$$

i.e. une solution de (\mathcal{E}_n) vérifiant la condition (CI).

Exercice 16. — Résoudre l'équation :

$$(\mathcal{E}) \quad x'' = -4x' + 5x + 2e^t \quad , \quad \text{d'inconnue } x \in \mathcal{C}^2(\mathbf{R}, \mathbf{R}).$$

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire d'ordre deux à coefficients constants.

(a) **Résolution de l'EDLH1.** — Considérons :

$$(\mathcal{E}\mathcal{H}) \quad x'' + 4x' - 5x = 0 \quad , \quad \text{d'inconnue } x \in \mathcal{C}^2(\mathbf{R}, \mathbf{R}).$$

Son équation caractéristique :

$$r^2 + 4r - 5 = 0$$

possède deux racines réelles : $r_1 = 1$ et $r_2 = -5$.

D'après le cours, $\text{Sol}_{(\mathcal{E}, \mathcal{H})}$ est le plan vectoriel :

$$\begin{aligned} & \text{Vect} \left(x_{H,1} \left| \begin{array}{l} \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} \\ t \longmapsto e^t \end{array} \right. , x_{H,2} \left| \begin{array}{l} \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} \\ t \longmapsto e^{-5t} \end{array} \right. \right) \\ &= \left\{ \left| \begin{array}{l} \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} \\ t \longmapsto k_1 e^t + k_2 e^{-5t} \end{array} \right. : (k_1, k_2) \in \mathbf{R}^2 \right\}. \end{aligned}$$

- (b) *Résolution de l'EDL1.* — Le second membre $2e^t$ de l'équation différentielle (\mathcal{E}) est de la forme $P(t) \times e^{-\lambda t}$, avec $P = 2$, polynôme de degré 0, et $\lambda = 1$. Comme λ est racine de multiplicité 1 de l'équation caractéristique, nous savons qu'il existe une constante réelle k telle que la fonction :

$$x_p : t \longmapsto k t e^t$$

est solution de (\mathcal{E}).

En injectant dans (\mathcal{E}) et en résolvant une équation d'inconnue k , nous obtenons que la fonction :

$$x_p : t \longmapsto \frac{t e^t}{3}$$

est solution de (\mathcal{E}).

D'après le cours, $\text{Sol}_{(\mathcal{E})}$ est le plan affine :

$$\begin{aligned} & x_p + \text{Vect} \left(x_{H,1} \left| \begin{array}{l} \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} \\ t \longmapsto e^t \end{array} \right. , x_{H,2} \left| \begin{array}{l} \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} \\ t \longmapsto e^{-5t} \end{array} \right. \right) \\ &= \left\{ \left| \begin{array}{l} \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} \\ t \longmapsto \frac{t e^t}{3} + k_1 e^t + k_2 e^{-5t} \end{array} \right. : (k_1, k_2) \in \mathbf{R}^2 \right\}. \end{aligned}$$

Exercice 17. — Résoudre l'équation :

$$(\mathcal{E}) \quad x'' = -2x' - x + 4e^{-t}, \quad \text{d'inconnue } x \in \mathcal{C}^2(\mathbf{R}, \mathbf{R}).$$

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire d'ordre deux à coefficients constants.

- (a) *Résolution de l'EDLH1.* — Considérons :

$$(\mathcal{E}, \mathcal{H}) \quad x'' + 2x' + x = 0, \quad \text{d'inconnue } x \in \mathcal{C}^2(\mathbf{R}, \mathbf{R}).$$

Son équation caractéristique :

$$r^2 + 2r + 1 = 0$$

possède une unique racine réelle $r = -1$.

D'après le cours, $\text{Sol}_{(\mathcal{E}, \mathcal{H})}$ est le plan vectoriel :

$$\begin{aligned} & \text{Vect} \left(x_{H,1} \left| \begin{array}{l} \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} \\ t \longmapsto e^{-t} \end{array} \right. , x_{H,2} \left| \begin{array}{l} \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} \\ t \longmapsto t e^{-t} \end{array} \right. \right) \\ &= \left\{ \left| \begin{array}{l} \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} \\ t \longmapsto k_1 e^{-t} + k_2 t e^{-t} \end{array} \right. : (k_1, k_2) \in \mathbf{R}^2 \right\}. \end{aligned}$$

(b) *Résolution de l'EDL1.* — Le second membre $4e^{-t}$ de l'équation différentielle (\mathcal{E}) est de la forme $P(t) \times e^{-\lambda t}$, avec $P = 4$, polynôme de degré 0, et $\lambda = -1$. Comme λ est racine de multiplicité 2 de l'équation caractéristique, nous savons qu'il existe une constante réelle k telle que la fonction :

$$x_p : t \mapsto k t^2 e^{-t}$$

est solution de (\mathcal{E}) .

En injectant dans (\mathcal{E}) et en résolvant une équation d'inconnue k , nous obtenons que la fonction :

$$x_p : t \mapsto 2 t^2 e^{-t}$$

est solution de (\mathcal{E}) .

D'après le cours, $\text{Sol}_{(\mathcal{E})}$ est le plan affine :

$$x_p + \text{Vect} \left(x_{H,1} \left| \begin{array}{l} \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} \\ t \longmapsto e^{-t} \end{array} \right. , x_{H,2} \left| \begin{array}{l} \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} \\ t \longmapsto t e^{-t} \end{array} \right. \right) = \left\{ \left| \begin{array}{l} \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} \\ t \longmapsto 2 t^2 e^{-t} + k_1 e^{-t} + k_2 t e^{-t} \end{array} \right. : (k_1, k_2) \in \mathbf{R}^2 \right\} .$$

Exemple 18. — L'équation :

$$(\mathcal{E}_3) \quad x''' = t x + \text{ch}(t)x' - t^2 x'' + \arctan(t) \quad , \text{ d'inconnue } x \in \mathcal{C}^3(\mathbf{R}, \mathbf{R})$$

est une EDLS3.

Exemple 19. — Soient $a, b \in \mathbf{K}$ et l'EDLS2 homogène à coefficients constants :

$$(\mathcal{E}_{\mathcal{H}_2}) \quad x'' = -a x' - b x \quad , \text{ d'inconnue } x \in \mathcal{C}^2(\mathbf{R}, \mathbf{C}) .$$

Soit $x \in \mathcal{C}^2(\mathbf{R}, \mathbf{C})$. On observe que la fonction x est solution de $(\mathcal{E}_{\mathcal{H}_2})$ si et seulement si :

$$\forall t \in \mathbf{R} \quad \begin{pmatrix} x'(t) \\ x''(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix}}_{=:A} \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix} .$$

i.e. si et seulement si la fonction vectorielle $\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R}, \mathcal{M}_{2,1}(\mathbf{C}))$ est solution du SDL1 homogène :

$$(\mathcal{S}_{\mathcal{H}}) \quad X' = AX \quad , \text{ d'inconnue } X \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R}, \mathcal{M}_{2,1}(\mathbf{C})) .$$

Nous observons ainsi un premier lien entre les équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 2 et les systèmes différentielles linéaires d'ordre 1. En outre, l'équation caractéristique de $(\mathcal{E}_{\mathcal{H}_2})$:

$$r^2 + a r + b \quad , \text{ d'inconnue } r \in \mathbf{C}$$

est intimement liée au polynôme caractéristique :

$$\chi_A = X^2 + aX + b$$

de la matrice A apparaissant dans $(\mathcal{S}_{\mathcal{H}})$.

Exercice 20. — Considérons l'EDLS2 :

$$(\mathcal{E}_2) \quad y'' = \frac{x}{2} y' + \frac{1}{2} y \quad , \text{ d'inconnue } y \in \mathcal{C}^2(\mathbf{R}, \mathbf{R}) .$$

1. Trouver une solution y de (\mathcal{E}_2) développable en série entière sur \mathbf{R} telle que $y(0) = \sqrt{\pi}$ et $y'(0) = 0$.
2. Expliciter la fonction obtenue en 1.

5. Réduction à l'étude des EDL1

5.1. Réduction de l'étude d'une EDL1 à celle d'un SDL1

Notation. — Soit $\underline{e} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E .

Proposition 21. — Soient $a \in \mathcal{C}^0(I, \mathcal{L}(E))$ et $b \in \mathcal{C}^0(I, E)$. On introduit les fonctions $A \in \mathcal{C}^0(I, \mathcal{M}_n(\mathbf{K}))$ et $B \in \mathcal{C}^0(I, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}))$ définies par :

$$A \left| \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \\ t \longmapsto \text{Mat}_{\underline{e}}(a(t)) \end{array} \right. \quad \text{et} \quad B \left| \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}) \\ t \longmapsto \text{Mat}_{\underline{e}}(b(t)) \end{array} \right. .$$

1. On considère l'EDL1 (\mathcal{E}) et le SDL1 (\mathcal{S}) définis par :

$$(\mathcal{E}) \quad x' = a(t) \cdot x + b(t) \quad \text{et} \quad (\mathcal{S}) \quad X' = A(t)X + B(t)$$

d'inconnues respectives $x \in \mathcal{C}^1(I, E)$ et $X \in \mathcal{C}^1(I, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}))$. Une fonction $x \in \mathcal{C}^1(I, E)$ est solution de (\mathcal{E}) si et seulement si la fonction $\text{Mat}_{\underline{e}} \circ x \in \mathcal{C}^1(I, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}))$ est solution de (\mathcal{S}).

2. Soit $(t_0, x_0) \in I \times E$. On considère les deux problèmes de Cauchy ($\mathcal{P}\mathcal{E}$) et ($\mathcal{P}\mathcal{S}$) définis par :

$$(\mathcal{P}\mathcal{E}) \quad \begin{cases} x' = a(t) \cdot x + b(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad \text{et} \quad (\mathcal{P}\mathcal{S}) \quad \begin{cases} X' = A(t)X + B(t) \\ X(t_0) = \text{Mat}_{\underline{e}}(x_0) \end{cases}$$

d'inconnues respectives $x \in \mathcal{C}^1(I, E)$ et $X \in \mathcal{C}^1(I, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}))$. Une fonction $x \in \mathcal{C}^1(I, E)$ est solution de ($\mathcal{P}\mathcal{E}$) si et seulement si la fonction $\text{Mat}_{\underline{e}} \circ x \in \mathcal{C}^1(I, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}))$ est solution de ($\mathcal{P}\mathcal{S}$).



L'étude d'une EDL1 se ramène donc à l'étude d'un SDL1, en introduisant une base de E . De même, l'étude d'un problème de Cauchy associé à une EDL1 se ramène à l'étude d'un problème de Cauchy associé à un SDL1.

5.2. Réduction de l'étude d'un SDL1 à celle d'une EDL1

Proposition 22. — Soient $A \in \mathcal{C}^0(I, \mathcal{M}_n(\mathbf{K}))$ et $B \in \mathcal{C}^0(I, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}))$. On introduit la fonction $a \in \mathcal{C}^0(I, \mathcal{L}(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})))$ définie par :

$$a \left| \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})) \\ t \longmapsto a(t) \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}) \longrightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}) \\ \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \longmapsto A(t) \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

1. On considère le SDL1 (\mathcal{S}) et l'EDL1 (\mathcal{E}) définis par :


$$(\mathcal{S}) \quad X' = A(t)X + B(t) \quad \text{et} \quad (\mathcal{E}) \quad X' = a(t) \cdot X + B(t)$$

tous deux d'inconnue $X \in \mathcal{C}^1(I, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}))$. Une fonction $X \in \mathcal{C}^1(I, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}))$ est solution de (\mathcal{S}) si et seulement si la fonction X est solution de (\mathcal{E}).

2. Soit $(t_0, X_0) \in I \times \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$. On considère les deux problèmes de Cauchy ($\mathcal{P}\mathcal{S}$) et ($\mathcal{P}\mathcal{E}$) définis par :

$$(\mathcal{P}\mathcal{S}) \quad \begin{cases} X' = A(t)X + B(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases} \quad \text{et} \quad (\mathcal{P}\mathcal{E}) \quad \begin{cases} X' = a(t) \cdot X + B(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

tous deux d'inconnue $X \in \mathcal{C}^1(I, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}))$. Une fonction $X \in \mathcal{C}^1(I, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}))$ est solution de ($\mathcal{P}\mathcal{S}$) si et seulement si la fonction X est solution de ($\mathcal{P}\mathcal{E}$).

 | L'étude d'un SDL1 se ramène donc à l'étude d'une EDL1. De même, l'étude d'un problème de Cauchy associé à un SDL1 se ramène à l'étude d'un problème de Cauchy associée à une EDL1.

5.3. Réduction de l'étude d'une EDLSn à celle d'un SDL1

Proposition 23. — *Considérons $a_0, \dots, a_{n-1}, b \in \mathcal{C}^0(I, \mathbf{K})$. On introduit, pour tout $t \in I$:*

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ a_0(t) & \dots & \dots & a_{n-2}(t) & a_{n-1}(t) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \quad \text{et} \quad B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}).$$

1. On considère l'EDLSn (\mathcal{E}_n) et le SDL1 (\mathcal{S}) définis par :

$$(\mathcal{E}_n) \quad x^{(n)} = \sum_{i=0}^{n-1} a_i(t)x^{(i)} + b(t) \quad \text{et} \quad (\mathcal{S}) \quad X' = A(t)X + B(t)$$

d'inconnues respectives $x \in \mathcal{C}^n(I, \mathbf{K})$ et $X \in \mathcal{C}^1(I, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}))$.

(a) Une fonction $x \in \mathcal{C}^n(I, \mathbf{K})$ est solution de (\mathcal{E}_n) si et seulement si la fonction $\begin{pmatrix} x \\ x' \\ \vdots \\ x^{(n-1)} \end{pmatrix} \in \mathcal{C}^1(I, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}))$ est solution de (\mathcal{S}) .

(b) Une fonction $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{C}^1(I, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}))$ est solution de (\mathcal{S}) si et seulement si la fonction $x_1 \in \mathbf{K}^I$ est solution de (\mathcal{E}_n) .

2. Soient $t_0 \in I$ et $x_0, \dots, x_{n-1} \in \mathbf{K}$. On considère les problèmes de Cauchy $(\mathcal{P}\mathcal{E}_n)$ et $(\mathcal{P}\mathcal{S})$ définis par :

$$(\mathcal{P}\mathcal{E}_n) \quad \begin{cases} x^{(n)} = \sum_{i=0}^{n-1} a_i(t)x^{(i)} + b(t) \\ \forall i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \quad x^{(i)}(t_0) = x_i \end{cases} \quad \text{et} \quad (\mathcal{P}\mathcal{S}) \quad \begin{cases} X' = A(t)X + B(t) \\ X(t_0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} \end{cases}$$

d'inconnues respectives $x \in \mathcal{C}^n(I, \mathbf{K})$ et $X \in \mathcal{C}^1(I, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}))$.

(a) Une fonction $x \in \mathcal{C}^n(I, \mathbf{K})$ est solution de $(\mathcal{P}\mathcal{E}_n)$ si et seulement si la fonction $\begin{pmatrix} x \\ x' \\ \vdots \\ x^{(n-1)} \end{pmatrix} \in \mathcal{C}^1(I, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}))$ est solution de $(\mathcal{P}\mathcal{S})$.

(b) Une fonction $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{C}^1(I, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}))$ est solution de $(\mathcal{P}\mathcal{S})$ si et seulement si $x_1 \in \mathbf{K}^I$ est solution de $(\mathcal{P}\mathcal{E}_n)$.

💡 | L'étude d'un EDLS n se ramène donc à l'étude d'un SDL1. De même, l'étude d'un problème de Cauchy associé à une EDLS n se ramène à l'étude d'un problème de Cauchy associé à un SDL1.

Exercice 24. — On considère l'EDLS3 :

$$(\mathcal{E}_3) \quad x''' + \ln(t)x'' - \frac{3}{t}x' + \frac{4}{t^2}x = t \quad , \quad \text{d'inconnue } x \in \mathcal{C}^3(]0, +\infty[, \mathbf{R}).$$

Donner un SDL1 (\mathcal{S}) dont la résolution est équivalente à celle de (\mathcal{E}_3) .

6. Mise sous forme intégrale d'un problème de Cauchy

6.1. Mise sous forme intégrale d'un problème de Cauchy pour une EDL1

Proposition 25. — Considérons $a \in \mathcal{C}^0(I, \mathcal{L}(E))$, $b \in \mathcal{C}^0(I, E)$ et l'EDL1 :

$$(\mathcal{E}) \quad x' = a(t) \cdot x + b(t) \quad , \quad \text{d'inconnue } x \in \mathcal{C}^1(I, E) .$$

On introduit $(t_0, x_0) \in I \times E$ et le problème de Cauchy :

$$(\mathcal{P}\mathcal{E}) \quad \begin{cases} x' = a(t) \cdot x + b(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad , \quad \text{d'inconnue } x \in \mathcal{C}^1(I, E) .$$

Alors, pour toute fonction $x \in \mathcal{C}^1(I, E)$:

$$x \text{ est solution de } (\mathcal{P}\mathcal{E}) \iff \left(\forall t \in I \quad x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t a(u)(x(u)) + b(u) \, du \right) .$$

6.2. Mise sous forme intégrale d'un problème de Cauchy pour un SDL1

Proposition 26. — Considérons $A \in \mathcal{C}^0(I, \mathcal{M}_n(\mathbf{K}))$, $B \in \mathcal{C}^0(I, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}))$ et le SDL1 :

$$(\mathcal{S}) \quad X' = A(t)X + B(t) \quad , \quad \text{d'inconnue } X \in \mathcal{C}^1(I, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})) .$$

On introduit $(t_0, X_0) \in I \times \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ et le problème de Cauchy :

$$(\mathcal{P}\mathcal{S}) \quad \begin{cases} X' = A(t)X + B(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases} \quad , \quad \text{d'inconnue } X \in \mathcal{C}^1(I, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})) .$$

Alors, pour toute fonction $X \in \mathcal{C}^1(I, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}))$:

$$X \text{ est solution de } (\mathcal{P}\mathcal{S}) \iff \left(\forall t \in I \quad X(t) = X_0 + \int_{t_0}^t A(u)X(u) + B(u) \, du \right) .$$

7. Principe de superposition et conséquence pour l'ensemble solution

7.1. Cas des EDL1

Proposition 27. — Considérons $a \in \mathcal{C}^0(I, \mathcal{L}(E))$, $(b_1, b_2) \in \mathcal{C}^0(I, E)^2$, $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbf{K}^2$ et les EDL1 :

$$\begin{array}{ll} (\mathcal{E}, b_1) & x' = a(t) \cdot x + b_1(t) \\ (\mathcal{E}, b_2) & x' = a(t) \cdot x + b_2(t) \\ (\mathcal{E}, \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2) & x' = a(t) \cdot x + \lambda_1 b_1(t) + \lambda_2 b_2(t) \end{array}, \text{ d'inconnue } x \in \mathcal{C}^1(I, E).$$

Alors :

$$\forall (x_1, x_2) \in \text{Sol}(\mathcal{E}, b_1) \times \text{Sol}(\mathcal{E}, b_2) \quad \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in \text{Sol}(\mathcal{E}, \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2).$$


Proposition 28. — Considérons $a \in \mathcal{C}^0(I, \mathcal{L}(E))$, $b \in \mathcal{C}^0(I, E)$ et les EDL1 :

$$\begin{array}{ll} (\mathcal{E}) & x' = a(t) \cdot x + b(t) \\ (\mathcal{E}\mathcal{H}) & x' = a(t) \cdot x \end{array}, \text{ d'inconnue } x \in \mathcal{C}^1(I, E).$$

1. L'ensemble $\text{Sol}(\mathcal{E}\mathcal{H})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^1(I, E)$.
2. Si on suppose qu'il existe une fonction x_p solution de (\mathcal{E}) , alors $\text{Sol}(\mathcal{E})$ est le sous-espace affine de $\mathcal{C}^1(I, E)$ suivant :

$$\text{Sol}(\mathcal{E}) = x_p + \text{Sol}(\mathcal{E}\mathcal{H}) = \{x_h + x_p : x_h \in \text{Sol}(\mathcal{E}\mathcal{H})\}.$$

Pour résoudre l'EDL1 (\mathcal{E}) , il suffit de :

-  (a) résoudre l'EDL1 homogène associée $(\mathcal{E}\mathcal{H})$, i.e. déterminer (une base de) l'espace vectoriel $\text{Sol}(\mathcal{E}\mathcal{H})$;
- (b) déterminer une solution particulière de l'EDL1 (\mathcal{E}) .

7.2. Cas des SDL1

Proposition 29. — Considérons $A \in \mathcal{C}^0(I, \mathcal{M}_n(\mathbf{K}))$, $(B_1, B_2) \in \mathcal{C}^0(I, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}))^2$, $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbf{K}^2$ et les SDL1 :

$$\begin{array}{ll} (\mathcal{S}, B_1) & X' = A(t)X + B_1(t) \\ (\mathcal{S}, B_2) & X' = A(t)X + B_2(t) \\ (\mathcal{S}, \lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2) & X' = A(t)X + \lambda_1 B_1(t) + \lambda_2 B_2(t) \end{array}, \text{ d'inconnue } X \in \mathcal{C}^1(I, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})).$$

Alors :

$$\forall (X_1, X_2) \in \text{Sol}(\mathcal{S}, B_1) \times \text{Sol}(\mathcal{S}, B_2) \quad \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 \in \text{Sol}(\mathcal{S}, \lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2).$$

Proposition 30. — Considérons $A \in \mathcal{C}^0(I, \mathcal{M}_n(\mathbf{K}))$, $B \in \mathcal{C}^0(I, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}))$ et les SDL1 :

$$\begin{array}{ll} (\mathcal{S}) & X' = A(t)X + B(t) \\ (\mathcal{S}\mathcal{H}) & X' = A(t)X \end{array}, \text{ d'inconnue } X \in \mathcal{C}^1(I, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})).$$

1. L'ensemble $\text{Sol}(\mathcal{S}\mathcal{H})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^1(I, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}))$.
2. Si on suppose qu'il existe une fonction X_p solution de (\mathcal{S}) , alors $\text{Sol}(\mathcal{S})$ est le sous-espace affine de $\mathcal{C}^1(I, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}))$ suivant :

$$\text{Sol}(\mathcal{S}) = X_p + \text{Sol}(\mathcal{S}\mathcal{H}) = \{X_h + X_p : X_h \in \text{Sol}(\mathcal{S}\mathcal{H})\}.$$



Pour résoudre le SDL1 (\mathcal{S}), il suffit de :

- (a) résoudre le SDL1 homogène associé ($\mathcal{S}\mathcal{H}$), i.e. déterminer (une base de) l'espace vectoriel $\text{Sol}(\mathcal{S}\mathcal{H})$;
- (b) déterminer une solution particulière du SDL1 (\mathcal{S}).

7.3. Cas des EDLSn

Proposition 31. — Considérons $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, b_1, b_2 \in \mathcal{C}^0(I, \mathbf{K})$, $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbf{K}^2$ et les EDLSn :

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{E}_n, b_1) \quad x' &= \sum_{i=0}^{n-1} a_i(t) x^{(i)} + b_1(t) \\
 (\mathcal{E}_n, b_2) \quad x' &= \sum_{i=0}^{n-1} a_i(t) x^{(i)} + b_2(t) \quad , \text{ d'inconnue } x \in \mathcal{C}^n(I, \mathbf{K}) . \\
 (\mathcal{E}_n, \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2) \quad x' &= \sum_{i=0}^{n-1} a_i(t) x^{(i)} + \lambda_1 b_1(t) + \lambda_2 b_2(t)
 \end{aligned}$$

Alors :

$$\forall (x_1, x_2) \in \text{Sol}(\mathcal{E}_n, b_1) \times \text{Sol}(\mathcal{E}_n, b_2) \quad \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in \text{Sol}(\mathcal{E}_n, \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2) .$$

Proposition 32. — Considérons $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, b \in \mathcal{C}^0(I, \mathbf{K})$ et les EDLSn :

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{E}_n) \quad x' &= \sum_{i=0}^{n-1} a_i(t) x^{(i)} + b(t) \\
 (\mathcal{E}\mathcal{H}_n) \quad x' &= \sum_{i=0}^{n-1} a_i(t) x^{(i)} \quad , \text{ d'inconnue } x \in \mathcal{C}^n(I, \mathbf{K})
 \end{aligned}$$

1. L'ensemble $\text{Sol}(\mathcal{E}\mathcal{H}_n)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^n(I, \mathbf{K})$.
2. Si on suppose qu'il existe une fonction x_p solution de (\mathcal{E}_n) , alors $\text{Sol}(\mathcal{E}\mathcal{H}_n)$ est le sous-espace affine de $\mathcal{C}^n(I, \mathbf{K})$ suivant :

$$\text{Sol}(\mathcal{E}_n) = x_p + \text{Sol}(\mathcal{E}\mathcal{H}_n) = \{x_h + x_p : x_h \in \text{Sol}(\mathcal{E}\mathcal{H}_n)\} .$$



Pour résoudre l'EDLSn (\mathcal{E}_n), il suffit de :

- (a) résoudre l'EDLSn homogène associée ($\mathcal{E}\mathcal{H}_n$), i.e. déterminer (une base de) l'espace vectoriel $\text{Sol}(\mathcal{E}\mathcal{H}_n)$;
- (b) déterminer une solution particulière de l'EDLSn (\mathcal{E}_n).

8. Théorème de Cauchy linéaire et conséquences

8.1. Cas des EDL1

Théorème 33. — Considérons $a \in \mathcal{C}^0(I, \mathcal{L}(E))$, $b \in \mathcal{C}^0(I, E)$ et $(t_0, x_0) \in I \times E$. Alors le problème de Cauchy :

$$(\mathcal{P}\mathcal{E}) \quad \begin{cases} x' = a(t) \cdot x + b(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad , \text{ d'inconnue } x \in \mathcal{C}^1(I, E)$$

admet une unique solution, i.e. :

$$\exists ! x \in \mathcal{C}^1(I, E) \quad \underbrace{\left(\forall t \in I \quad x'(t) = a(t) \cdot x(t) + b(t) \right)}_{x \text{ est solution de l'EDL1}} \quad \text{et} \quad \underbrace{x(t_0) = x_0}_{x \text{ vérifie la condition initiale}} .$$

Ce théorème est admis.

Exercice 34. — Considérons $a \in \mathcal{C}^0(I, \mathcal{L}(E))$ et $t_0 \in I$. Soit une fonction $x \in \mathcal{C}^1(I, E)$ telle que $x(t_0) = 0_E$ et pour tout $t \in I$:

$$x'(t) = a(t) \cdot x(t).$$

Que dire de la fonction x ?

Exercice 35. — Considérons $a \in \mathcal{C}^0(I, \mathcal{L}(E))$ et $b \in \mathcal{C}^0(I, E)$. Soient deux fonctions $x_1, x_2 \in \mathcal{C}^1(I, E)$ telles que, pour tout $t \in I$:

$$x_1'(t) = a(t) \cdot x_1(t) + b(t) \quad \text{et} \quad x_2'(t) = a(t) \cdot x_2(t) + b(t).$$

Démontrer :

$$(\exists t \in I \quad x_1(t) = x_2(t)) \iff (\forall t \in I \quad x_1(t) = x_2(t)).$$

Corollaire 36. — Considérons $a \in \mathcal{C}^0(I, \mathcal{L}(E))$ et l'EDL1 homogène :

$$(\mathcal{E}\mathcal{H}) \quad x' = a(t) \cdot x, \quad \text{d'inconnue } x \in \mathcal{C}^1(I, E).$$

Alors :

1. pour tout $t_0 \in I$, l'application :

$$\varphi_{t_0} \left| \begin{array}{l} \text{Sol}(\mathcal{E}\mathcal{H}) \longrightarrow E \\ x \longmapsto x(t_0) \end{array} \right.$$

est un isomorphisme de \mathbf{K} -espaces vectoriels ;

2. $\dim(\text{Sol}(\mathcal{E}\mathcal{H})) = \dim(E)$.

Corollaire 37. — Considérons $a \in \mathcal{C}^0(I, \mathcal{L}(E))$, $b \in \mathcal{C}^0(I, E)$ et les EDL1 :

$$\begin{array}{l} (\mathcal{E}) \quad x' = a(t) \cdot x + b(t) \\ (\mathcal{E}\mathcal{H}) \quad x' = a(t) \cdot x \end{array}, \quad \text{d'inconnue } x \in \mathcal{C}^1(I, E).$$

Alors :

1. l'EDL1 (\mathcal{E}) possède (au moins) une solution ;
2. si x_p est une solution de (\mathcal{E}) , alors :

$$\text{Sol}(\mathcal{E}) = x_p + \text{Sol}(\mathcal{E}\mathcal{H})$$

est un sous-espace affine de $\mathcal{C}^1(I, E)$, dirigé par le sous-espace vectoriel $\text{Sol}(\mathcal{E}\mathcal{H})$ de $\mathcal{C}^1(I, E)$, qui est de dimension n .

8.2. Cas des SDL1

Théorème 38. — Considérons $A \in \mathcal{C}^0(I, \mathcal{M}_n(\mathbf{K}))$, $B \in \mathcal{C}^0(I, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}))$ et $(t_0, X_0) \in I \times \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$. Alors le problème de Cauchy :

$$(\mathcal{P}\mathcal{S}) \quad \begin{cases} X' = A(t)X + B(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}, \quad \text{d'inconnue } X \in \mathcal{C}^1(I, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}))$$

admet une unique solution, i.e. :

$$\exists ! X \in \mathcal{C}^1(I, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})) \quad \underbrace{(\forall t \in I \quad X(t) = A(t)X(t) + B(t))}_{X \text{ est solution du SDL1}} \quad \text{et} \quad \underbrace{X(t_0) = X_0}_{X \text{ vérifie la condition initiale}}.$$

Corollaire 39. — Considérons $A \in \mathcal{C}^0(I, \mathcal{M}_n(\mathbf{K}))$ et le SDL1 homogène :

$$(\mathcal{S}\mathcal{H}) \quad X' = A(t)X, \quad \text{d'inconnue } X \in \mathcal{C}^1(I, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})).$$

Alors :

1. pour tout $t_0 \in I$, l'application :

$$\varphi_{t_0} \left| \begin{array}{l} \text{Sol}(\mathcal{S}\mathcal{H}) \longrightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}) \\ X \longmapsto X(t_0) \end{array} \right.$$

est un isomorphisme de \mathbf{K} -espaces vectoriels ;

2. $\dim(\text{Sol}(\mathcal{S}\mathcal{H})) = n$.

Corollaire 40. — Considérons $A \in \mathcal{C}^0(I, \mathcal{M}_n(\mathbf{K}))$, $B \in \mathcal{C}^0(I, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}))$ et les SDL1 :

$$\begin{array}{l} (\mathcal{S}) \quad X' = A(t)X + B(t) \\ (\mathcal{S}\mathcal{H}) \quad X' = A(t) \cdot X \end{array}, \quad \text{d'inconnue } X \in \mathcal{C}^1(I, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})).$$

Alors :

1. le SDL1 (\mathcal{S}) possède (au moins) une solution ;
2. si X_p est une solution de (\mathcal{S}) , alors :

$$\text{Sol}(\mathcal{S}) = X_p + \text{Sol}(\mathcal{S}\mathcal{H})$$

est un sous-espace affine de $\mathcal{C}^1(I, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}))$, dirigé par le sous-espace vectoriel $\text{Sol}(\mathcal{S}\mathcal{H})$ de $\mathcal{C}^1(I, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}))$, qui est de dimension n .

Exercice 41. — On considère le SDL1 homogène :

$$(\mathcal{S}\mathcal{H}) \quad \begin{cases} x' = x + 2y - z \\ y' = 2x + 4y - 2z \\ z' = -x - 2y + z \end{cases}, \quad \text{d'inconnue } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R}, \mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{R}))$$

1. Soit λ une valeur propre réelle et V un vecteur propre associé. Démontrer que la fonction :

$$X \left| \begin{array}{l} \mathbf{R} \longrightarrow \mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{R}) \\ t \longmapsto e^{\lambda t} V \end{array} \right.$$

est solution de $(\mathcal{S}\mathcal{H})$.

2. Réduire la matrice sous-jacente au système linéaire $(\mathcal{S}\mathcal{H})$ et en déduire une base de l'espace $\text{Sol}(\mathcal{S}\mathcal{H})$ des solutions de $(\mathcal{S}\mathcal{H})$.
3. Proposer une généralisation du résultat obtenu pour le SDL1 homogène $(\mathcal{S}\mathcal{H})$.

Exercice 42. — On considère le SDL1 homogène :

$$(\mathcal{S}\mathcal{H}) \quad \begin{cases} x' = x + y \\ y' = -x + 3y \end{cases}, \quad \text{d'inconnue } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R}, \mathcal{M}_{2,1}(\mathbf{R}))$$

1. Trigonaliser la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$.
2. Calculer, pour tout $t \in \mathbf{R}$, $\exp(tA)$.

3. Démontrer que les fonctions :

$$X_1 \left| \begin{array}{l} \mathbf{R} \longrightarrow \mathcal{M}_{2,1}(\mathbf{R}) \\ t \longmapsto \exp(tA) \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{array} \right. \quad \text{et} \quad X_2 \left| \begin{array}{l} \mathbf{R} \longrightarrow \mathcal{M}_{2,1}(\mathbf{R}) \\ t \longmapsto \exp(tA) \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

sont des solutions de $(\mathcal{S}\mathcal{H})$, qui sont linéairement indépendantes.

4. En déduire l'ensemble des solutions de $(\mathcal{S}\mathcal{H})$.

8.3. Cas des EDLSn

Théorème 43. — *Considérons $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, b \in \mathcal{C}^0(I, \mathbf{K})$, $t_0 \in I$ et $x_0, x_1, \dots, x_{n-1} \in \mathbf{K}$. Alors le problème de Cauchy :*

$$(\mathcal{P}\mathcal{E}_n) \quad \begin{cases} x^{(n)} = \sum_{i=0}^{n-1} a_i(t)x^{(i)} + b(t) \\ \forall i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \quad x^{(i)}(t_0) = x_i \end{cases}, \quad \text{d'inconnue } x \in \mathcal{C}^n(I, \mathbf{K})$$

admet une unique solution, i.e. :

$$\exists ! x \in \mathcal{C}^n(I, \mathbf{K}) \quad \underbrace{\left(\forall t \in I \quad x^{(n)}(t) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i(t)x^{(i)}(t) + b(t) \right)}_{x \text{ est solution de l'EDLSn}} \quad \text{et} \quad \underbrace{\begin{cases} x(t_0) = x_0 \\ x'(t_0) = x_1 \\ x''(t_0) = x_2 \\ \vdots \\ x^{(n-2)}(t_0) = x_{n-2} \\ x^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1} \end{cases}}_{x \text{ vérifie la condition initiale}}$$

Corollaire 44. — *Considérons $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathcal{C}^0(I, \mathbf{K})$ et l'EDLSn homogène :*

$$(\mathcal{E}\mathcal{H}_n) \quad x^{(n)} = \sum_{i=0}^{n-1} a_i(t)x^{(i)}, \quad \text{d'inconnue } x \in \mathcal{C}^n(I, \mathbf{K}).$$

Alors :

1. pour tout $t_0 \in I$, l'application :

$$\varphi_{t_0} \left| \begin{array}{l} \text{Sol}(\mathcal{E}\mathcal{H}_n) \longrightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}) \\ x \longmapsto \begin{pmatrix} x(t_0) \\ x'(t_0) \\ x''(t_0) \\ \vdots \\ x^{(n-2)}(t_0) \\ x^{(n-1)}(t_0) \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

est un isomorphisme de \mathbf{K} -espaces vectoriels ;

2. $\dim(\text{Sol}(\mathcal{E}\mathcal{H}_n)) = n$.

Corollaire 45. — Considérons $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, b \in \mathcal{C}^0(I, \mathbf{K})$ et les EDLSn :

$$\begin{aligned} (\mathcal{E}_n) \quad x^{(n)} &= \sum_{i=0}^{n-1} a_i(t)x^{(i)} + b(t) \\ (\mathcal{E}\mathcal{H}_n) \quad x^{(n)} &= \sum_{i=0}^{n-1} a_i(t)x^{(i)} \end{aligned} \quad , \text{ d'inconnue } x \in \mathcal{C}^n(I, \mathbf{K}) .$$

Alors :

1. l'EDLSn (\mathcal{E}_n) possède (au moins) une solution ;
2. si x_p est une solution de (\mathcal{E}_n) , alors :

$$\text{Sol}(\mathcal{E}_n) = x_p + \text{Sol}(\mathcal{E}\mathcal{H}_n)$$

est un sous-espace affine de $\mathcal{C}^n(I, \mathbf{K})$, dirigé par le sous-espace vectoriel $\text{Sol}(\mathcal{E}\mathcal{H}_n)$ de $\mathcal{C}^n(I, \mathbf{K})$, qui est de dimension n .

Exercice 46. — On considère l'EDLSn :

$$(\mathcal{E}_n) \quad x^{(n)} = x + 2026 \quad , \text{ d'inconnue } x \in \mathcal{C}^n(\mathbf{R}, \mathbf{C}) .$$

1. Déterminer tous les nombres complexes λ tels que la fonction :

$$x \left| \begin{array}{l} \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C} \\ t \longmapsto e^{\lambda t} \end{array} \right.$$

soit solution de l'EDLSn homogène $(\mathcal{E}\mathcal{H}_n)$ associée à (\mathcal{E}_n) .

2. En déduire l'ensemble solution de $(\mathcal{E}\mathcal{H}_n)$.
3. Conclure quant à l'ensemble solution de (\mathcal{E}) .

Exercice 47. — On considère l'EDLS3 homogène :

$$(\mathcal{E}\mathcal{H}_3) \quad x''' = x \quad , \text{ d'inconnue } x \in \mathcal{C}^n(\mathbf{R}, \mathbf{C}) .$$

1. Résoudre l'équation différentielle $(\mathcal{E}\mathcal{H}_3)$.
2. Déterminer le convergence R de la série entière $\sum \frac{z^{3n}}{(3n)!}$.
3. Démontrer que la fonction :

$$S \left| \begin{array}{l}]-R, R[\longrightarrow \mathbf{C} \\ x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{3n}}{(3n)!} \end{array} \right.$$

est solution de $(\mathcal{E}\mathcal{H}_3)$.

4. En déduire une expression de la fonction S à l'aide de fonctions usuelles.
5. On pose $j := e^{i\frac{2\pi}{3}}$. Calculer, pour tout $k \in \mathbf{N}$:

$$1^{3k} + j^{3k} + (j^2)^{3k} \quad , \quad 1^{3k+1} + j^{3k+1} + (j^2)^{3k+1} \quad , \quad 1^{3k+2} + j^{3k+2} + (j^2)^{3k+2} .$$

6. Soit $x \in]-R, R[$. En considérant $e^x + e^{jx} + e^{j^2x}$, déduire de Q5 une autre preuve du résultat de Q4.
7. Généraliser l'étude précédente pour déterminer la série entière $\sum \frac{z^{pn}}{(pn)!}$, pour p un nombre premier.

9. Rappels et compléments sur l'exponentielle d'un endomorphisme, d'une matrice

9.1. Définition de l'exponentielle d'un endomorphisme, d'une matrice

Définition 48. —

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. L'exponentielle de u , notée e^u ou $\exp(u)$, est la somme de la série $\sum \frac{u^k}{k!}$ qui converge dans $\mathcal{L}(E)$, i.e. :

$$e^u = \exp(u) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{u^k}{k!} \in \mathcal{L}(E).$$

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. L'exponentielle de A , notée e^A ou $\exp(A)$, est la somme de la série $\sum \frac{A^k}{k!}$ qui converge dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, i.e. :

$$e^A = \exp(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}).$$

Remarque 49. — Soient E un \mathbf{K} -espace vectoriel de dimension finie et \mathcal{B} une base de E . Alors :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\exp(u)) = \exp(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u))$$

9.2. Exponentielle d'une matrice diagonale

Proposition 50. — Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbf{K}$ et $D := \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Alors :

$$\exp(D) = \text{diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n}).$$

9.3. Exponentielle de deux matrices semblables

Proposition 51. — Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ deux matrices semblables sur \mathbf{K} et $P \in \text{GL}_n(\mathbf{K})$ telle que $A = P B P^{-1}$. Alors :

$$\exp(A) = P \exp(B) P^{-1}.$$

9.4. Spectre d'une exponentielle de matrice

Proposition 52. — Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ et $\lambda \in \text{Spec}_{\mathbf{K}}(A)$. Alors :

$$e^\lambda \in \text{Spec}_{\mathbf{K}}(\exp(A)).$$

9.5. Exponentielle d'une somme de deux endomorphismes, deux matrices, qui commutent

Proposition 53. —

Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$ tels que $u \circ v = v \circ u$. Alors :

$$\exp(u + v) = \exp(u) \circ \exp(v) = \exp(v) \circ \exp(u).$$

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ telles que $AB = BA$. Alors :

$$\exp(A + B) = \exp(A) \exp(B).$$

9.6. Continuité de l'exponentielle

Proposition 54. —

L'application :

$$\exp \left| \begin{array}{l} \mathcal{L}(E) \longrightarrow \mathcal{L}(E) \\ u \longmapsto \exp(u) \end{array} \right.$$

est continue.

L'application :

$$\exp \left| \begin{array}{l} \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \\ M \longmapsto \exp(M) \end{array} \right.$$

est continue.

Éléments de démonstration. On considère uniquement le cas matriciel et on munit $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ d'une norme sous-multiplicative, e.g. :

$$\| \cdot \| \left| \begin{array}{l} \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \longrightarrow \\ M \longmapsto \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n \sum_{i=1}^n |[M]_{i,j}| \end{array} \right.$$

(a) Soient A une partie de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, $(f_k)_{k \in \mathbf{N}} \in \mathcal{F}(A, \mathcal{M}_n(\mathbf{K}))^{\mathbf{N}}$ et $f \in \mathcal{F}(A, \mathcal{M}_n(\mathbf{K}))$. On dit que la suite de fonctions $(f_k)_{k \in \mathbf{N}}$ converge uniformément vers f sur A si :

- $\| \| f - f_k \| \|_{\infty, A} := \sup \{ \| \| f_k(M) - f(M) \| \| : M \in A \}$ est bien défini à partir d'un certain rang ;
- $\| \| f - f_k \| \|_{\infty, A} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$.

(b) Soient A une partie de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, $(f_k)_{k \in \mathbf{N}} \in \mathcal{C}^0(A, \mathcal{M}_n(\mathbf{K}))^{\mathbf{N}}$ et $f \in \mathcal{F}(A, \mathcal{M}_n(\mathbf{K}))$. Si la suite de fonctions $(f_k)_{k \in \mathbf{N}}$ converge uniformément vers f sur A , alors la fonction f est continue sur A .

(c) Pour tout $k \in \mathbf{N}$, la fonction :

$$S_k \left| \begin{array}{l} \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \\ M \longmapsto \sum_{i=0}^k \frac{M^i}{i!} \end{array} \right.$$

est polynomiale, donc continue.

(d) Soit $R > 0$ et $k \in \mathbf{N}$. Alors :

$$\forall M \in B(0, R) \quad \| \| \exp(M) - S_k(M) \| \| \leq \sum_{i=k+1}^{+\infty} \frac{R^i}{i!}$$

donc :

$$\| \| \exp - S_k \| \|_{\infty, B(0, R)} \leq \sum_{i=k+1}^{+\infty} \frac{R^i}{i!} .$$

On en déduit que $\| \| \exp - S_k \| \|_{\infty, B(0, R)} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$.

(e) La fonction \exp est donc continue sur l'ouvert $B(0, R)$, pour tout $R > 0$. Elle est donc continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R}) = \bigcup_{R>0} B(0, R)$.

□

9.7. Dérivation de $t \mapsto \exp(tu)$, $t \mapsto \exp(tA)$

Proposition 55. —

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. La fonction

$$f \left| \begin{array}{l} \mathbf{R} \longrightarrow \mathcal{L}(E) \\ t \longmapsto \exp(tu) \end{array} \right.$$

est dérivable et, pour tout $t \in \mathbf{R}$, $f'(t) = u \circ f(t)$.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. La fonction

$$f \left| \begin{array}{l} \mathbf{R} \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \\ t \longmapsto \exp(tA) \end{array} \right.$$

est dérivable et, pour tout $t \in \mathbf{R}$, $f'(t) = Af(t)$.

Démonstration.

(a) Démontrons la dérivabilité de f en $t = 0$. Démontrons que $\frac{f(t) - f(0)}{t - 0} \xrightarrow{t \rightarrow 0} Af(0)$. Soit $t \in]-1, 0[\cup]0, 1[$.

$$\left\| \frac{f(t) - f(0)}{t} - Af(0) \right\| = \left\| \frac{1}{t} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(tA)^k}{k!} - I_n \right) - A \right\| = \left\| \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{t^{p-1} A^p}{p!} - A \right\| = \left\| \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{t^{k-1} A^k}{k!} \right\| .$$

On en déduit que :

$$0 \leq \left\| \frac{f(t) - f(0)}{t} - Af(0) \right\| = \left\| \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{t^{k-1} A^k}{k!} \right\| \leq |t| \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\|A\|^k}{k!} .$$

Par théorème d'encadrement, $\frac{f(t) - f(0)}{t - 0} \xrightarrow{t \rightarrow 0} Af(0)$.

(b) Soit $t \in \mathbf{R}$. Démontrons $\frac{f(t+h)-f(t)}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} Af(t)$. Soit $h \in \mathbf{R}^*$.

$$\begin{aligned} \frac{f(t+h)-f(t)}{h} &= \frac{\exp(hA+tA)-\exp(tA)}{h} \\ &= \frac{\exp(hA)\exp(tA)-\exp(tA)}{h} \quad [\text{les matrices } hA \text{ et } tA \text{ commutent}] \\ &= \frac{\exp(hA)-I_n}{h} \exp(tA) \\ &= \frac{f(h)-f(0)}{h} \exp(tA) \end{aligned}$$

(c) L'application :

$$L \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \\ M \longmapsto M \exp(tA) \end{array} \right.$$

est linéaire et, comme $\dim(\mathcal{M}_n(\mathbf{K})) < \infty$, elle est continue. Comme $\frac{f(h)-f(0)}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} Af(0) = A$:

$$\frac{f(t+h)-f(t)}{h} = L\left(\frac{f(h)-f(0)}{h}\right) \xrightarrow{h \rightarrow 0} L(A) = A \exp(tA) = Af(t).$$

□

10. SDL1 homogène à coefficients constants

10.1. Résolution d'un SDL1 homogène à coefficients constants à l'aide d'une exponentielle de matrice

Théorème 56. — Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ et :

$$\left(e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$. Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on définit la fonction X_i par :

$$X_i \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{R} \longrightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}) \\ t \longmapsto \exp(tA)e_i \end{array} \right. \quad [\text{le vecteur colonne } \exp(tA)e_i \text{ est la } i\text{-ème colonne de la matrice } \exp(tA)].$$

Alors (X_1, \dots, X_n) est une base de l'ensemble solution du SDL1 homogène à coefficients constants :

$$(\mathcal{S}) \quad X' = AX \quad , \quad \text{d'inconnue } X \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R}, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})).$$

Exercice 57. — Résoudre le SDL1 homogène à coefficients constants :

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = z \\ z' = 0 \end{cases} \quad , \quad \text{d'inconnue } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R}, \mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{R})).$$

Exercice 58. — Résoudre le SDL1 homogène à coefficients constants :

$$\begin{cases} x' = 2x + y - z \\ y' = 2y + 3z \\ z' = 2z \end{cases} \quad , \quad \text{d'inconnue } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R}, \mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{R})).$$

Exercice 59. — Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Calculer χ_A .
2. En déduire la valeur de $\exp(tA)$, pour tout $t \in \mathbf{R}$.
3. Résoudre le SDL1 homogène à coefficients constants :

$$X' = AX \quad , \quad \text{d'inconnue } X \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R}, \mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{R})) .$$

Exercice 60. — Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. On considère le SDL1 homogène à coefficients constants :

$$(\mathcal{S}\mathcal{H}) \quad X' = AX .$$

Démontrer que toutes les solutions de (\mathcal{S}) sont polynomiales si et seulement si la matrice A est nilpotente.

10.2. Résolution d'un SDL1 homogène à coefficients constants dans le cas diagonalisable

Théorème 61. — Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ diagonalisable sur \mathbf{K} . On note :

- $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ les valeurs propres deux-à-deux distinctes de A dans \mathbf{K} ;
- pour tout $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, $(V_{i,1}, \dots, V_{i,m_i})$ une base de E_{λ_i} ;
- pour tout $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, $j \in \llbracket 1, m_i \rrbracket$, $X_{i,j}$ définie par :

$$X_{i,j} \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{R} \longrightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}) \\ t \longmapsto e^{\lambda_i t} V_{i,j} \end{array} \right.$$

Alors les $m_1 + \dots + m_r = n$ fonctions $X_{1,1}, \dots, X_{1,m_1}, \dots, X_{r,1}, \dots, X_{r,m_r}$ forme une base de l'ensemble solution du SDL1 homogène à coefficients constants :

$$(\mathcal{S}) \quad X' = AX \quad , \quad \text{d'inconnue } X \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R}, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})) .$$

Exercice 62. — Résoudre le SDL1 homogène à coefficients constants :

$$(\mathcal{S}\mathcal{H}) \quad \begin{cases} x' = x + y \\ y' = -x + 2y + z \\ z' = x + z \end{cases} \quad , \quad \text{d'inconnue } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R}, \mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{R})) .$$

Exercice 63. — Soit la matrice $J \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ dont tous les coefficients valent 1. Résoudre le SDL1 homogène à coefficients constants :

$$(\mathcal{S}\mathcal{H}) \quad X' = JX \quad , \quad \text{d'inconnue } X \in \mathcal{C}^1(I, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})) .$$

Exercice 64. — Soit une matrice $A \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbf{R})$ telle que $A^2 + I_{2n} = 0$. Résoudre le SDL1 homogène à coefficients constants :

$$(\mathcal{S}\mathcal{H}) \quad X' = AX \quad , \quad \text{d'inconnue } X \in \mathcal{C}^1(I, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})) .$$

11. Méthode de variation des constantes pour obtenir une solution particulière d'un SDL1

Proposition 65. — Soient $A \in \mathcal{C}^0(I, \mathcal{M}_n(\mathbf{K}))$ et $B \in \mathcal{C}^0(I, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}))$. On considère les SDL1 :

$$\begin{array}{l} (\mathcal{S}) \quad X' = A(t)X + B(t) \\ (\mathcal{S}\mathcal{H}) \quad X' = A(t)X \end{array}, \text{ d'inconnue } X \in \mathcal{C}^1(I, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}))$$

et une base (X_1, \dots, X_n) de l'ensemble des solutions de $(\mathcal{S}\mathcal{H})$.

1. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathcal{C}^1(I, \mathbf{K})$ La fonction :

$$\left| \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}) \\ t \longmapsto \lambda_1(t)X_1(t) + \dots + \lambda_n(t)X_n(t) \end{array} \right.$$

est solution de (\mathcal{S}) si et seulement si :

$$\forall t \in I \quad \underbrace{\begin{pmatrix} X_1(t) & | & X_2(t) & | & \dots & | & X_n(t) \end{pmatrix}}_{\text{matrice } (n, n) \text{ décrite en colonnes}} \begin{pmatrix} \lambda'_1(t) \\ \vdots \\ \lambda'_n(t) \end{pmatrix} = B(t).$$

2. Pour tout $t \in I$, le scalaire :

$$W(t) := \det(X_1(t) | X_2(t) | \dots | X_n(t)) \quad [\text{Wronskien de la base } (X_1, \dots, X_n) \text{ au temps } t]$$

est non nul, i.e. la matrice $(X_1(t) | X_2(t) | \dots | X_n(t))$ est inversible.

3. Si la fonction $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$ est une primitive de la fonction continue :

$$\left| \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}) \\ t \longmapsto (X_1(t) | X_2(t) | \dots | X_n(t))^{-1} B(t) \end{array} \right.$$

alors la fonction :

$$X_{\text{part}} \left| \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}) \\ t \longmapsto \lambda_1(t)X_1(t) + \dots + \lambda_n(t)X_n(t) \end{array} \right.$$

est solution de (\mathcal{S}) et :

$$\text{Sol}(\mathcal{S}) = X_{\text{part}} + \text{Vect}(X_1, \dots, X_n).$$

Exercice 66. — Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. On considère le SDL1 :

$$(\mathcal{S}) \quad X' = AX + \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ d'inconnue } X \in \mathcal{C}^1(I, \mathcal{M}_{2,1}(\mathbf{R}))$$

1. Donner une base de l'ensemble solution du SDL1 homogène associé (\mathcal{S}) .
2. Déterminer une solution particulière de (\mathcal{S}) , en appliquant la méthode de la variation des constantes.
3. En déduire l'ensemble solution de (\mathcal{S}) .

12. Quelques méthodes pour résoudre un SDL1

(1) Résolution d'un SDL1 homogène à coefficients constants. — Soient (e_1, \dots, e_n) la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Une base de l'ensemble solution du SDL1 homogène :

$$(\mathcal{S}\mathcal{H}) \quad X' = AX \quad , \quad \text{d'inconnue } X \in \mathcal{C}^1(I, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}))$$

est fournie par :

$$\left(X_i \mid \begin{array}{l} \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{K} \\ t \longmapsto \exp(tA)e_i \end{array} \right)_{1 \leq i \leq n} .$$

(2) Résolution d'un SDL1 homogène à coefficients constants dans le cas diagonalisable. — Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ une matrice diagonalisable sur \mathbf{K} , dont les valeurs propres distinctes sont notées $\lambda_1, \dots, \lambda_r$. Pour tout $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, soit $(V_{i,1}, \dots, V_{i,m_i})$ une base du sous-espace propre $E_{\lambda_i}(A)$. Une base de l'ensemble solution du SDL1 homogène :

$$(\mathcal{S}\mathcal{H}) \quad X' = AX \quad , \quad \text{d'inconnue } X \in \mathcal{C}^1(I, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}))$$

est :

$$\left(X_{i,j} \mid \begin{array}{l} \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{K} \\ t \longmapsto e^{\lambda_i t} V_{i,j} \end{array} \right)_{1 \leq i \leq r \text{ et } 1 \leq j \leq m_i} .$$

(3) Calcul d'une solution particulière d'un SDL1 par la méthode de variation des constantes. — Soient $A \in \mathcal{C}^0(I, \mathcal{M}_n(\mathbf{K}))$, $B \in \mathcal{C}^0(I, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}))$ et les SDL1 :

$$\begin{array}{l} (\mathcal{S}) \quad X' = A(t)X + B(t) \\ (\mathcal{S}\mathcal{H}) \quad X' = A(t)X \end{array} \quad , \quad \text{d'inconnue } X \in \mathcal{C}^1(I, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})) .$$

Supposons connue une base (X_1, \dots, X_n) de l'ensemble solution du SDL1 homogène $(\mathcal{S}\mathcal{H})$, de sorte que :

$$\text{Sol}(\mathcal{S}\mathcal{H}) = \{ \lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_n X_n : (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{K}^n \}$$

On recherche une solution particulière de (\mathcal{S}) en appliquant la méthode de variation des constantes, i.e. on détermine n fonctions $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathcal{C}^1(I, \mathbf{K})$ telles que :

$$\forall t \in I \quad (X_1(t) \mid X_2(t) \mid \dots \mid X_n(t)) \begin{pmatrix} \lambda'_1(t) \\ \vdots \\ \lambda'_n(t) \end{pmatrix} = B(t)$$

et on calcule la fonction :

$$X_{\text{part}} \mid \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}) \\ t \longmapsto \lambda_1(t)X_1(t) + \dots + \lambda_n(t)X_n(t) \end{array}$$

que l'on sait être solution de (\mathcal{S}) . Le principe de superposition a pour conséquence :

$$\text{Sol}(\mathcal{S}) = X_{\text{part}} + \text{Sol}(\mathcal{S}\mathcal{H}) = X_{\text{part}} + \text{Vect}(X_1, \dots, X_n) = \left\{ \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}) \\ t \longmapsto X_{\text{part}}(t) + \sum_{i=1}^n k_i X_i(t) \end{array} : (k_1, \dots, k_n) \in \mathbf{K}^n \right\} .$$

13. EDLS2

13.1. Wronskien d'un couple de solutions d'une EDLS2 homogène

Notation. — Soient $a_0, a_1 \in \mathcal{C}^0(I, \mathbf{K})$ et $(\mathcal{E}\mathcal{H}_2)$ l'EDLS2 homogène :

$$(\mathcal{E}\mathcal{H}_2) \quad x'' = a_0(t)x + a_1(t)x' \quad , \quad \text{d'inconnue } x \in \mathcal{C}^2(I, \mathbf{K}) .$$

Définition 67. — Le Wronskien d'un couple (x_1, x_2) de solutions de $(\mathcal{E}\mathcal{H}_2)$ est défini par :

$$W(x_1, x_2) \begin{array}{l} I \longrightarrow \\ t \longmapsto \end{array} \begin{array}{l} \mathbf{K} \\ \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) \end{vmatrix} \end{array} = x_1(t)x_2'(t) - x_1'(t)x_2(t)$$

13.2. Caractérisation des bases de l'ensemble solution d'une EDLS2 homogène

Remarque 68. — Soit (x_1, x_2) un couple de solutions de $(\mathcal{E}\mathcal{H}_2)$. Alors $W(x_1, x_2) \in \mathcal{C}^1(I, \mathbf{K})$ et :

$$\forall t \in I \quad W(x_1, x_2)'(t) = a_1(t)W(x_1, x_2)(t)$$

Autrement dit, $W(x_1, x_2)$ est solution de l'EDLS1 homogène :

$$y' = a_1(t)y \quad , \quad \text{d'inconnue } y \in \mathcal{C}^1(I, \mathbf{K})$$

Si on fixe $t_0 \in I$, on a donc :

$$\forall t \in I \quad W(x_1, x_2)(t) = W(x_1, x_2)(t_0) \exp\left(\int_{t_0}^t a_1(u) du\right) \quad [\text{expression intégrale du Wronskien}]$$

Proposition 69. — Soit (x_1, x_2) un couple de solutions de $(\mathcal{E}\mathcal{H}_2)$. Les assertions suivantes sont équivalentes.

1. $\exists t \in I \quad W(x_1, x_2)(t) := x_1(t)x_2'(t) - x_1'(t)x_2(t) \neq 0$
2. $\forall t \in I \quad W(x_1, x_2)(t) := x_1(t)x_2'(t) - x_1'(t)x_2(t) \neq 0$
3. (x_1, x_2) est une base de $\text{Sol}(\mathcal{E}\mathcal{H}_2)$.

Démonstration. On pose $W := W(x_1, x_2)$ pour alléger l'écriture.

- (2) \implies (1). Claire.
- (1) \implies (2). Nous raisonnons par contraposition et supposons qu'il existe $t_0 \in I$ tel que $W(t_0) = 0$. La fonction W est donc solution du problème de Cauchy linéaire d'ordre 1 :

$$\begin{cases} y' = a_1(t)y & [\text{EDLS1 homogène}] \\ y(t_0) = 0 & [\text{condition initiale}] \end{cases} .$$

La fonction nulle sur I est également solution de ce problème de Cauchy. L'unicité dans le théorème de Cauchy linéaire pour les EDLS1 entraîne que W est la fonction nulle sur I .

- (1) \implies (3). Supposons qu'il existe $t_0 \in I$ tel que $W(t_0) \neq 0$. La matrice $\begin{pmatrix} x_1(t_0) & x_2(t_0) \\ x_1'(t_0) & x_2'(t_0) \end{pmatrix}$ est donc inversible. Comme nous savons que $\text{Sol}(\mathcal{E}\mathcal{H}_2)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^2(I, \mathbf{K})$ de dimension 2, il suffit de démontrer que la famille (x_1, x_2) de 2 solutions de $(\mathcal{E}\mathcal{H}_2)$ est libre pour en déduire qu'elle forme une base de $\text{Sol}(\mathcal{E}\mathcal{H}_2)$.

Soit $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbf{K}^2$ tel que $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$ est la fonction nulle sur I . En dérivant, nous obtenons :

$$\forall t \in I \quad \begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

En spécialisant en t_0 et en utilisant l'hypothèse, il vient $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.

- (3) \implies (1). Supposons que (x_1, x_2) est une base de $\text{Sol}(\mathcal{E}\mathcal{H}_2)$. Nous démontrons (1) en raisonnant par l'absurde. Nous supposons donc que, pour tout $t \in I$, $W(t) := x_1(t)x_2'(t) - x_1'(t)x_2(t) = 0$.
 Fixons $t_0 \in I$. Nous observons que la fonction $x_2'(t_0)x_1 - x_1'(t_0)x_2$ est solution du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} x'' = a_0(t)x + a_1(t)x' & \text{[EDLS2 homogène]} \\ x(t_0) = x'(t_0) = 0 & \text{[condition initiale]} \end{cases}$$

La fonction nulle sur I est également solution de ce problème de Cauchy. L'unicité dans le théorème de Cauchy linéaire pour les EDLS2 entraîne que $x_2'(t_0)x_1 - x_1'(t_0)x_2$ est la fonction nulle sur I . Par liberté de la famille (x_1, x_2) , il vient $x_1'(t_0) = x_2'(t_0) = 0$. Ce résultat valant pour un temps t_0 quelconque de l'intervalle I , les fonctions x_1 et x_2 sont constantes. La famille (x_1, x_2) est donc liée, d'où une contradiction. □

13.3. Méthode du Wronskien (HP)

Proposition 70. — Soient x_1 une solution de $(\mathcal{E}\mathcal{H}_2)$ qui ne s'annule pas sur I et t_0 un point de I fixé. On définit les fonctions W et x_2 par :

$$W \left| \begin{array}{l} I \longrightarrow \\ t \longmapsto \end{array} \right. \exp\left(\int_{t_0}^t a_1(u) \, du\right) \quad \text{et} \quad x_2 \left| \begin{array}{l} I \longrightarrow \\ t \longmapsto \end{array} \right. x_1(t) \int_{t_0}^t \frac{W(u)}{x_1^2(u)} \, du .$$

Alors (x_1, x_2) est une base de $\text{Sol}(\mathcal{E}\mathcal{H}_2)$.

13.4. Méthode de variation de la constante ou de l'abaissement de l'ordre (HP)

Proposition 71. — Soit x_1 une solution de $(\mathcal{E}\mathcal{H}_2)$ qui ne s'annule pas sur I . Pour tout $\lambda \in \mathcal{C}^2(I, \mathbf{K})$ la fonction :

$$x_2 \left| \begin{array}{l} I \longrightarrow \\ t \longmapsto \end{array} \right. \lambda(t)x_1(t)$$

est solution de $(\mathcal{E}\mathcal{H}_2)$ si et seulement si :

$$\forall t \in I \quad \lambda''(t) = \left(a_1(t) - 2 \frac{x_1'(t)}{x_1(t)} \right) \lambda'(t) \quad \text{[} \lambda' \text{ est solution d'une EDLS1 homogène] .}$$

Exercice 72. — Résoudre l'équation différentielle :

$$(\mathcal{E}\mathcal{H}_2) \quad x'' - \frac{3}{t}x' + \frac{4}{t^2}x = 0 \quad , \quad \text{d'inconnue } x \in \mathcal{C}^2(]0, +\infty[, \mathbf{R})$$

en commençant par rechercher une solution polynomiale.

Exercice 73. — On considère l'équation différentielle :

$$(\mathcal{E}_2) \quad (2x + 1)y'' + (4x - 2)y' - 8y = 1 \quad , \quad \text{d'inconnue } y \in \mathcal{C}^2(]-1/2, +\infty[, \mathbf{R})$$

et son équation homogène associée :

$$(\mathcal{E}\mathcal{H}_2) \quad (2x + 1)y'' + (4x - 2)y' - 8y = 0 \quad , \quad \text{d'inconnue } y \in \mathcal{C}^2(]-1/2, +\infty[, \mathbf{R}) .$$

1. Déterminer $\lambda \in \mathbf{R}$ pour que la fonction :

$$y_1 \left| \begin{array}{l}]-1/2, +\infty[\longrightarrow \\ x \longmapsto \end{array} \right. e^{\lambda x}$$

soit solution de $(\mathcal{E}\mathcal{H}_2)$ sur $]-1/2, +\infty[$.

2. Résoudre $(\mathcal{E}\mathcal{H}_2)$ sur $] -1/2, +\infty[$.
3. Résoudre (\mathcal{E}_2) sur $] -1/2, +\infty[$.

Exercice 74. — Soit $q \in \mathcal{C}(\mathbf{R}_+, \mathbf{R})$ une fonction intégrable sur $[0 ; +\infty[$. Considérons l'équation différentielle :

$$(\mathcal{E}_2) \quad y'' + q(t)y = 0 \quad , \quad \text{d'inconnue } y \in \mathcal{C}^2(\mathbf{R}_+, \mathbf{R}) .$$

1. Soit y une solution de (\mathcal{E}_2) . Supposons y bornée.
 - (a) Montrer que y' admet une limite finie en $+\infty$.
 - (b) Montrer que $y'(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$.
2. Soit z une deuxième solution bornée de (\mathcal{E}_2) . Montrer que la fonction :

$$W \quad \left| \begin{array}{l} \mathbf{R}_+ \longrightarrow \mathbf{R} \\ t \longmapsto \begin{pmatrix} y(t) & z(t) \\ y'(t) & z'(t) \end{pmatrix} \end{array} \right|$$

est constante.

3. En déduire que (\mathcal{E}_2) possède une solution non bornée.

13.5. Méthode de variation des constantes pour une EDLS2

Proposition 75. — Soient $a_0, a_1, b \in \mathcal{C}^0(I, \mathbf{K})$ et (\mathcal{E}_2) l'EDLS2 :

$$(\mathcal{E}_2) \quad x'' = a_0(t)x + a_1(t)x' + b(t) \quad , \quad \text{d'inconnue } x \in \mathcal{C}^2(I, \mathbf{K}) .$$

Supposons connue une base (x_1, x_2) de l'ensemble solution de :

$$(\mathcal{E}\mathcal{H}_2) \quad x'' = a_0(t)x + a_1(t)x' \quad , \quad \text{d'inconnue } x \in \mathcal{C}^2(I, \mathbf{K}) .$$

Pour tout $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathcal{C}^2(I, \mathbf{K})$:

$$\forall t \in I \quad \begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1'(t) \\ \lambda_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ b(t) \end{pmatrix} \quad \implies \quad \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \text{ est solution de } (\mathcal{S}) .$$

On conserve les notations de la proposition 75. Pour chercher une solution particulière de l'équation (\mathcal{E}_2) , on calcule deux fonctions $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathcal{C}^2(I, \mathbf{K})$ telles que :



$$\forall t \in I \quad \begin{cases} \lambda_1'(t)x_1(t) + \lambda_2'(t)x_2(t) = 0 \\ \lambda_1'(t)x_1'(t) + \lambda_2'(t)x_2'(t) = b(t) . \end{cases}$$

La fonction $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$ est alors solution de (\mathcal{E}_2) .

Démonstration.

- Nous savons qu'une fonction $x \in \mathcal{C}^2(I, \mathbf{K})$ est solution de $(\mathcal{E}\mathcal{H}_2)$ si et seulement si la fonction $\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}$ est solution du SDL1 homogène :

$$(\mathcal{S}\mathcal{H}) \quad X' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a_0(t) & a_1(t) \end{pmatrix} X \quad , \quad \text{d'inconnue } X \in \mathcal{C}^1(I, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})) .$$

Nous vérifions alors sans peine que $\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_1' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ x_2' \end{pmatrix} \right)$ est une base de l'ensemble $\text{Sol}(\mathcal{S}\mathcal{H})$.

- Introduisons le SDL1 :

$$(\mathcal{S}) \quad X' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a_0(t) & a_1(t) \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 0 \\ b(t) \end{pmatrix}, \quad \text{d'inconnue } X \in \mathcal{C}^1(I, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})).$$

Soit $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathcal{C}^2(I, \mathbf{K})$. D'une part, d'après la méthode de la variation des constantes (proposition 65) :

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ x'_1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} x_2 \\ x'_2 \end{pmatrix} \text{ est solution de } (\mathcal{S}) \iff \forall t \in I \quad \begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x'_1(t) & x'_2(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda'_1(t) \\ \lambda'_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ b(t) \end{pmatrix}.$$

D'autre part :

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ x'_1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} x_2 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \\ \lambda_1 x'_1 + \lambda_2 x'_2 \end{pmatrix} \text{ est solution de } (\mathcal{S})$$

si et seulement si :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \\ \lambda_1 x'_1 + \lambda_2 x'_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a_0 & a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \\ \lambda_1 x'_1 + \lambda_2 x'_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}$$

si et seulement si :

$$\begin{cases} (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)' = \lambda_1 x'_1 + \lambda_2 x'_2 \\ (\lambda_1 x'_1 + \lambda_2 x'_2)' = a_0(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) + a_1(\lambda_1 x'_1 + \lambda_2 x'_2) + b \end{cases}$$

si et seulement si :

$$\begin{cases} (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)' = \lambda_1 x'_1 + \lambda_2 x'_2 \\ (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)'' = a_0(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) + a_1(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)' + b \end{cases}$$

si et seulement si :

$$\begin{cases} \lambda'_1 x_1 + \lambda'_2 x_2 = 0 & [\text{condition (+)}] \\ \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \text{ est solution de } (\mathcal{E}_2). \end{cases}$$

Nous en déduisons que :

$$\forall t \in I \quad \begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x'_1(t) & x'_2(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda'_1(t) \\ \lambda'_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ b(t) \end{pmatrix} \implies \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \text{ est solution de } (\mathcal{E}_2)$$

en ayant mis de plus en évidence une condition (+).

□

Exercice 76. — Résoudre l'équation différentielle :

$$(\mathcal{E}_2) \quad y'' + y = \sin^2(t) \quad , \quad \text{d'inconnue } y \in \mathcal{C}^2(\mathbf{R}, \mathbf{R}).$$

Exercice 77. — Résoudre l'équation différentielle :

$$(\mathcal{E}_2) \quad x'' - \frac{3}{t} x' + \frac{4}{t^2} x = \ln(t) \quad , \quad \text{d'inconnue } x \in \mathcal{C}^2(]0, +\infty[, \mathbf{R})$$

sachant que les fonctions :

$$x_1 \left| \begin{array}{l}]0, +\infty[\longrightarrow \mathbf{R} \\ t \longmapsto t^2 \end{array} \right. \quad \text{et} \quad x_2 \left| \begin{array}{l}]0, +\infty[\longrightarrow \mathbf{R} \\ t \longmapsto t^2 \ln(t) \end{array} \right.$$

forment une base de l'ensemble solution de :

$$(\mathcal{E}_{\mathcal{H}_2}) \quad x'' - \frac{3}{t} x' + \frac{4}{t^2} x = 0 \quad , \quad \text{d'inconnue } x \in \mathcal{C}^2(]0, +\infty[, \mathbf{R}).$$

Nous appliquons la méthode de variation des constantes pour déterminer une solution particulière de (\mathcal{E}_2) . Soit $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathcal{C}^2(]0, +\infty[, \mathbf{R})$. Soit $t \in]0, +\infty[$.

$$\begin{pmatrix} t^2 & t^2 \ln(t) \\ 2t & t + 2t \ln(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1'(t) \\ \lambda_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \ln(t) \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} \lambda_1'(t) \\ \lambda_2'(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{t^3} \begin{pmatrix} t + 2t \ln(t) & -t^2 \ln(t) \\ -2t & t^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \ln(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\ln^2(t)/t \\ \ln(t)/t \end{pmatrix}$$

Les fonctions :

$$\lambda_1 \left| \begin{array}{l}]0, +\infty[\longrightarrow \mathbf{R} \\ t \longmapsto -\frac{\ln^3(t)}{3} \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \lambda_2 \left| \begin{array}{l}]0, +\infty[\longrightarrow \mathbf{R} \\ t \longmapsto -\frac{\ln^2(t)}{2} \end{array} \right.$$

conviennent donc. Nous en déduisons que la fonction :

$$x_{\text{part}} \left| \begin{array}{l}]0, +\infty[\longrightarrow \mathbf{R} \\ t \longmapsto -\frac{t^2 \ln^3(t)}{3} x_1(t) + \frac{\ln^2(t)}{2} x_2(t) = \frac{t^2 \ln^3(t)}{6} \end{array} \right.$$

est solution de (\mathcal{E}_2) . Ainsi :

$$\text{Sol}(\mathcal{E}_2) = x_{\text{part}} + \text{Vect}(x_1, x_2) = \left\{ \left| \begin{array}{l}]0, +\infty[\longrightarrow \mathbf{R} \\ t \longmapsto k_1 t^2 + k_2 t^2 \ln(t) + \frac{t^2 \ln^3(t)}{6} : (k_1, k_2) \in \mathbf{R}^2 \end{array} \right. \right\}$$

14. Une méthode générique pour résoudre une EDLS2

Soient $a_0, a_1, b \in \mathcal{C}^0(I, \mathbf{K})$ et les EDLS2 :

$$\begin{array}{l} (\mathcal{E}_2) \quad x'' = a_0(t)x + a_1(t)x' + b(t) \\ (\mathcal{E}\mathcal{H}_2) \quad x'' = a_0(t)x + a_1(t)x' \end{array}, \text{ d'inconnue } x \in \mathcal{C}^2(I, \mathbf{K}).$$

Pour résoudre (\mathcal{E}_2) , on peut adopter la démarche exposée ci-dessous.

(1) Une solution x_1 de $(\mathcal{E}\mathcal{H}_2)$ qui ne s'annule pas. — On recherche une solution x_1 de $(\mathcal{E}\mathcal{H}_2)$, qui ne s'annule pas sur I , et qui possède une forme particulière, e.g. :

- une fonction polynomiale ;
- une fonction développable en série entière au voisinage de 0 ;
- une fonction d'une forme soufflée dans l'énoncé.

(2) Une deuxième solution x_2 de $(\mathcal{E}\mathcal{H}_2)$. — Une fois déterminée une fonction x_1 solution de $(\mathcal{E}\mathcal{H}_2)$, qui ne s'annule pas sur I , on peut appliquer :

- la méthode de variation de la constante ou de l'abaissement de l'ordre, en posant :

$$x_2 = k x_1, \text{ où } k \in \mathcal{C}^2(I, \mathbf{K})$$

- la méthode du Wronskien, en calculant :

$$x_2 \left| \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbf{K} \\ t \longmapsto x_1(t) \int^t \frac{W(u)}{x_1^2(u)} du \end{array} \right., \text{ où } W \left| \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbf{K} \\ t \longmapsto \exp\left(\int^t a_1(u) du\right) \end{array} \right.$$

pour déterminer une deuxième solution x_2 de $(\mathcal{E}\mathcal{H}_2)$.

(3) Liberté de la famille (x_1, x_2) . — On vérifie que le Wronskien du couple (x_1, x_2) de solutions de $(\mathcal{E}\mathcal{H}_2)$:

$$W(x_1, x_2) \left| \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbf{K} \\ t \longmapsto \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) \end{vmatrix} = x_1(t)x_2'(t) - x_1'(t)x_2(t) \end{array} \right.$$

n'est pas identiquement nul, pour obtenir la liberté de la famille (x_1, x_2) .

(4) Conclusion sur l'ensemble solution de $(\mathcal{E}\mathcal{H}_2)$. — On applique le théorème de Cauchy linéaire pour les EDLS2 homogènes pour justifier :

$$\text{Sol}(\mathcal{E}\mathcal{H}_2) = \text{Vect}(x_1, x_2) .$$

(5) Une solution particulière de (\mathcal{E}_2) . — On recherche une solution de (\mathcal{E}_2) en appliquant la méthode de variations des constantes, i.e. on détermine deux fonctions $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathcal{C}^2(I, \mathbf{K})$ telles que :

$$\forall t \in I \quad \begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1'(t) \\ \lambda_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ b(t) \end{pmatrix}$$

et on calcule :

$$x_{\text{part}} := \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$$

que l'on sait être solution de (\mathcal{E}_2) .

(6) Conclusion sur l'ensemble solution de (\mathcal{E}_2) . — Le principe de superposition a pour conséquence :

$$\text{Sol}(\mathcal{E}_2) = x_{\text{part}} + \text{Sol}(\mathcal{E}\mathcal{H}_2) = x_{\text{part}} + \text{Vect}(x_1, x_2) = \left\{ \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbf{K} \\ t \longmapsto k_1 x_1(t) + k_2 x_2(t) + x_{\text{part}}(t) \end{array} : (k_1, k_2) \in \mathbf{K}^2 \right\} .$$

15. Exemples de résolutions d'équations différentielles linéaires non normalisées

Exercice 78. — Résoudre sur l'intervalle \mathbf{R} l'équation différentielle :

$$t^2 y' - y = 0 .$$

Exercice 79. — Résoudre sur l'intervalle \mathbf{R} l'équation différentielle :

$$(1 - t) y' - y = t .$$

Exercice 80. — Soit l'équation différentielle :

$$x(x - 1) y'' + 3x y' + y = 0 .$$

1. Trouver les solutions de cette équation différentielle développables en série entière sur un intervalle $] -r, r[$ de \mathbf{R} , avec $r > 0$. Déterminer la somme des séries entières obtenues.
2. Est-ce que toutes les solutions de :

$$x(x - 1) y'' + 3x y' + y = 0$$

sur $]0, 1[$ sont les restrictions d'une fonction développable en série entière sur $] -1, 1[$?

Exercice 81. — a et b étant deux fonctions continues sur \mathbf{R} , on note l'équation différentielle :

$$(\mathcal{E}) \quad x^2 y'' + a(x) y' + b(x) y = 0$$

On note S^+ l'espace vectoriel des solutions de (\mathcal{E}) sur l'intervalle $I =]0, +\infty[$ et S^- l'espace vectoriel des solutions de (\mathcal{E}) sur l'intervalle $J =]-\infty, 0[$. L'objectif de cet exercice est d'étudier la dimension de l'espace vectoriel S des fonctions y de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbf{R} vérifiant (\mathcal{E}) sur \mathbf{R} tout entier.

1. Donner la dimension des espaces S^+ et S^- .
2. On note φ l'application linéaire de S vers $S^+ \times S^-$ définie par $\varphi(f) = (f_I, f_J)$ où f_I désigne la restriction de f à l'intervalle I et f_J désigne la restriction de f à l'intervalle J . Donner le noyau de l'application φ et en déduire que $\dim(S) \leq 4$.
3. Dans cette question, on considère $a(x) = x$ et $b(x) = 0$, d'où :

$$(\mathcal{E}) \quad x^2 y'' + x y' = 0 .$$

Déterminer S^+ et S^- . Déterminer ensuite S et donner sans détails la dimension de S .

4. Dans cette question :

$$(\mathcal{E}) \quad x^2 y'' - 6x y' + 12y = 0.$$

Déterminer deux solutions sur I de cette équation de la forme $x \mapsto x^\alpha$ (α réel). En déduire S^+ puis S^- . Déterminer S et donner la dimension de S .

5. Donner un exemple d'équation différentielle du type :

$$(\mathcal{E}) \quad x^2 y'' + a(x) y' + b(x) y = 0$$

tel que $\dim(S) = 0$ (on détaillera). On pourra, par exemple, s'inspirer de la question précédente.

Exercice 82. — On considère dans cette partie l'équation différentielle :

$$(\mathcal{E}_1) \quad x^2 y'' + a x y' + b y = 0$$

où a et b sont des constantes réelles.

1. Que dire de la structure de l'ensemble des solutions de l'équation (\mathcal{E}_1) sur $I =]0, +\infty[$? Et sur $J =]-\infty, 0[$?
2. Démontrer que si y est une solution de (\mathcal{E}_1) sur I , alors $g = y \circ \exp$ est une solution sur \mathbf{R} de l'équation différentielle linéaire à coefficients constants :

$$(\mathcal{E}_2) \quad u'' + (a-1)u' + b u = 0.$$

3. Réciproquement, soit $t \mapsto g(t)$ une solution de (\mathcal{E}_2) sur \mathbf{R} . Démontrer que la fonction $g \circ \ln$ est solution de (\mathcal{E}_1) sur I .
4. Donner les solutions à valeurs réelles de l'équation (\mathcal{E}_2) dans le cas où $a = 3$ et $b = 1$ et dans le cas où $a = 1$ et $b = 4$. En déduire, dans chacun des cas, les solutions à valeurs réelles de l'équation (\mathcal{E}_1) sur l'intervalle I .