

Calcul différentiel 2

1. Vecteur tangent à une partie d'un espace vectoriel de dimension finie	2
1.1. Définition d'un vecteur tangent	2
1.2. Vecteurs tangents à sous-espace affine	2
1.3. Vecteurs tangents à une sphère d'un espace euclidien	2
1.4. Vecteurs tangents au graphe d'une fonction numérique différentiable sur un ouvert de \mathbf{R}^2	3
1.5. Vecteurs tangents à un diviseur à croisement normal (HP)	4
1.6. Vecteurs tangents à une ligne de niveau	4
2. Optimisation : étude au premier ordre	4
2.1. Définition d'un extremum local pour une fonction numérique	4
2.2. Condition nécessaire d'existence d'un extremum local pour une fonction réelle (rappel de MP2I)	5
2.3. Point critique d'une application différentiable	5
2.4. Condition nécessaire d'existence d'un extremum local sur un ouvert, à l'ordre 1	5
2.5. Condition nécessaire d'existence d'un extremum local sous contrainte, à l'ordre 1	6
3. Optimisation : étude au second ordre	8
3.1. Définition de la matrice Hessienne en un point d'une fonction de classe \mathcal{C}^2 sur un ouvert de \mathbf{R}^n	8
3.2. Une propriété fondamentale de la matrice Hessienne	9
3.3. Formule de Taylor-Young à l'ordre 2	9
3.4. Condition nécessaire d'existence d'un extremum local sur un ouvert de \mathbf{R}^n , à l'ordre 2	9
3.5. Définition d'un extremum local strict pour une fonction numérique	10
3.6. Condition suffisante d'existence d'un extremum local strict sur un ouvert de \mathbf{R}^n , à l'ordre 2	10
3.7. Condition suffisante d'existence d'un extremum local strict sur un ouvert de \mathbf{R}^2 , à l'ordre 2	11

1. Vecteur tangent à une partie d'un espace vectoriel de dimension finie

Notation. — Dans cette partie, E désigne un \mathbf{R} -espace vectoriel de dimension finie.

1.1. Définition d'un vecteur tangent

Définition 1. — Soient X une partie non vide de E et $x \in X$.

1. Un vecteur $v \in E$ est dit tangent à X en x si :

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \exists \gamma \in X^{]-\varepsilon, \varepsilon[} \quad \begin{cases} \gamma \text{ est dérivable en } 0 & [\text{régularité du chemin au temps } t = 0] \\ \gamma(0) = x & [\text{le chemin } \gamma \text{ passe par } x \text{ au temps } t = 0] \\ \gamma'(0) = v & [v \text{ est le vecteur vitesse du chemin } \gamma \text{ au temps } t = 0] \end{cases} .$$

2. L'ensemble des vecteurs de E tangents à X en x est noté $T_x X$, i.e. :

$$T_x X := \{v \in E : v \text{ est tangent à } X \text{ en } x\} .$$

Exercice 2. — Soient X une partie non vide de E et $x \in X$.

1. Démontrer que $0_E \in T_x X$.
2. Démontrer que, pour tout $v \in T_x X$, $\text{Vect}(v) \subset T_x X$.
3. Démontrer que, si $x \in \overset{\circ}{X}$, alors $T_x X = E$.

1.2. Vecteurs tangents à sous-espace affine

Rappel 3. — On rappelle la définition de sous-espace affine de E , la notion de direction de sous-espace affine et la description d'un sous-espace affine à partir de sa direction et de l'un quelconque de ses points.

1. Une partie \mathcal{A} de E est appelée sous-espace affine de E s'il existe un point $x \in E$ et un sous-espace vectoriel V de E tels que :

$$(*) \quad \mathcal{A} = x + V := \{x + v : v \in V\} .$$

2. Si x_1, x_2 sont des points de E et V_1, V_2 sont des sous-espaces vectoriels de E tels que $x_1 + V_1 = x_2 + V_2$, alors $V_1 = V_2$. Le sous-espace vectoriel V de E qui apparaît dans l'identité (*) est donc intrinsèque au sous-espace affine \mathcal{A} . On l'appelle direction du sous-espace affine \mathcal{A} .

3. Si \mathcal{A} est un sous-espace affine de E , de direction V , alors pour tout $a \in \mathcal{A}$, $\mathcal{A} = a + V$.

Proposition 4. — Soient \mathcal{A} un sous-espace affine, de direction notée V , et $a \in \mathcal{A}$. Alors $T_a \mathcal{A} = V$.

Démonstration.

\square Soient $\varepsilon > 0$ et $\gamma \in \mathcal{A}^{]-\varepsilon, \varepsilon[}$ une application dérivable en 0 telle que $\gamma(0) = a$. Comme, pour tout $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[\setminus \{0\}$:

$$\frac{\gamma(t) - \gamma(0)}{t} = \frac{\gamma(t) - a}{t} \in V$$

et V est une partie fermée de E (sous-espace vectoriel de dimension finie de E), $\gamma'(0) \in V$.

\square Si $v \in V$, alors l'application :

$$\gamma \Big|_{\begin{matrix}]-\varepsilon, \varepsilon[\\ t \end{matrix}} \begin{matrix} \longrightarrow \mathcal{A} = a + V \\ \longmapsto a + tv \end{matrix}$$

est bien définie et dérivable en 0. De plus, elle vérifie $\gamma(0) = a$ et $\gamma'(0) = v$.

\square

1.3. Vecteurs tangents à une sphère d'un espace euclidien

Notation. — Dans cette partie, nous supposons le \mathbf{R} -espace vectoriel de dimension finie E muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et nous notons $\| \cdot \|$ la norme associée. Ainsi :

$$\forall x \in E \quad \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} .$$

Proposition 5. — Soient $a \in E$ et $r \in \mathbf{R}_+^*$. Alors, pour tout $x \in S(a, r)$:

$$T_x S(a, r) = \text{Vect}(x - a)^\perp .$$

Démonstration.

☐ Soient $\varepsilon > 0$ et $\gamma \in S(a, r)^{]-\varepsilon, \varepsilon[}$ une application dérivable en 0 telle que $\gamma(0) = x$. De :

$$\forall t \in]-\varepsilon, \varepsilon[\setminus \{0\} \quad \langle \gamma(t) - a, \gamma(t) - a \rangle = r^2$$

et de la dérivabilité de γ en 0, nous déduisons :

$$2 \langle \gamma'(0), \gamma(0) - a \rangle = 0$$

puis $\langle \gamma'(0), x - a \rangle = 0$.

☐ Nous savons déjà que $0_E \in T_x S(a, r)$ (exercice 2). Considérons donc $v \in \text{Vect}(x - a)^\perp \setminus \{0_E\}$. L'application :

$$\gamma \left| \begin{array}{l}]-\pi, \pi[\longrightarrow S(a, r) \\ t \longmapsto a + \cos\left(\frac{\|v\|}{r} t\right) (x - a) + \sin\left(\frac{\|v\|}{r} t\right) \frac{r}{\|v\|} v \end{array} \right.$$

est bien définie et dérivable en 0. De plus, elle vérifie $\gamma(0) = x$ et $\gamma'(0) = v$.

☐

1.4. Vecteurs tangents au graphe d'une fonction numérique différentiable sur un ouvert de \mathbf{R}^2

Proposition 6. — Soient Ω un ouvert de \mathbf{R}^2 , $(a, b) \in \Omega$, $f : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$ une application différentiable en (a, b) et

$$X := \{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in \Omega\} \subset \mathbf{R}^3 .$$

Alors :

$$T_{(a,b,f(a,b))} X = \text{Vect} \left(\left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \right), \left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \right) \right) .$$

Démonstration.

☐ Soient $\varepsilon > 0$ et $\gamma \in X^{]-\varepsilon, \varepsilon[}$ une application dérivable en 0 telle que $\gamma(0) = (a, b, f(a, b))$. Si l'on note x la première application composante de γ et y la deuxième application composante de γ , alors les fonctions x et y sont dérivables en 0 et :

$$\forall t \in]-\varepsilon, \varepsilon[\quad \gamma(t) = (x(t), y(t), f(x(t), y(t))) \quad [\gamma \text{ est à valeurs dans } X] .$$

Nous en déduisons que :

$$\begin{aligned} \gamma'(0) &= \left(x'(0), y'(0), \frac{\partial f}{\partial x}(x(0), y(0)) \times x'(0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(0), y(0)) \times y'(0) \right) \\ &= \left(x'(0), y'(0), \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \times x'(0) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \times y'(0) \right) \\ &= x'(0) \left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \right) + y'(0) \left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \right) . \end{aligned}$$

☐ Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2$ fixé. La fonction :

$$\left| \begin{array}{l} \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}^2 \\ t \longmapsto (a + t\alpha, b + t\beta) \end{array} \right.$$

est continue et prend la valeur (a, b) en $t = 0$. Comme la fonction f est définie sur Ω , partie ouverte de \mathbf{R}^2 , il existe $\varepsilon > 0$ tel que la fonction :

$$\gamma \left| \begin{array}{l}]-\varepsilon, \varepsilon[\longrightarrow X \\ t \longmapsto (a + t\alpha, b + t\beta, f(a + t\alpha, b + t\beta)) \end{array} \right.$$

est bien définie. Elle est dérivable en 0 (chacune de ses applications composante l'est). De plus, elle vérifie $\gamma(0) = (a, b, f(a, b))$ et

$$\gamma'(0) = \left(\alpha, \beta, \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \times \alpha + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \times \beta \right) = \alpha \left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \right) + \beta \left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \right) .$$

☐

Exercice 7. — Déterminer l'espace tangent à $X = \{(x, y, 3x^3 + x y^2 - 2y^2) : (x, y) \in \mathbf{R}^2\}$ au point $p = (1, 1, 2)$.

1.5. Vecteurs tangents à un diviseur à croisement normal (HP)



Si X est une partie non vide de E et $x \in X$, l'ensemble $T_x X$ des vecteurs tangents à X en x n'est pas nécessairement un sous-espace vectoriel de E . Par exemple, si :

$$X := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x y = 0\} \quad [\text{union des deux axes de coordonnées}]$$

alors $T_{(0,0)} X = X$ n'est pas un sous-espace vectoriel de \mathbf{R}^2 .

1.6. Vecteurs tangents à une ligne de niveau

Théorème 8. — Soit E un \mathbf{R} -espace vectoriel de dimension finie, Ω un ouvert de E , $g : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$ une application de classe \mathcal{C}^1 et $\lambda \in \mathbf{R}$. Posons :

$$X = g^{-1}(\{\lambda\}) = \{x \in \Omega : g(x) = \lambda\} \quad [\text{ligne de niveau } \lambda]$$

et supposons X non vide. Alors :

$$\forall x \in X \quad dg(x) \neq 0_{\mathcal{L}(E, \mathbf{R})} \implies T_x X = \text{Ker}(dg(x)).$$

Ce théorème est admis.

Corollaire 9. — Soit Ω un ouvert de \mathbf{R}^n (muni de son produit scalaire usuel), $g : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$ une application de classe \mathcal{C}^1 et $\lambda \in \mathbf{R}$. Posons :

$$X = g^{-1}(\{\lambda\}) = \{x \in \Omega : g(x) = \lambda\} \quad [\text{ligne de niveau } \lambda]$$

et supposons X non vide. Alors :

$$\forall x \in X \quad \nabla g(x) \neq 0_{\mathbf{R}^n} \implies T_x X = \nabla g(x)^\perp.$$

Exercice 10. — Soit :

$$X = \left\{ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \right\} \quad [\text{parabolloïde}].$$

Déterminer $T_{(2,3,2)}$.

Exercice 11. — Soient a, b, c des réels strictement positifs et

$$X = \left\{ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \right\} \quad [\text{ellipsoïde}].$$

Déterminer $T_{(\alpha, \beta, \gamma)} X$, pour tout $(\alpha, \beta, \gamma) \in X$.

2. Optimisation : étude au premier ordre

Notation. — Pour toute cette partie, on fixe un \mathbf{R} -espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ de dimension finie $n \geq 1$.

2.1. Définition d'un extremum local pour une fonction numérique

Définition 12. — Soient A une partie de E et $f : A \longrightarrow \mathbf{R}$ une application.

1. On dit que f atteint un maximum local en un point a_M de A si :

$$\exists r > 0 \quad \forall a \in A \cap B(a_M, r) \quad f(a) \leq f(a_M).$$

2. On dit que f atteint un minimum local en un point a_m de A si :

$$\exists r > 0 \quad \forall a \in A \cap B(a_m, r) \quad f(a) \geq f(a_m).$$

2.2. Condition nécessaire d'existence d'un extremum local pour une fonction réelle (rappel de MP2I)

Théorème 13. — Soient $r > 0$ et $f :]-r, r[\longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction dérivable en 0. Si la fonction f atteint un extremum local en 0, alors $f'(0) = 0$.

2.3. Point critique d'une application différentiable

Définition 14. — Soient Ω un ouvert de E , $f : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$ une application différentiable et $x \in \Omega$. On dit qu'un point x est un point critique de f si :

$$df(x) = 0_{\mathcal{L}(E, \mathbf{R})}.$$

Exercice 15. — Justifier que l'application :

$$f \left| \begin{array}{l} \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R} \\ (x, y) \longmapsto x^3 - 3x + xy^2 \end{array} \right.$$

est différentiable et déterminer ses points critiques.

2.4. Condition nécessaire d'existence d'un extremum local sur un ouvert, à l'ordre 1

Théorème 16. — Soient Ω un ouvert de E et $f : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$ une application. Si x_0 est un point de Ω tel que :

- (H1) f est différentiable en x_0
 - (H2) f atteint un extremum local en x_0
- alors :
- (C) x_0 est un point critique de f .



La condition nécessaire du théorème 16 n'est pas suffisante. En effet, le point 0 est un point critique de l'application dérivable/différentiable :

$$f \left| \begin{array}{l} \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} \\ x \longmapsto x^3 \end{array} \right.$$

mais la fonction f n'atteint pas un extremum local en ce point.

Démonstration. Considérons une norme $\| \cdot \|$ sur E . Supposons que l'application f est différentiable en x_0 et qu'elle atteint un maximum local en un point x_0 de Ω .

(a) La fonction f est majorée par $f(x_0)$ sur $\Omega \cap B(x_0, r_1)$. — Comme f atteint un maximum local en un point x_0 :

$$\exists r_1 > 0 \quad \forall x \in B(x_0, r_1) \cap \Omega \quad f(x) \leq f(x_0). \tag{1}$$

(b) Il existe une boule ouverte $B(x_0, r_2)$ incluse dans Ω . — Comme Ω est une partie ouverte de E et $x_0 \in \Omega$:

$$\exists r_2 > 0 \quad B(x_0, r_2) \subset \Omega. \tag{2}$$

(c) La fonction f est définie sur $B(0, \min(r_1, r_2))$ et est majorée par $f(x_0)$ sur cette boule ouverte. — D'après (1) et (2), la fonction f est définie que $B(0, \min(r_1, r_2))$ et :

$$\forall x \in B(0, \min(r_1, r_2)) \quad f(x) \leq f(x_0). \tag{3}$$

(d) Introduction d'un arc γ ou déplacement autour de x_0 dans la direction v . — Soit v un vecteur non nul de E . La fonction :

$$\gamma \left| \begin{array}{l} \left] -\frac{\min(r_1, r_2)}{\|v\|}, \frac{\min(r_1, r_2)}{\|v\|} \right[\longrightarrow B(x_0, \min(r_1, r_2)) \\ t \longmapsto x_0 + tv \end{array} \right.$$

est bien définie et dérivable/différentiable en $t = 0$. De plus, elle vérifie $\gamma(0) = x_0$ et $\gamma'(0) = v$.

(e) La fonction $f \circ \gamma$, de la variable réelle à valeurs réelles, atteint son maximum en 0, point intérieur. — La fonction :

$$f \circ \gamma \left| \begin{array}{l} \left] -\frac{\min(r_1, r_2)}{\|v\|}, \frac{\min(r_1, r_2)}{\|v\|} \right[\longrightarrow \mathbf{R} \\ t \longmapsto f(x_0 + tv) \end{array} \right.$$

de la variable réelle à valeurs dans \mathbf{R} , est donc dérivable/différentiable en $t = 0$. De plus, comme γ prend ses valeurs dans $B(x_0, \min(r_1, r_2))$, l'inégalité (3) nous livre :

$$\forall t \in \left] -\frac{\min(r_1, r_2)}{\|v\|}, \frac{\min(r_1, r_2)}{\|v\|} \right[\quad f \circ \gamma(t) \leq f(x_0) = f \circ \gamma(0).$$

D'après le théorème 13 et la formule de dérivation le long d'un arc :

$$0 = (f \circ \gamma)'(0) = df(\gamma(0)) \cdot \gamma'(0) = df(x_0) \cdot v.$$

□

Exercice 17. — On considère la fonction :

$$f \left| \begin{array}{l}]0, +\infty[\times]0, +\infty[\longrightarrow \mathbf{R} \\ (x, y) \longmapsto xy + \frac{4}{x} + \frac{2}{y}. \end{array} \right.$$

- Justifier que f ne possède pas de maximum global.
- Démontrer que :

$$\forall (x, y) \in]0, +\infty[\times]0, +\infty[\setminus \left[\frac{4}{7}, \frac{49}{2} \right] \times \left[\frac{2}{7}, \frac{49}{4} \right] \quad f(x, y) \geq f(1, 1)$$

puis que f possède un minimum global.

- Justifier que f est différentiable sur $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$, puis qu'elle admet un unique point critique (x_0, y_0) .
- La fonction f atteint-elle un minimum/global en (x_0, y_0) ?

Exercice 18. — On munit \mathbf{R}^n de sa norme euclidienne usuelle $\| \cdot \|$ et on note :

$$B := \{x \in \mathbf{R}^n : \|x\| < 1\} \quad , \quad \bar{B} := \{x \in \mathbf{R}^n : \|x\| \leq 1\} \quad , \quad S := \{x \in \mathbf{R}^n : \|x\| = 1\}.$$

Soit $f : \bar{B} \longrightarrow \mathbf{R}$ une application continue sur \bar{B} , différentiable sur B et constante sur S . Démontrer qu'il existe $c \in B$ tel que $df(c) = 0_{\mathcal{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})}$.

2.5. Condition nécessaire d'existence d'un extremum local sous contrainte, à l'ordre 1

Théorème 19. — Soient Ω un ouvert de E , $f : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$ une application et X une partie non vide de Ω . Si x_0 est un point de X tel que :

- (H1) f est différentiable en x_0
- (H2) la restriction de f à X atteint un extremum local en x_0

alors :

(C) $\forall v \in T_{x_0}X \quad df(x_0) \cdot v = 0_{\mathbf{R}}.$

Démonstration. Supposons que f est différentiable en x_0 et que la restriction de f à X atteint un maximum local en x_0 .

(a) La fonction $f|_X$ est majorée par $f(x_0)$ sur $X \cap B(x_0, r)$. — Comme $f|_X$ atteint un maximum local en x_0 :

$$\exists r > 0 \quad \forall x \in B(x_0, r) \cap X \quad f(x) \leq f(x_0). \tag{4}$$

(b) Introduction d'un vecteur tangent à X en x_0 , à l'aide d'un arc γ . — Fixons un vecteur $v \in T_{x_0}X$. Il existe $\varepsilon > 0$ et $\gamma \in X^{]-\varepsilon, \varepsilon[}$ une application dérivable en 0 telle que $\gamma(0) = x_0$ et $\gamma'(0) = v$.

(c) Restriction de l'arc γ pour que le nouvel arc prenne ses valeurs dans $X \cap B(x_0, r)$. — Comme γ est continue en 0 :

$$\exists \alpha > 0 \quad \forall t \in]-\varepsilon, \varepsilon[\quad |t| < \alpha \implies \|\gamma(t) - x_0\| < r.$$

L'application :

$$\tilde{\gamma} \left| \begin{array}{l}]-\min(\alpha, \varepsilon), \min(\alpha, \varepsilon)[\\ t \end{array} \right. \begin{array}{l} \longrightarrow X \cap B(x_0, r) \\ \longmapsto \gamma(t) \end{array}$$

est bien définie. De plus, elle est différentiable/dérivable en 0 et vérifie $\tilde{\gamma}(0) = x_0$ et $\tilde{\gamma}'(0) = v$.

(d) La fonction $f \circ \tilde{\gamma}$, de la variable réelle à valeurs réelles, atteint son maximum en 0, point intérieur. — La fonction :

$$f \circ \tilde{\gamma} \left| \begin{array}{l}]-\min(\alpha, \varepsilon), \min(\alpha, \varepsilon)[\\ t \end{array} \right. \begin{array}{l} \longrightarrow \mathbf{R} \\ \longmapsto f(\gamma(t)) \end{array}$$

est donc dérivable/différentiable en $t = 0$. De plus, comme $\tilde{\gamma}$ prend ses valeurs dans $X \cap B(x_0, r)$, l'inégalité (4) nous livre :

$$\forall t \in]-\min(\alpha, \varepsilon), \min(\alpha, \varepsilon)[\quad f \circ \tilde{\gamma}(t) \leq f(x_0) = f \circ \tilde{\gamma}(0).$$

D'après le théorème 13 et la formule de dérivation le long d'un arc :

$$0 = (f \circ \tilde{\gamma})'(0) = df(\tilde{\gamma}(0)) \cdot \tilde{\gamma}'(0) = df(x_0) \cdot v.$$

□

Lemme 20. — Soient E un \mathbf{R} -espace vectoriel de dimension finie, φ une forme linéaire non nulle sur E et ψ une forme linéaire sur E . Alors :

$$\text{Ker}(\varphi) \subset \text{Ker}(\psi) \iff (\exists \lambda \in \mathbf{R} \quad \psi = \lambda \varphi).$$

Corollaire 21. — Soient Ω un ouvert de E , $f, g \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbf{R})$ et :

$$X := g^{-1}(\{0\}) = \{x \in \Omega : g(x) = 0\} \quad [\text{ligne de niveau 0 pour la fonction } g].$$

Si x_0 est un point de X tel que :

(H1) la restriction de f à X atteint un extremum local en x_0

(H2) $dg(x_0) \neq 0_{\mathcal{L}(E, \mathbf{R})}$

alors :

(C) $\exists \lambda \in \mathbf{R} \quad df(x_0) = \lambda dg(x_0) \quad [\text{le réel } \lambda \text{ est appelé multiplicateur de Lagrange}].$

Démonstration. Supposons (H1) et (H2) vérifiées. D'après le théorème 19 :

$$\forall v \in T_{x_0}X \quad df(x_0) \cdot v = 0_{\mathbf{R}}.$$

D'après le théorème 8, $T_{x_0}X = \text{Ker}(dg(x_0))$. Ainsi :

$$\forall v \in \text{Ker}(dg(x_0)) \quad df(x_0) \cdot v = 0_{\mathbf{R}}$$

d'où $\text{Ker}(dg(x_0)) \subset \text{Ker}(df(x_0))$. Le lemme 20 livre alors un réel λ tel que $df(x_0) = \lambda dg(x_0)$. □

Corollaire 22. — Soient Ω un ouvert de \mathbf{R}^n (muni de son produit scalaire usuel), $f, g \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbf{R})$ et :

$$X := g^{-1}(\{0\}) = \{x \in \Omega : g(x) = 0\} \quad [\text{ligne de niveau 0 pour la fonction } g].$$

Si x_0 est un point de X tel que :

(H1) la restriction de f à X atteint un extremum local en x_0 ;

(H2) $\nabla g(x_0) \neq 0_{\mathbf{R}^n}$

alors :

(C) $\exists \lambda \in \mathbf{R} \quad \nabla f(x_0) = \lambda \nabla g(x_0) \quad [\text{le réel } \lambda \text{ est appelé multiplicateur de Lagrange}].$

Exercice 23. — Déterminer les extrema globaux de la fonction :

$$f \left| \begin{array}{l} \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R} \\ (x, y) \longmapsto x y z \end{array} \right.$$

sur $S := \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.

Exercice 24. — Soit f l'application définie par :

$$f \left| \begin{array}{l} \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R} \\ (x, y) \longmapsto 4x^2 + 12xy - y^2 \end{array} \right.$$

et $C = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2, x^2 + y^2 = 13\}$.

1. Justifier que f atteint un maximum et un minimum sur C .
2. Soit $(u, v) \in C$ un point où f atteint un de ses extremums.
 - (a) Justifier avec un théorème du programme qu'il existe un réel λ tel que le système (S) suivant soit vérifié :

$$(S) : \begin{cases} 4u + 6v = \lambda u \\ 6u - v = \lambda v. \end{cases}$$

(b) Montrer que $(\lambda - 4)(\lambda + 1) - 36 = 0$. En déduire les valeurs possibles de λ .

3. Déterminer les valeurs possibles de (u, v) , puis donner le maximum et le minimum de f sur C .

Exercice 25. — Déterminer les extrema globaux de la fonction :

$$g \left| \begin{array}{l} \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R} \\ (x, y, z) \longmapsto y^2(x^2 - z^2 - 1) \end{array} \right.$$

sur $S = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.

Exercice 26. — On note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire usuel sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ et $\|\cdot\|$ la norme associée. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbf{R})$, S la sphère unité de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ et :

$$f \left| \begin{array}{l} \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R}) \longrightarrow \mathbf{R} \\ X \longmapsto \langle AX, X \rangle \end{array} \right.$$

1. Justifier que la fonction f admet un maximum sur S .
2. En utilisant le théorème d'optimisation sous contrainte, démontrer que A possède un vecteur propre.

3. Optimisation : étude au second ordre

3.1. Définition de la matrice Hessienne en un point d'une fonction de classe \mathcal{C}^2 sur un ouvert de \mathbf{R}^n

Définition 27. — Soit Ω un ouvert de \mathbf{R}^n ,

$$f \left| \begin{array}{l} \Omega \longrightarrow \mathbf{R} \\ (x_1, \dots, x_n) \longmapsto f(x_1, \dots, x_n) \end{array} \right.$$

une fonction de classe \mathcal{C}^2 et $a \in \Omega$. La matrice Hessienne de f en a , notée $H_f(a)$, est définie par :

$$H_f(a) := \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(a) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(a) \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \right)_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2}.$$

Exercice 28. — Justifier que l'application :

$$f \left| \begin{array}{l} \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R} \\ (x, y, z) \longmapsto x^2 y^3 z^5 \end{array} \right.$$

est de classe \mathcal{C}^2 et calculer sa matrice Hessienne au point $(2, -1, 1)$.

3.2. Une propriété fondamentale de la matrice Hessienne

Proposition 29. — Soit Ω un ouvert de \mathbf{R}^n et

$$f \left| \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (x_1, \dots, x_n) & \longmapsto & f(x_1, \dots, x_n) \end{array} \right.$$

une fonction de classe \mathcal{C}^2 . Alors :

$$\forall a \in \Omega, \quad H_f(a) \in \mathcal{S}_n(\mathbf{R}).$$

Démonstration. Il s'agit d'une conséquence du théorème de Schwarz. □

3.3. Formule de Taylor-Young à l'ordre 2

Convention. — Nous confondons \mathbf{R}^n et $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbf{R})$ dans la suite, i.e. pour tous réels a_1, \dots, a_n , nous identifions :

$$\underbrace{(a_1, a_2, \dots, a_n)}_{\text{élément de } \mathbf{R}^n} \quad \text{et} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix}}_{\text{élément de } \mathcal{M}_{1,n}(\mathbf{R})}.$$

Proposition 30. — On note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire usuel sur \mathbf{R}^n et $\| \cdot \|$ la norme euclidienne associée sur \mathbf{R}^n . Soit Ω un ouvert de \mathbf{R}^n et

$$f \left| \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (x_1, \dots, x_n) & \longmapsto & f(x_1, \dots, x_n) \end{array} \right.$$

une fonction de classe \mathcal{C}^2 . Alors :

$$f(a+h) \underset{h \rightarrow 0_{\mathbf{R}^n}}{=} f(a) + \langle \nabla f(a), h \rangle + \frac{1}{2} \langle h H_f(a), h \rangle + o(\|h\|^2)$$

i.e. :

$$f(a+h) \underset{h \rightarrow 0_{\mathbf{R}^n}}{=} f(a) + \nabla f(a) \times h^\top + \frac{1}{2} h \times H_f(a) \times h^\top + o(\|h\|^2).$$

Ce théorème est admis.

3.4. Condition nécessaire d'existence d'un extremum local sur un ouvert de \mathbf{R}^n , à l'ordre 2

Théorème 31. — Soient Ω un ouvert de \mathbf{R}^n , $f : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$ une application de classe \mathcal{C}^2 et $a \in \Omega$.

1. Si f atteint un minimum local en a alors a est un point critique de f et $H_f(a) \in \mathcal{S}_n^+(\mathbf{R})$.
2. Si f atteint un maximum local en a alors a est un point critique de f et $-H_f(a) \in \mathcal{S}_n^+(\mathbf{R})$.

Démonstration.

1. Supposons que la fonction f atteigne un minimum local en a .

- (a) Le point a est un point critique de f . — Nous avons déjà établi que a est un point critique de f , donc $\nabla f(a) = 0_{\mathbf{R}^n}$ (théorème 16).
- (b) Écriture de la formule de Taylor au point a . — La formule de Taylor-Young à l'ordre 2 en a s'écrit donc :

$$f(a+h) \underset{h \rightarrow 0_{\mathbf{R}^n}}{=} f(a) + \frac{1}{2} h \times H_f(a) \times h^\top + o(\|h\|^2). \tag{5}$$

- (c) Introduction d'un vecteur non nul $h \in \mathbf{R}^n$ et DL de la fonction $t \longmapsto f(a + t h)$ à l'ordre 2 en $0_{\mathbf{R}}$. — Fixons un vecteur non nul $h \in \mathbf{R}^n$. Comme a est un point de l'ouvert Ω de \mathbf{R}^n , la fonction de la variable réelle t :

$$t \longmapsto f(a + t h)$$

est définie sur un voisinage ouvert de $0_{\mathbf{R}}$ et, d'après (5) :

$$f(a + t h) \underset{t \rightarrow 0_{\mathbf{R}}}{=} f(a) + \frac{t^2}{2} h \times H_f(a) \times h^\top + o(t^2)$$

d'où :

$$h \times H_f(a) \times h^\top + o(1) \underset{t \rightarrow 0_{\mathbf{R}}}{=} \frac{2}{t^2} (f(a + t h) - f(a)). \tag{6}$$

(d) Conclusion à l'aide du signe de la fonction $t \mapsto \frac{2}{t^2}(f(a + t h) - f(a))$ au voisinage de $0_{\mathbf{R}}$. — Comme f atteint un minimum local en a , la fonction :

$$t \mapsto \frac{2}{t^2}(f(a + t h) - f(a))$$

est positive ou nulle sur un voisinage épointé de $0_{\mathbf{R}}$. Aussi, en faisant tendre t vers $0_{\mathbf{R}}$ dans (6), il vient :

$$h \times H_f(a) \times h^{\top} \geq 0.$$

2. Il suffit d'appliquer la propriété 1, déjà établie, à la fonction $-f$ pour obtenir la propriété 2. □

Exercice 32. — Soient $a > 0$ et f la fonction définie par :

$$f \left| \begin{array}{l} \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R} \\ (x, y) \longmapsto x^2 + a x y. \end{array} \right.$$

1. Justifier que la fonction f est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbf{R}^2 .
2. Démontrer que $(0, 0)$ est un point critique de f .
3. Calculer la matrice Hessienne $H_f(0, 0)$ de f au point $(0, 0)$ et justifier que $H_f(0, 0) \in \mathcal{S}_2^+(\mathbf{R})$.
4. Peut-on déduire de cette étude que f atteint un extremum local en $(0, 0)$? On pourra considérer le cas $a = 0$, puis le cas $a = 1$.

3.5. Définition d'un extremum local strict pour une fonction numérique

Définition 33. — Soient A une partie de E et $f : A \longrightarrow \mathbf{R}$ une application.

1. On dit que f atteint un maximum local strict en un point a_M de A si :

$$\exists r > 0 \quad \forall a \in A \cap B(a_M, r) \setminus \{a_M\} \quad f(a) < f(a_M).$$

2. On dit que f atteint un minimum local strict en un point a_m de A si :

$$\exists r > 0 \quad \forall a \in A \cap B(a_m, r) \setminus \{a_m\} \quad f(a) > f(a_m).$$

3.6. Condition suffisante d'existence d'un extremum local strict sur un ouvert de \mathbf{R}^n , à l'ordre 2

Théorème 34. — Soient Ω un ouvert de \mathbf{R}^n , $f : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$ une application de classe \mathcal{C}^2 et $a \in \Omega$.

1. Si a est un point critique de f et si $H_f(a) \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbf{R})$, alors f atteint un minimum local strict en a .
2. Si a est un point critique de f et si $-H_f(a) \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbf{R})$, alors f atteint un maximum local strict en a .

Démonstration.

1. Soit a est un point critique de f tel que $H_f(a) \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbf{R})$.

(a) L'application $u \mapsto u \times H_f(a) \times u^{\top}$ est minorée par une valeur strictement positive sur $S(0_{\mathbf{R}^n}, 1)$. — Notons $S(0_{\mathbf{R}^n}, 1)$ la sphère unité de \mathbf{R}^n (compacte puisque fermée et bornée, dans \mathbf{R}^n de dimension finie) et considérons la fonction :

$$q \left| \begin{array}{l} S(0_{\mathbf{R}^n}, 1) \longrightarrow \mathbf{R} \\ u = (u_1, \dots, u_n) \longmapsto u \times H_f(a) \times u^{\top} = \sum_{1 \leq i, j \leq n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) u_i u_j \end{array} \right.$$

qui est strictement positive ($H_f(a) \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbf{R})$) et continue ($q(u_1, \dots, u_n)$ est une expression polynomiale en u_1, \dots, u_n). D'après le théorème des bornes atteintes :

$$\exists s \in S(0_{\mathbf{R}^n}, 1) \quad \forall u \in S(0_{\mathbf{R}^n}, 1) \quad q(u) \geq q(s) > 0.$$

(b) Écriture de la formule de Taylor au point a . — Comme a est un point critique de f , la formule de Taylor-Young à l'ordre 2 en a s'écrit :

$$f(a + h) \underset{h \rightarrow 0_{\mathbf{R}^n}}{=} f(a) + \frac{1}{2} h \times H_f(a) \times h^{\top} + o(\|h\|^2)$$

i.e. :

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} f(a) + \frac{1}{2} (x-a) \times H_f(a) \times (x-a)^T + o(\|x-a\|^2).$$

Nous en déduisons que :

$$\frac{f(x)-f(a)}{\|x-a\|^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{x-a}{\|x-a\|} \right) \times H_f(a) \times \left(\frac{x-a}{\|x-a\|} \right)^T \xrightarrow{x \rightarrow a} 0_{\mathbf{R}}$$

assertion que l'on peut également écrire :

$$\frac{f(x)-f(a)}{\|x-a\|^2} - \frac{1}{2} q \left(\frac{x-a}{\|x-a\|} \right) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0_{\mathbf{R}} \tag{7}$$

puisque $\frac{x-a}{\|x-a\|} \in S(0_{\mathbf{R}^n}, 1)$, si $x \in \mathbf{R}^n \setminus \{a\}$.

(c) Conclusion avec la définition formelle de la notion de limite épointée. — Comme $q(s) > 0$, nous déduisons de (7) que :

$$\exists r > 0 \quad \forall x \in \Omega \cap B(a, r) \setminus \{a\} \quad \left| \frac{f(x)-f(a)}{\|x-a\|^2} - \frac{1}{2} q \left(\frac{x-a}{\|x-a\|} \right) \right| \leq \frac{q(s)}{4}$$

puis :

$$\forall x \in \Omega \cap B(a, r) \setminus \{a\} \quad \frac{f(x)-f(a)}{\|x-a\|^2} \geq \underbrace{\frac{1}{2} \left(q \left(\frac{x-a}{\|x-a\|} \right) - q(s) \right)}_{\geq 0} + \underbrace{\frac{q(s)}{4}}_{> 0} > 0 \quad \left[\text{car } \frac{x-a}{\|x-a\|} \in S(0_{\mathbf{R}^n}, 1) \right].$$

2. Il suffit d'appliquer la propriété 1, déjà établie, à la fonction $-f$ pour obtenir la propriété 2. □

3.7. Condition suffisante d'existence d'un extremum local strict sur un ouvert de \mathbf{R}^2 , à l'ordre 2

Théorème 35. — Soient Ω un ouvert de \mathbf{R}^2 , $f : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ une application de classe \mathcal{C}^2 et $a \in \Omega$.

1. Si $\nabla f(a) = (0, 0)$, $\text{tr}(H_f(a)) > 0$ et $\det(H_f(a)) > 0$, alors f atteint un minimum local strict en a .
2. Si $\nabla f(a) = (0, 0)$, $\text{tr}(H_f(a)) < 0$ et $\det(H_f(a)) > 0$, alors f atteint un maximum local strict en a .

Démonstration.

1. Supposons $\nabla f(a) = (0, 0)$, $\text{tr}(H_f(a)) > 0$ et $\det(H_f(a)) > 0$.

- Comme $\nabla f(a) = (0, 0)$, le point a est un point critique de f .
- D'après le théorème spectral, appliqué à la matrice $H_f(a) \in \mathcal{S}_2(\mathbf{R})$, la matrice $H_f(a)$ est diagonalisable sur \mathbf{R} . Si nous notons $\lambda_1 \leq \lambda_2$ ses valeurs propres, alors les hypothèses $\text{tr}(H_f(a)) > 0$ et $\det(H_f(a)) > 0$ se traduisent par :

$$\lambda_1 + \lambda_2 > 0 \quad \text{et} \quad \lambda_1 \lambda_2 > 0$$

Nous en déduisons que λ_1 et λ_2 sont des réels strictement positifs. D'après la caractérisation spectrale des matrices de $\mathcal{S}_2^{++}(\mathbf{R})$, il vient $H_f(a) \in \mathcal{S}_2^{++}(\mathbf{R})$.

D'après le théorème 34, f atteint un minimum local strict en a .

2. Il suffit d'appliquer la propriété 1, déjà établie, à la fonction $-f$ pour obtenir la propriété 2. □

Exercice 36. — Étudier les extremas locaux et globaux de la fonction :

$$f \left| \begin{array}{l} \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R} \\ (x, y) \longmapsto x^3 - 3x + xy^2. \end{array} \right.$$

Exercice 37. — Soit f la fonction définie par :

$$f \left| \begin{array}{l} \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R} \\ (x, y) \longmapsto 2x^3 + 6xy - 3y^2 + 2. \end{array} \right.$$

1. La fonction f admet-elle des extrema locaux sur \mathbf{R}^2 ? Si oui, les déterminer.
2. La fonction f admet-elle des extrema globaux sur \mathbf{R}^2 ? Justifier.
3. On pose $K = [0, 1] \times [0, 1]$. Justifier que f admet un maximum global sur K , puis le déterminer.