

# Calcul différentiel 1

1. Introduction	2
1.1. Les applications étudiées en MP2I, d'un ouvert de $\mathbf{R}$ vers $\mathbf{R}$	2
1.2. Les fonctions vectorielles : une variable à la source, plusieurs variables au but	3
1.3. Les applications objets de l'étude, d'un ouvert de $\mathbf{R}^n$ vers d'un ouvert de $\mathbf{R}^p$	3
2. Rappels sur la continuité	6
2.1. Définition de la continuité d'une fonction en un point	6
2.2. Critère séquentiel de continuité en un point	6
2.3. Sélection d'exercices sur la continuité	6
3. Dérivée selon un vecteur et dérivées partielles	7
3.1. Définition d'une dérivée selon un vecteur ou dérivée directionnelle	7
3.2. Dérivées partielles	9
3.3. Fonction de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$ admettant des dérivées partielles continues en tout point de $\mathbf{R}^2$	10
4. Différentielle	11
4.1. Définition d'une application différentiable en un point	11
4.2. Différentiabilité en un point via les applications composantes	12
4.3. La différentiabilité en $a$ entraîne la continuité en $a$	13
4.4. Une application différentiable en $a$ admet des dérivées en $a$ dans toutes les directions	13
4.5. Différentielle en $a$ d'une application différentiable en $a$	14
4.6. Application différentiable sur un ouvert et différentielle	14
4.7. Différentiabilité et différentielle d'une application constante	14
4.8. Différentiabilité et différentielle d'une application linéaire	15
5. Différentiabilité de fonctions d'un ouvert de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^p$	15
5.1. Différentiabilité et différentielle de fonctions d'un ouvert de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}^p$	15
5.2. Expression de la différentielle d'une fonction différentiable sur ouvert de $\mathbf{R}^n$ via les dérivées partielles	16
5.3. Matrice Jacobienne d'une fonction différentiable sur ouvert de $\mathbf{R}^n$ à valeurs dans $\mathbf{R}^p$	17
5.4. Différentielle d'une fonction différentiable sur ouvert de $\mathbf{R}^n$ à valeurs dans $\mathbf{R}$ et gradient	18
6. Opérations sur les applications différentiables	19
6.1. Combinaison linéaire de deux applications différentiables	19
6.2. Composée d'applications différentiables par une application multilinéaire	20
6.3. Composée de deux applications différentiables ou règle de la chaîne	21
6.4. Dérivée le long d'un arc	24
6.5. Dérivées partielles d'une composée de deux applications différentiables	25
7. Applications de classe $\mathcal{C}^1$	26
7.1. Définition d'une application de classe $\mathcal{C}^1$	26
7.2. Caractérisation des applications de classe $\mathcal{C}^1$ par les dérivées partielles	26
7.3. Opérations sur les applications de classe $\mathcal{C}^1$	28
7.4. Intégration d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ le long d'un arc	28
7.5. Caractérisation des fonctions constantes sur un ouvert connexe par arcs	29
7.6. Étude d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre	29
8. Trois méthodes classiques pour étudier la différentiabilité	30
8.1. Appliquer des théorèmes d'opérations à des fonctions usuelles différentiables	30
8.2. Calculer un DL1 de $f$ en un point $a$ en développant $f(a+h)$	30
8.3. Appliquer le critère fondamental $\mathcal{C}^1$ pour une fonction de plusieurs variables	31
8.4. Différentiabilité et différentielle du déterminant : deux approches (HP)	33
9. Applications de classe $\mathcal{C}^k$	33
9.1. Dérivées partielles d'ordre $k$	33
9.2. Définition d'une applications de classe $\mathcal{C}^k$	34
9.3. Théorème de Schwarz	34
9.4. Caractère $\mathcal{C}^k$ via les applications composantes	34
9.5. Opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^k$	35
9.6. Étude d'une équation aux dérivées partielles du second ordre (équation de d'Alembert)	35

### 1. Introduction

#### 1.1. Les applications étudiées en MP2I, d'un ouvert de R vers R

En MP2I, les fonctions :

$$f \left| \begin{array}{l} \Omega \longrightarrow \mathbf{R} \\ x \longmapsto f(x) \end{array} \right.$$

où  $f$  est un (intervalle) ouvert de  $\mathbf{R}$  ont été intensément étudiées.

Pour de telles fonctions, un calcul différentiel a été développé, livrant des résultats sur les extrema locaux, e.g. :

- une condition nécessaire pour qu'une fonction atteigne un extremum local en un point (calcul différentiel à l'ordre 1, cf. théorème 1) ;
- une condition suffisante pour qu'une fonction atteigne un extremum local en un point (calcul différentiel à l'ordre 2, cf. théorème 3).

**Théorème 1.** — Si la fonction  $f$  est dérivable sur  $\Omega$  et si  $a$  est un point de  $\Omega$  en lequel  $f$  atteint un extremum local, alors  $f'(a) = 0$ .

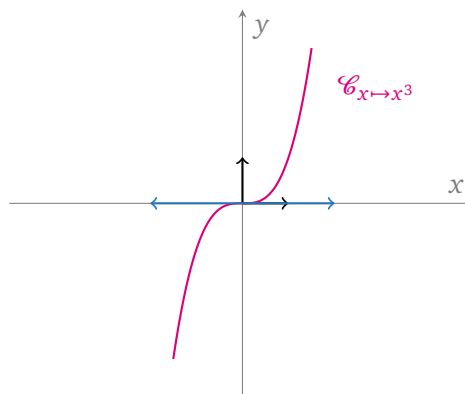
*Démonstration.* Supposons, sans perte de généralité, que  $f$  atteigne un minimum local au point  $a$ . Alors :

- pour tout  $x \in \underbrace{\Omega \cap ]a, +\infty[}_{\neq \emptyset}$ ,  $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq 0$  et donc  $f'(a) = f'_d(a) = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq 0$  ;
- pour tout  $x \in \underbrace{\Omega \cap ]-\infty, a[}_{\neq \emptyset}$ ,  $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq 0$  et donc  $f'(a) = f'_g(a) = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq 0$ .

De  $0 \leq f'(a) \leq 0$ , nous déduisons  $f'(a) = 0$ . □

**Remarque 2.** — L'hypothèse  $f'(a) = 0$  se traduit géométriquement par la présence d'une asymptote horizontale à la courbe  $\mathcal{C}_f$  au point de coordonnées  $(a, f(a))$ .

La condition nécessaire «  $f'(a) = 0$  » pour que la fonction  $f$  atteigne un extremum local en  $a$  n'est pas suffisante, comme nous l'apprend la fonction « élévation au cube », qui possède une tangente horizontale au point d'abscisse 0, sans pour autant atteindre un extremum local en ce point.



**Théorème 3.** — Si la fonction  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\Omega$  et si  $a$  est un point de  $\Omega$  tel que  $f'(a) = 0$  et  $f''(a) > 0$ , alors la fonction  $f$  atteint un minimum local strict au point  $a$ .

*Démonstration.* La fonction  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\Omega$  donc, d'après la formule de Taylor-Young :

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2}(x - a)^2 + o((x - a)^2) .$$

Comme  $f'(a) = 0$ , nous en déduisons :

$$f(x) - f(a) \underset{x \rightarrow a}{\sim} \frac{f''(a)}{2}(x - a)^2 .$$

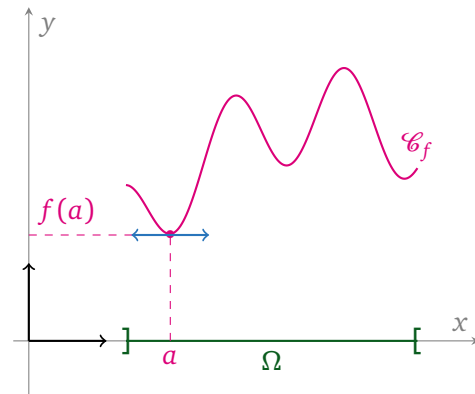
Puisque la fonction  $x \mapsto \frac{f''(a)}{2}(x - a)^2$  est strictement positive en dehors du point  $a$ , nous en déduisons que la fonction  $x \mapsto f(x) - f(a)$  est strictement positive sur un voisinage époincé de  $a$ , i.e. que la fonction  $f$  atteint un minimum local strict au point  $a$ .

□

**Remarque 4.** — L’hypothèse  $f'(a) = 0$  se traduit géométriquement par la présence d’une asymptote horizontale à la courbe  $\mathcal{C}_f$  au point de coordonnées  $(a, f(a))$ .

La fonction  $f$  étant de classe  $\mathcal{C}^2$  et vérifiant  $f''(a) > 0$ , la fonction  $f''$  est strictement positive sur un voisinage de  $a$ . Géométriquement, cela nous livre la convexité de  $f$  sur un voisinage de  $a$ .

Ces considérations géométriques rendent naturelles l’énoncé du théorème 3.



**1.2. Les fonctions vectorielles : une variable à la source, plusieurs variables au but**

Pour des fonctions :

$$f \left| \begin{array}{l} \Omega \longrightarrow \mathbf{R}^p \\ t \longmapsto (f_1(t), \dots, f_p(t)) \end{array} \right.$$

où  $\Omega$  est un (intervalle) ouvert de  $\mathbf{R}$ , et  $f_1, \dots, f_p$  sont des fonctions définies sur  $\Omega$  à valeurs dans  $\mathbf{R}$ , nous avons développé un calcul différentiel à tout ordre, mais aussi un calcul intégral.

Des résultats puissants ont été établis, e.g. :

- le théorème fondamental de l’analyse (existence d’une primitive pour toute fonction vectorielle continue sur un intervalle, exprimée sous forme intégrale) ;
- l’inégalité des accroissements finis (IAF) ;
- la formule de Taylor avec reste intégrale ;
- l’inégalité de Taylor-Lagrange (généralisant l’IAF) ;
- la formule de Taylor-Young.

Nous en verrons des applications plus tard, par exemple dans le chapitre sur les équations différentielles linéaires.

**1.3. Les applications objets de l’étude, d’un ouvert de  $\mathbf{R}^n$  vers d’un ouvert de  $\mathbf{R}^p$**

Dans ce chapitre, nous étudions des applications :

$$f \left| \begin{array}{l} \Omega \longrightarrow F \\ x \longmapsto f(x) \end{array} \right.$$

où  $\Omega$  est un ouvert d’un  $\mathbf{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $E$  et  $F$  est un  $\mathbf{K}$ -espace vectoriel de dimension finie.

Souvent, nous considérerons plus particulièrement des applications :

$$f \left| \begin{array}{l} \Omega \longrightarrow \mathbf{R}^p \\ (x_1, \dots, x_n) \longmapsto (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_p(x_1, \dots, x_n)) \end{array} \right.$$

où  $n, p$  sont des entiers naturels non nuls,  $\Omega$  est un ouvert de  $\mathbf{R}^n$  et  $f_1, \dots, f_p$  sont des fonctions définies sur  $\Omega$  à valeurs dans  $\mathbf{R}$ .

C’est pour de telles fonctions que nous nous proposons de construire un calcul différentiel à tout ordre, à l’aide des notions/outils suivants :

- dérivée selon un vecteur ;

- dérivée partielle ;
- application différentiable en un point ;
- différentielle en un point d'une application différentiable en ce point ;
- expression matricielle de la différentielle en un point (matrice Jacobienne) ;
- formulaire de calcul différentiel à l'ordre 1 ;
- applications de classe  $\mathcal{C}^1$  ;
- formule d'intégration le long d'un arc pour les applications de classe  $\mathcal{C}^1$  ;
- applications de classe  $\mathcal{C}^k$ , où  $k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$  ;
- une formule de calcul différentiel à l'ordre 2 (théorème de Schwarz) ;
- vecteur tangent à une partie d'un espace vectoriel de dimension finie ;
- optimisation au premier ordre (généralisation de la condition nécessaire pour qu'une fonction atteigne un extremum local en un point énoncée dans le théorème 1) ;
- optimisation au second ordre, cf. généralisation de la condition suffisante pour qu'une fonction atteigne un extremum local en un point énoncée dans le théorème 3).

Nous apprendrons à résoudre des équations aux dérivées partielles « simples » (e.g. équation des cordes vibrantes ou équation de d'Alembert).

Nous porterons également notre attention sur les extrema locaux des fonctions :

$$f \left\{ \begin{array}{l} \Omega \longrightarrow \mathbf{R} \\ (x_1, \dots, x_n) \longmapsto f(x_1, \dots, x_n) \end{array} \right.$$

où  $n$ , est un entier naturel non nul et  $\Omega$  est un ouvert de  $\mathbf{R}^n$ . Cette problématique possède une interprétation géométrique naturelle, que nous présentons ci-dessous en nous restreignant au cas où  $n = 2$ .

**Définition 5.** — Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbf{R}^2$  et une fonction  $f : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$ . On appelle graphe de la fonction  $f$  la partie  $\Gamma$  de  $\mathbf{R}^3$  définie par

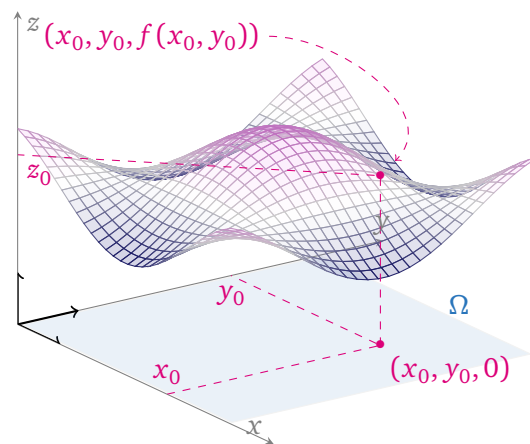
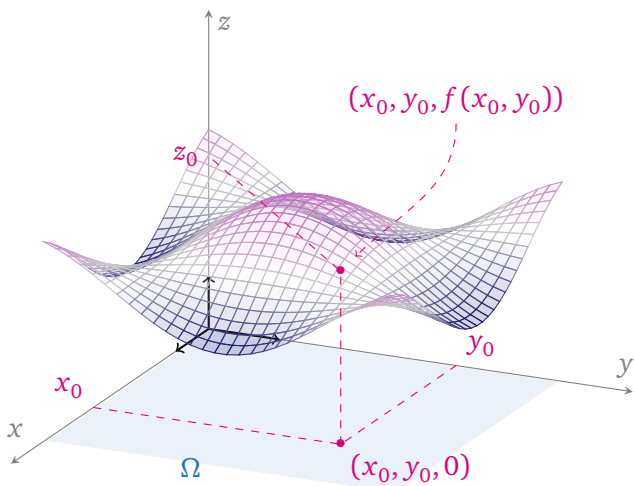
$$\Gamma := \{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in \Omega\}$$

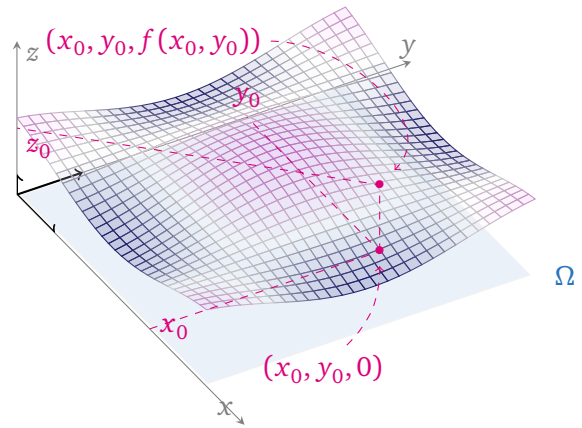
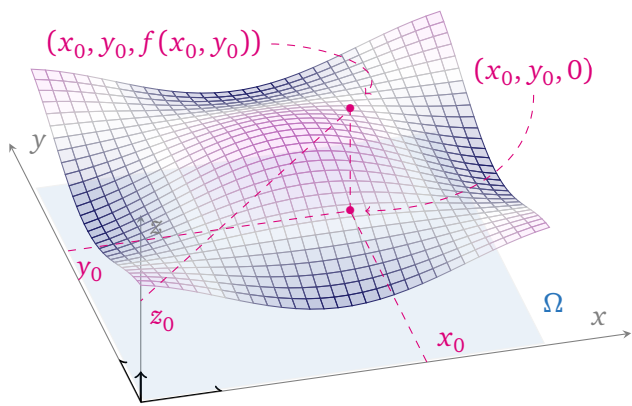
i.e.  $\Gamma$  est l'ensemble des points de l'espace de composantes  $(x, y, f(x, y))$  obtenus en faisant varier  $(x, y)$  dans  $\Omega$ .

**Exemple 6.** — Ci-dessous nous représentons un point du graphe/de la nappe/de la surface  $\Gamma$  de la fonction :

$$f \left\{ \begin{array}{l} \Omega := ]0, 5[ \times ]0, 5[ \longrightarrow \mathbf{R} \\ (x, y) \longmapsto \sin\left(\frac{\pi}{3}(x-4)\right) \sin\left(\frac{\pi}{3}(y-4)\right) + 3 \end{array} \right.$$

sous divers angles de vues.

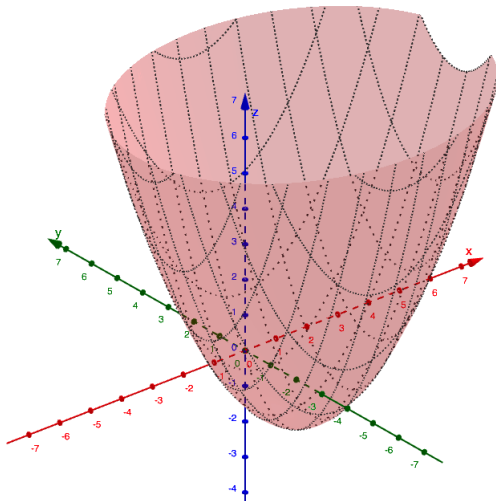




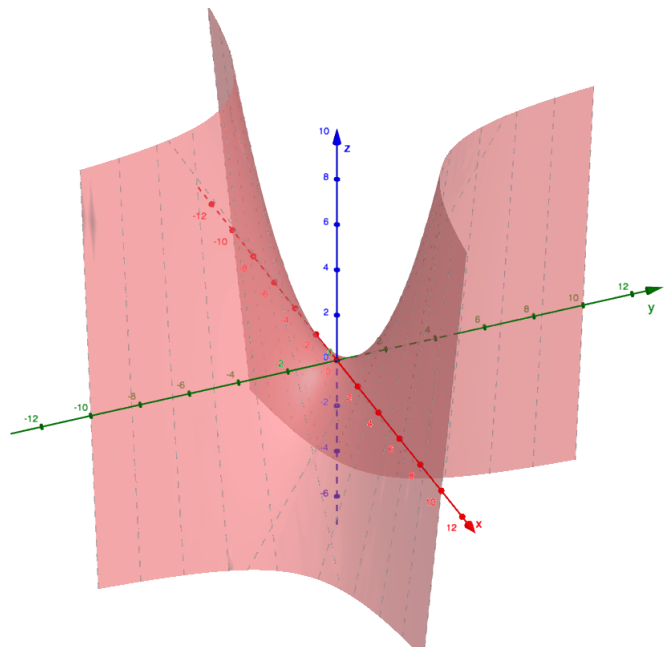
Étudier les extrema locaux de la fonction  $f$  revient à étudier les creux et les bosses du graphe/de la nappe/de la surface  $\Gamma$  (en bleu/blanc/violet) représentant la fonction  $f$ .

**Exemple 7.** — Pour achever cette introduction, nous esquissons quatre autres graphes/nappes/surfaces de fonctions de deux variables à valeurs réelles.

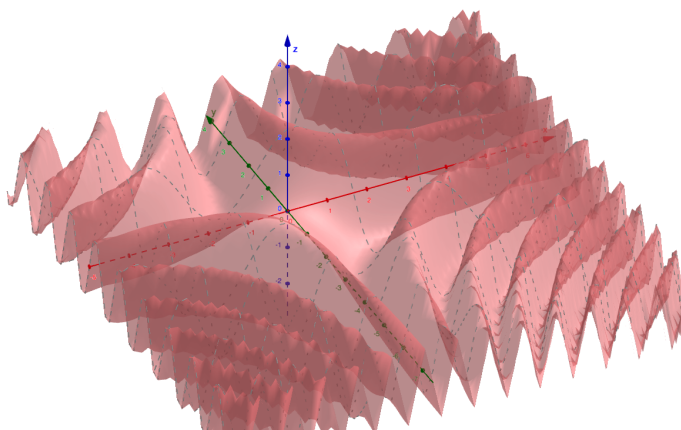
Graphe  $\Gamma$  de  $f : (x, y) \mapsto \frac{(x-1)^2}{3} + \frac{(y+1)^2}{2} - 2$



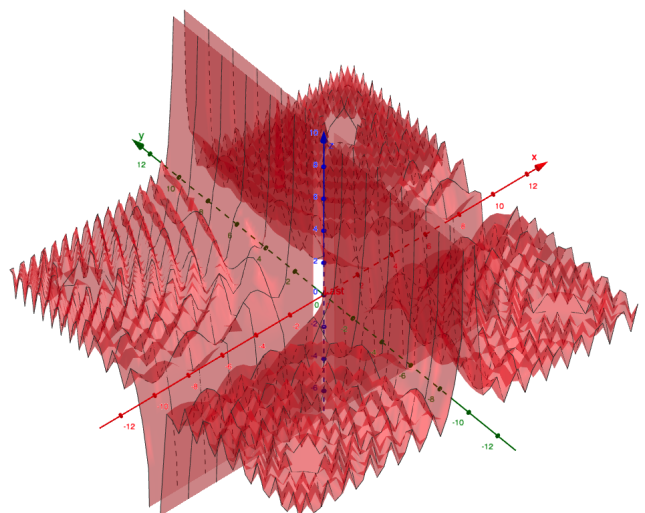
Graphe  $\Gamma$  de  $f : (x, y) \mapsto xy$



Graphe  $\Gamma$  de  $f : (x, y) \mapsto \sin(xy)$



Graphe  $\Gamma$  de  $f : (x, y) \mapsto \frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2} + \sin(xy)$



## 2. Rappels sur la continuité

### 2.1. Définition de la continuité d'une fonction en un point

**Définition 8.** — Soient  $(E, N_E), (F, N_F)$  deux  $\mathbf{R}$ -espaces vectoriels normés de dimension finie,  $A$  une partie de  $E$ ,  $f : A \longrightarrow F$  une application et  $a$  un point de  $A$ . La fonction  $f$  est dite continue au point  $a$  si :

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} f(a)$$

i.e. si :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \alpha > 0 \quad \forall x \in A \quad N_E(x - a) < \alpha \implies N_F(f(x) - f(a)) < \varepsilon .$$

**Remarque 9.** — Toutes les normes sur un  $\mathbf{R}$ -espace vectoriel normé sont équivalentes. Aussi la définition 8 est-elle indépendante de la norme  $N_E$  placée sur  $E$  et de la norme  $N_F$  placée sur  $F$ .

### 2.2. Critère séquentiel de continuité en un point

**Proposition 10.** — Soient  $E, F$  des  $\mathbf{R}$ -espaces vectoriels de dimension finie,  $A$  une partie de  $E$ ,  $f : A \longrightarrow F$  une application et  $a$  un point de  $A$ . Alors, la fonction  $f$  est continue au point  $a$  si et seulement si :

$$\forall (a_n)_{n \in \mathbf{N}} \in A^{\mathbf{N}} \quad a_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{E} a \implies f(a_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{F} f(a) .$$



La précédente proposition nous fournit un moyen commode pour établir la discontinuité de la fonction  $f$  au point  $a$ , en exhibant une suite  $(a_n)_{n \in \mathbf{N}} \in A^{\mathbf{N}}$  telle que :

la suite  $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$  converge vers  $a$  et la suite  $(f(a_n))_{n \in \mathbf{N}}$  ne converge pas vers  $f(a)$ .

### 2.3. Sélection d'exercices sur la continuité

**Exercice 11.** — La fonction  $f$  définie par :

$$f \left| \begin{array}{l} \mathbf{R}^2 \longrightarrow \\ (x, y) \longmapsto \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \text{ si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 \text{ si } (x, y) = (0, 0) \end{array} \right. \quad \mathbf{R}$$

est-elle continue en  $(0, 0)$  ?

**Exercice 12.** — La fonction  $f$  définie par :

$$f \left| \begin{array}{l} \mathbf{R}^2 \longrightarrow \\ (x, y) \longmapsto \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \frac{xy}{x^2 + y^2} \text{ si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 \text{ si } (x, y) = (0, 0) \end{array} \right. \quad \mathbf{R}$$

est-elle continue en  $(0, 0)$  ?

**Exercice 13.** — La fonction  $f$  définie par :

$$f \left| \begin{array}{l} \mathbf{R}^2 \longrightarrow \\ (x, y) \longmapsto \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} x y \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \text{ si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 \text{ si } (x, y) = (0, 0) \end{array} \right. \quad \mathbf{R}$$

est-elle continue en  $(0, 0)$  ?

**Exercice 14.** — Soit la fonction  $f$  définie par :

$$f \left| \begin{array}{l} \mathbf{R}^2 \longrightarrow \\ (x, y) \longmapsto \end{array} \right. \begin{cases} \mathbf{R} \\ \frac{x^4}{y(y-x^2)} \text{ si } y(y-x^2) \neq 0 \\ 0 \text{ si } y(y-x^2) = 0. \end{cases}$$

- Démontrer que la restriction de la fonction  $f$  à chacune des droites passant par l'origine est continue en 0, i.e. que, pour tout  $\theta \in [0, 2\pi[$ , l'application :

$$g_\theta \left| \begin{array}{l} \mathbf{R} \longrightarrow \\ t \longmapsto \end{array} \right. \begin{array}{l} \mathbf{R} \\ f(t \cos(\theta), t \sin(\theta)) \end{array}$$

est continue est continue en 0.

- Démontrer que la fonction  $f$  n'est pas continue en  $(0, 0)$ .

**Exercice 15.** — Démontrer que la fonction :

$$f \left| \begin{array}{l} \mathbf{R}^2 \longrightarrow \\ (x, y) \longmapsto \end{array} \right. \begin{cases} \mathbf{R} \\ x^4 \text{ si } x^2 < y \\ y^2 \text{ si } x^2 \geq y \end{cases}$$

est continue sur  $\mathbf{R}^2$ .

### 3. Dérivée selon un vecteur et dérivées partielles

#### 3.1. Définition d'une dérivée selon un vecteur ou dérivée directionnelle

*Notation.* — Soient :

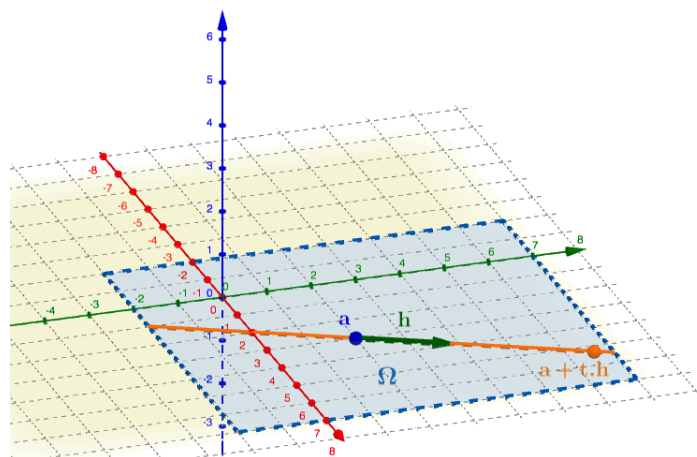
- $E, F$  des  $\mathbf{R}$ -espaces vectoriels de dimension finie ;
- $\Omega$  une partie ouverte de  $E$  ;
- $f : \Omega \longrightarrow F$  une application ;
- $a$  un point de  $\Omega$  ;
- $h$  un vecteur non nul de  $E$ .

**Lemme 16.** — La fonction de la variable réelle :

$$\varphi_{a,h} : t \longmapsto f(a + t \cdot h)$$

est définie sur un ouvert de  $\mathbf{R}$  qui contient  $0_{\mathbf{R}}$ .

Illustration du domaine de définition de la fonction  $\varphi_{a,h}$ .



**Définition 17.** — On dit que  $f$  est dérivable en  $a$  suivant le vecteur  $h$  si la fonction de la variable réelle :

$$\varphi_{a,h} : t \mapsto f(a + t \cdot h) \quad [\text{fonction de la variable réelle définie sur un voisinage de } 0_{\mathbb{R}}]$$

est dérivable en 0, i.e. si le taux d'accroissement :

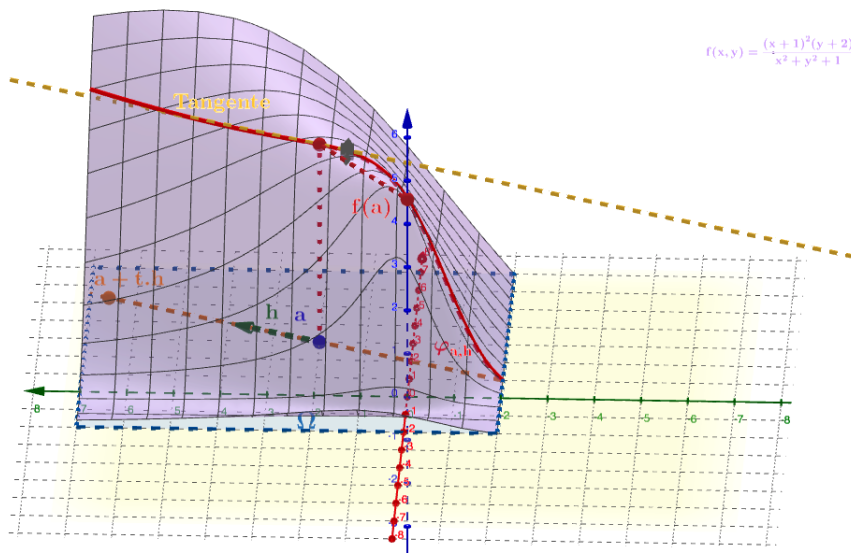
$$\frac{f(a + t \cdot h) - f(a)}{t}$$

possède une limite dans  $F$  lorsque  $t$  tend vers  $0_{\mathbb{R}}$ . Si tel est le cas, alors on pose :

$$D_h f(a) := \lim_{t \rightarrow 0_{\mathbb{R}}} \frac{f(a + t \cdot h) - f(a)}{t} \in F .$$

Ce vecteur de  $F$  est appelé vecteur dérivé de  $f$  en  $a$  selon le vecteur  $h$ .

Illustration d'une dérivée en un point suivant un vecteur non nul [Geogebra]



**Exercice 18.** — Soient l'application


$$f \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \longmapsto \begin{cases} \frac{x^3 - y^4}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \end{array} \right.$$

et  $h = (h_1, h_2)$  un vecteur non nul de  $\mathbb{R}^2$ . Démontrer que  $f$  admet une dérivée en  $(0, 0)$  selon le vecteur  $h$  et calculer  $D_h f(0, 0)$ .

**Exercice 19.** — Soit l'application :

$$f \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \longmapsto \begin{cases} \frac{x^5}{(y - x^2)^2 + x^4} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \end{array} \right.$$

Démontrer que  $f$  admet une dérivée en  $(0, 0)$  selon tout vecteur non nul.

 Admettre des dérivées en un point  $a$  suivant tout vecteur  $h$  non nul n'implique pas la continuité au point  $a$ , comme l'illustre l'exercice suivant.

**Exercice 20.** — Soit l'application :

$$f \left| \begin{array}{l} \mathbf{R}^2 \longrightarrow \\ (x, y) \longmapsto \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{R} \\ \frac{y^2}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0. \end{array} \right.$$

Démontrer que  $f$  admet une dérivée selon le vecteur tout vecteur non nul en  $(0, 0)$  et que la fonction  $f$  est discontinue en  $(0, 0)$ .

### 3.2. Dérivées partielles

**Définition 21.** — Soient  $(e_1, \dots, e_n)$  la base canonique de  $\mathbf{R}^n$ ,  $\Omega$  une partie ouverte de  $\mathbf{R}^n$ ,  $(a_1, \dots, a_n)$  un point de  $\Omega$ ,  $F$  un  $\mathbf{R}$ -espace vectoriel de dimension finie,

$$f \left| \begin{array}{l} \Omega \longrightarrow \\ (x_1, \dots, x_n) \longmapsto \end{array} \right. \begin{array}{l} F \\ f(x_1, \dots, x_n) \end{array}$$

une application dérivable en  $a$  suivant tous les vecteurs  $e_1, \dots, e_n$ . Pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on définit la  $i$ -ème dérivée partielle de  $f$  en  $a$ , notée  $\partial_i f(a_1, \dots, a_n)$  ou  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1, \dots, a_n)$ , par :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1, \dots, a_n) &:= D_{e_i} f(a_1, \dots, a_n) \\ &:= \lim_{t \rightarrow 0_{\mathbf{R}}} \frac{f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i + t, a_{i+1}, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \dots, a_n)}{t} \in F. \end{aligned}$$

Fixons  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ .

(a) La dérivée partielle  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1, \dots, a_n)$  existe si et seulement si la fonction de la variable réelle :

$$f(a_1, \dots, a_{i-1}, \bullet, a_{i+1}, \dots, a_n) : x_i \longmapsto f(a_1, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_n)$$



est dérivable en  $a_i$ .

(b) Si la dérivée partielle  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1, \dots, a_n)$  existe, alors :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1, \dots, a_n) := f(a_1, \dots, a_{i-1}, \bullet, a_{i+1}, \dots, a_n)'(a_i).$$

**Exercice 22.** — L'application  $f$  définie par :

$$f \left| \begin{array}{l} \mathbf{R}^2 \longrightarrow \\ (x, y) \longmapsto \end{array} \right. x^3 + xy + y^2$$

Démontrer que  $f$  possède des dérivées partielles en tout point  $a = (a_1, a_2) \in \mathbf{R}^2$  et les calculer.



En pratique, lorsque l'on dispose d'une expression de  $f$  définie sur un ouvert de  $\mathbf{R}^n$ , la  $i$ -ème dérivée partielle se calcule en dérivant l'expression par rapport à la  $i$ -ème variable, les autres variables étant considérées comme des constantes, pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ .

### 3.3. Fonction de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$ admettant des dérivées partielles continues en tout point de $\mathbf{R}^2$

**Proposition 23.** — Soient  $(a, b) \in \mathbf{R}^2$  et  $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$  une fonction telle que :

(H1) la fonction  $f$  admet des dérivées partielles suivant la première et la deuxième variable en tout point de  $\mathbf{R}^2$  ;

(H2) les fonctions

$$\frac{\partial f}{\partial x} \left| \begin{array}{l} \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R} \\ (x, y) \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y} \left| \begin{array}{l} \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R} \\ (x, y) \longmapsto \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \end{array} \right.$$

sont continues sur  $\mathbf{R}^2$  .

Alors :

$$\forall (h_1, h_2) \in \mathbf{R}^2 \quad f(a + h_1, b + h_2) - f(a, b) = \underbrace{\int_a^{a+h_1} \frac{\partial f}{\partial x}(u, b + h_2) \, du}_{\text{accroissement suivant 1}^{\text{ère}} \text{ variable}} + \underbrace{\int_b^{b+h_2} \frac{\partial f}{\partial y}(a, v) \, dv}_{\text{accroissement suivant 2}^{\text{ème}} \text{ variable}}$$

*expression intégrale mettant en jeu les dérivées partielles*

*Démonstration.* Notons  $(e_1, e_2)$  la base canonique de  $\mathbf{R}^2$ . L'identité à établir est conséquence des propriétés (a), (b) et (c) ci-dessous.

(a) Nous observons que :

$$f(a + h_1, b + h_2) - f(a, b) = \underbrace{f(a + h_1, b + h_2) - f(a, b + h_2)}_{\text{accroissement suivant 1}^{\text{ère}} \text{ variable}} + \underbrace{f(a, b + h_2) - f(a, b)}_{\text{accroissement suivant 2}^{\text{ème}} \text{ variable}} .$$

(b) Considérons la fonction :

$$\varphi \left| \begin{array}{l} \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} \\ v \longmapsto f(a, v) . \end{array} \right.$$

Soit  $v \in \mathbf{R}$ . Comme  $f$  admet une dérivée partielle par rapport à la deuxième variable en  $(a, v)$  (cf. (H1)) :

$$\frac{\varphi(v + t) - \varphi(v)}{t} = \frac{f(a, v + t) - f(a, v)}{t} \xrightarrow[t \rightarrow 0_{\mathbf{R}}]{} D_{e_2} f(a, v) =: \frac{\partial f}{\partial y}(a, v) .$$

La fonction  $\varphi$  est donc dérivable sur  $\mathbf{R}$  et :

$$\forall v \in \mathbf{R} \quad \varphi'(v) = \frac{\partial f}{\partial y}(a, v) .$$

D'après (H2), la fonction  $\varphi'$  est continue. D'après le théorème fondamental de l'analyse :

$$f(a, b + h_2) - f(a, b) = \varphi(b + h_2) - \varphi(b) = \int_b^{b+h_2} \varphi'(v) \, dv = \int_b^{b+h_2} \frac{\partial f}{\partial y}(a, v) \, dv .$$

(c) De manière analogue à (b), en considérant la fonction :

$$\psi \left| \begin{array}{l} \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} \\ u \longmapsto f(u, b + h_2) \end{array} \right.$$

on démontre que :

$$f(a + h_1, b + h_2) - f(a, b + h_2) = \int_a^{a+h_1} \frac{\partial f}{\partial x}(u, b + h_2) \, du .$$

□

### 4. Différentielle

#### 4.1. Définition d'une application différentiable en un point

**Définition 24.** — Soient  $(E, N_E), (F, N_F)$  des  $\mathbf{R}$ -espaces vectoriels normés de dimension finie,  $\mathcal{V}^*$  un voisinage de  $0_E$  privé de  $0_E$  (voisinage épointé) et une application  $f : \mathcal{V}^* \longrightarrow F$ . On écrit :

$$f(h) \underset{h \rightarrow 0_E}{=} o(h)$$

si :

$$\frac{f(h)}{N_E(h)} \underset{h \rightarrow 0_E}{\xrightarrow{F}} 0_F$$

ou de manière équivalente si :

$$\frac{N_F(f(h))}{N_E(h)} = N_F \left( \frac{f(h)}{N_E(h)} \right) \underset{h \rightarrow 0_E}{\xrightarrow{\mathbf{R}}} 0_{\mathbf{R}} .$$

**Définition 25.** — Soient  $E, F$  des  $\mathbf{R}$ -espaces vectoriels de dimension finie,  $\Omega$  une partie ouverte de  $E$ ,  $f : \Omega \longrightarrow F$  une application et  $a$  un point de  $\Omega$ . On dit que  $f$  est différentiable en  $a$  s'il existe une application linéaire (nécessairement continue)  $L \in \mathcal{L}(E, F)$  telle que :

$$f(a+h) \underset{h \rightarrow 0_E}{=} f(a) + L(h) + o(h) \quad [\text{développement limité à l'ordre 1}]$$

i.e. telle que :

$$\frac{f(a+h) - f(a) - L(h)}{N_E(h)} \underset{h \rightarrow 0_E}{\xrightarrow{F}} 0_F .$$

**Remarque 26.** — Comme  $\Omega$  est un ouvert de  $E$  et comme  $a \in \Omega$ , il existe  $r_a > 0$  tel que  $B_E(a, r_a) \subset \Omega$ . On en déduit que le vecteur  $f(a+h)$  de  $F$  est bien défini, pour tout  $h \in B_E(0_E, r_a)$ , donc sur un voisinage de  $0_E$ .



L'application  $L \in \mathcal{L}(E, F)$  peut être vue comme l'application linéaire de  $E$  dans  $F$  qui approxime au mieux l'application

$$h \longmapsto f(a+h) - f(a)$$

au voisinage de  $0_E$ .

**Exercice 27.** — Soit  $n \geq 2$  un nombre entier. On munit  $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$  d'une norme sous-multiplicative, par exemple de la norme  $\| \cdot \|$  définie par :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \quad \|M\| := \max \left\{ \sum_{i=1}^n |[M]_{i,j}| : j \in \llbracket 1, n \rrbracket \right\} .$$

Démontrer que l'application :

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \\ A & \longmapsto & A^2 \end{array} \right.$$

est différentiable en tout point  $A$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ .

### 4.2. Différentiabilité en un point via les applications composantes

**Proposition 28.** — On note  $(e_1, \dots, e_p)$  la base canonique de  $\mathbf{R}^p$  et  $(e_1^*, \dots, e_p^*)$  sa base duale. Soient  $E$  un  $\mathbf{R}$ -espace vectoriel de dimension finie,  $\Omega$  une partie ouverte de  $E$ ,

$$f \left\{ \begin{array}{l} \Omega \longrightarrow \mathbf{R}^p \\ x \longmapsto (f_1(x), \dots, f_p(x)) = \sum_{i=1}^p f_i(x) \cdot e_i \end{array} \right. \quad [\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, \quad f_i = e_i^* \circ f]$$

une application et  $a$  un point de  $\Omega$ .

(a) Si  $f$  est différentiable en  $a$ , i.e. s'il existe une application linéaire  $L \in \mathcal{L}(E, \mathbf{R}^p)$  telle que :

$$f(a+h) \underset{h \rightarrow 0_E}{=} f(a) + L(h) + o(h) \quad [\text{développement limité à l'ordre 1}]$$

alors les applications  $f_1, \dots, f_p$  sont différentiables en  $a$  et, pour tout  $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$  :

$$f_i(a+h) \underset{h \rightarrow 0_E}{=} f_i(a) + e_i^* \circ L(h) + o(h) \quad [\text{développement limité à l'ordre 1}] .$$

(b) Si, pour tout  $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ , l'application  $f_i$  est différentiable en  $a$ , i.e. s'il existe une application linéaire  $L_i \in \mathcal{L}(E, \mathbf{R})$  telle que :

$$f_i(a+h) \underset{h \rightarrow 0_E}{=} f_i(a) + L_i(h) + o(h) \quad [\text{développement limité à l'ordre 1}]$$

alors l'application  $f$  est différentiable en  $a$  et :

$$f(a+h) \underset{h \rightarrow 0_E}{=} f(a) + (L_1(h), \dots, L_p(h)) + o(h) \quad [\text{développement limité à l'ordre 1}] .$$

**Exercice 29.** — Soit la fonction :

$$f \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{R} \times ]0, +\infty[ \longrightarrow \mathbf{R}^2 \\ (x, y) \longmapsto \left( \underbrace{x^2 \ln(y)}_{f_1(x,y)}, \underbrace{e^x y}_{f_2(x,y)} \right) \end{array} \right.$$

et  $(a, b) \in \mathbf{R} \times ]0, +\infty[$ .

1. Démontrer qu'il existe une application linéaire  $L_1 \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^2, \mathbf{R})$  telle que :

$$f_1(a+h_1, b+h_2) \underset{(h_1, h_2) \rightarrow (0,0)}{=} f_1(a, b) + L_1(h_1, h_2) + o(\|(h_1, h_2)\|_1) .$$

2. Démontrer qu'il existe une application linéaire  $L_2 \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^2, \mathbf{R})$  telle que :

$$f_2(a+h_1, b+h_2) \underset{(h_1, h_2) \rightarrow (0,0)}{=} f_2(a, b) + L_2(h_1, h_2) + o(\|(h_1, h_2)\|_1) .$$

3. En déduire qu'il existe  $L \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^2, \mathbf{R}^2)$  telle que :

$$f(a+h_1, b+h_2) \underset{(h_1, h_2) \rightarrow (0,0)}{=} f(a, b) + L(h_1, h_2) + o(\|(h_1, h_2)\|_1) .$$

### 4.3. La différentiabilité en $a$ entraîne la continuité en $a$

**Proposition 30.** — Soient  $E, F$  des  $\mathbf{R}$ -espaces vectoriels de dimension finie,  $\Omega$  une partie ouverte de  $E$ ,  $f : \Omega \longrightarrow F$  une application et  $a$  un point de  $\Omega$ . Si l'application  $f$  est différentiable en  $a$ , alors elle est continue en  $a$ .

Une application continue en  $a$  n'est pas nécessairement différentiable en  $a$ . En effet, l'application :

$$f \left| \begin{array}{l} \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} \\ x \longmapsto |x| \end{array} \right.$$

est continue en 0, mais n'est pas différentiable en 0. Démontrons le en raisonnant par l'absurde, en supposant que  $f$  est différentiable en 0, i.e. en supposant qu'il existe une application linéaire  $L \in \mathcal{L}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$  telle que :

$$|h| = f(h) \underset{h \rightarrow 0}{=} f(0) + L(h) + o(h) \underset{h \rightarrow 0}{=} L(h) + o(h) \underset{h \rightarrow 0}{=} hL(1) + o(h).$$

Si  $h \in \mathbf{R}^*$ , on obtient, en divisant chaque membre par  $h$  :

$$\frac{|h|}{h} \underset{h \rightarrow 0}{=} L(1) + o(1).$$

Quand  $h$  tend vers  $0^+$ , il vient  $L(1) = 1$  et, quand  $h$  tend vers  $0^-$ , il vient  $L(1) = -1$ . Contradiction.

### 4.4. Une application différentiable en $a$ admet des dérivées en $a$ dans toutes les directions

**Proposition 31.** — Soient  $E, F$  des  $\mathbf{R}$ -espaces vectoriels de dimension finie,  $\Omega$  une partie ouverte de  $E$ ,  $f : \Omega \longrightarrow F$  une application,  $a$  un point de  $\Omega$  et  $h$  un vecteur non nul de  $E$ . Supposons l'application  $f$  différentiable au point  $a$ , i.e. qu'il existe une application linéaire  $L \in \mathcal{L}(E, F)$  telle que :

$$f(a+h) \underset{h \rightarrow 0_E}{=} f(a) + L(h) + o(h).$$

Alors l'application  $f$  admet une dérivée en  $a$ , suivant la direction  $h$ , et :

$$D_h f(a) = L(h).$$

Admettre des dérivées directionnelles en  $a$  n'entraîne pas la différentiabilité en  $a$ , comme l'illustre l'exercice suivant.

**Exercice 32.** — Soit l'application :

$$f \left| \begin{array}{l} \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R} \\ (x, y) \longmapsto \begin{cases} \frac{x^5}{(y-x^2)^2 + x^4} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases} \end{array} \right.$$

Démontrer que la fonction  $f$  admet des dérivées directionnelles en  $(0, 0)$ , dans toutes les directions, mais n'est pas différentiable en  $(0, 0)$ .

#### 4.5. Différentielle en $a$ d'une application différentiable en $a$

**Définition 33.** — Soient  $E, F$  des  $\mathbf{R}$ -espaces vectoriels de dimension finie,  $\Omega$  une partie ouverte de  $E$ ,  $f : \Omega \longrightarrow F$  une application et  $a$  un point de  $\Omega$ . Supposons l'application  $f$  différentiable au point  $a$ , i.e. qu'il existe une application linéaire  $L \in \mathcal{L}(E, F)$  telle que :

$$f(a+h) \underset{h \rightarrow 0_E}{=} f(a) + L(h) + o(h). \quad (1)$$

Alors

- (a) L'application linéaire  $L$  vérifiant (1) est unique.
- (b) L'application linéaire  $L$  est appelée différentielle de  $f$  en  $a$  et est notée  $df(a)$ .
- (c) La différentielle de  $f$  en  $a$  est l'unique application linéaire de  $E$  dans  $F$  telle que :

$$f(a+h) \underset{h \rightarrow 0_E}{=} f(a) + df(a) \cdot h + o(h).$$

- (d) Pour tout  $h \in E \setminus \{0_E\}$ , l'application  $f$  est dérivable en  $a$  suivant le vecteur  $h$  et :

$$D_h f(a) = df(a) \cdot h.$$

**Exemple 34.** — Les résultats établis pour la fonction :

$$f \left| \begin{array}{l} \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \\ A \longmapsto A^2 \end{array} \right.$$

dans l'exercice 27 s'interprètent comme suit. L'application  $f$  est différentiable en tout point  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$  et la différentielle de  $f$  en  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$  est donnée par :

$$df(A) \left| \begin{array}{l} \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \\ H \longmapsto AH + HA. \end{array} \right.$$

#### 4.6. Application différentiable sur un ouvert et différentielle

**Définition 35.** — Soient  $E, F$  des  $\mathbf{R}$ -espaces vectoriels de dimension finie,  $\Omega$  une partie ouverte de  $E$ ,  $f : \Omega \longrightarrow F$  une application. On dit que  $f$  est différentiable sur  $\Omega$  si et seulement si  $f$  est différentiable en tout point  $a$  de  $\Omega$ . Si tel est le cas, la différentielle de  $f$  est l'application :

$$df \left| \begin{array}{l} \Omega \longrightarrow \mathcal{L}(E, F) \\ a \longmapsto df(a). \end{array} \right.$$

#### 4.7. Différentiabilité et différentielle d'une application constante

**Proposition 36.** — Soient  $E, F$  des  $\mathbf{R}$ -espaces vectoriels de dimension finie,  $\Omega$  une partie ouverte de  $E$ ,  $f : \Omega \longrightarrow F$  une application constante. Alors  $f$  est différentiable sur  $\Omega$  et :

$$df \left| \begin{array}{l} \Omega \longrightarrow \mathcal{L}(E, F) \\ a \longmapsto 0_{\mathcal{L}(E, F)}. \end{array} \right.$$

### 4.8. Différentiabilité et différentielle d'une application linéaire

**Proposition 37.** — Soient  $E, F$  des  $\mathbf{R}$ -espaces vectoriels de dimension finie, et  $f : E \longrightarrow F$  une application linéaire. Alors  $f$  est différentiable sur  $E$  et :

$$df \left| \begin{array}{l} \Omega \longrightarrow \mathcal{L}(E, F) \\ a \longmapsto f \end{array} \right.$$

**Exercice 38.** — Soient  $E, F, G$  des  $\mathbf{R}$ -espaces vectoriels de dimension finie, et  $B : E \times F \longrightarrow G$  une application bilinéaire. Démontrer que  $B$  est différentiable sur  $E \times F$  et calculer sa différentielle  $dB$ .

## 5. Différentiabilité de fonctions d'un ouvert de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^p$

### 5.1. Différentiabilité et différentielle de fonctions d'un ouvert de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}^p$

**Lemme 39.** — Soit  $E$  un  $\mathbf{R}$ -espace vectoriel. Les applications :

$$u \left| \begin{array}{l} \mathcal{L}(\mathbf{R}, E) \longrightarrow E \\ f \longmapsto f(1) \end{array} \right. \quad \text{et} \quad v \left| \begin{array}{l} E \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbf{R}, E) \\ h \longmapsto v(h) \left| \begin{array}{l} \mathbf{R} \longrightarrow E \\ t \longmapsto t \cdot h \end{array} \right. \end{array} \right.$$

sont des isomorphismes de  $\mathbf{R}$ -espaces vectoriels, réciproques l'un de l'autre.

**Proposition 40.** — Soient  $p \in \mathbf{N}^*$  un nombre entier,  $\Omega$  une partie ouverte de  $\mathbf{R}$ ,  $f : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}^p$  une fonction et  $a$  un point de  $\Omega$ .

- (a) La fonction  $f$  est différentiable en  $a$  si et seulement si la fonction  $f$  est dérivable en  $a$ .
- (b) Si la fonction  $f$  est différentiable/dérivable en  $a$ , alors :

$$\forall h \in \mathbf{R} \quad df(a) \cdot h = h f'(a) \in \mathbf{R}^p$$

et  $f'(a) = df(a) \cdot 1$ .

**Exemple 41.** — On considère la fonction inverse :

$$f \left| \begin{array}{l} \mathbf{R}^* \longrightarrow \mathbf{R} \\ x \longmapsto \frac{1}{x} \end{array} \right.$$

et un point  $a$  de  $\mathbf{R}^*$ . La fonction  $f$  est dérivable en  $a$  et  $f'(a) = -\frac{1}{a^2}$ . D'après la proposition 40, l'application  $f$  est différentiable en  $a$  et sa différentielle en  $a$  est donnée par :

$$df(a) \left| \begin{array}{l} \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} \\ h \longmapsto -\frac{h}{a^2} \end{array} \right.$$

## 5.2. Expression de la différentielle d'une fonction différentiable sur ouvert de $\mathbf{R}^n$ via les dérivées partielles

**Proposition 42.** — Soient  $(e_1, \dots, e_n)$  la base canonique de  $\mathbf{R}^n$ ,  $\Omega$  une partie ouverte de  $\mathbf{R}^n$ ,  $a = (a_1, \dots, a_n)$  un point de  $\Omega$ ,  $F$  un  $\mathbf{R}$ -espace vectoriel de dimension finie et

$$f \left| \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & F \\ (x_1, \dots, x_n) & \longmapsto & f(x_1, \dots, x_n) \end{array} \right.$$

une application différentiable en  $a$ . Alors :

(a) les dérivées partielles :

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, \dots, a_n) := D_{e_1} f(a_1, \dots, a_n) \quad , \quad \dots \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial x_n}(a_1, \dots, a_n) := D_{e_n} f(a_1, \dots, a_n)$$

existent toutes ;

(b) pour tout  $(h_1, \dots, h_n) \in \mathbf{R}^n$  :

$$df(a_1, \dots, a_n) \cdot (h_1, \dots, h_n) = \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1, \dots, a_n) .$$



La connaissance des dérivées partielles de  $f$  en  $a$  suffit donc à connaître la différentielle de  $f$  en  $a$ .

*Démonstration.*

- Comme l'application  $f$  est différentiable en  $a$ , pour tout  $h \in \mathbf{R}^n \setminus \{0_{\mathbf{R}^n}\}$ , l'application  $f$  admet des dérivées directionnelles au point  $a$  suivant le vecteur  $h$  et :

$$D_h f(a) = df(a) \cdot h .$$

En spécialisant  $h$  aux vecteurs  $e_1, \dots, e_n$ , nous en déduisons que les dérivées directionnelles, appelées aussi dérivées partielles, suivantes :

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) := D_{e_1} f(a) \quad , \quad \dots \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) := D_{e_n} f(a)$$

existent toutes et que :

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) = df(a) \cdot e_1 \quad , \quad \dots \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) = df(a) \cdot e_n .$$

- Soit  $h = (h_1, \dots, h_n)$  un vecteur de  $\mathbf{R}^n$ , qui se décompose en  $h = \sum_{i=1}^n h_i e_i$  dans la base  $(e_1, \dots, e_n)$ . Alors :

$$\begin{aligned} df(a) \cdot h &= df(a) \cdot \left( \sum_{i=1}^n h_i e_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^n h_i df(a) \cdot e_i \quad [\text{linéarité de } df(a)] \\ &= \sum_{i=1}^n h_i D_{e_i} f(a) \quad [\text{cf. 1}] \\ &= \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \quad [\text{définition des dérivées partielles}] . \end{aligned}$$

□

### 5.3. Matrice Jacobienne d'une fonction différentiable sur ouvert de $\mathbf{R}^n$ à valeurs dans $\mathbf{R}^p$

Notation. — Soient

- $n, p$  des entiers naturels non nuls ;
- $\mathcal{B}_n := (e_{n,1}, \dots, e_{n,n})$  la base canonique de  $\mathbf{R}^n$  ;
- $\mathcal{B}_p := (e_{p,1}, \dots, e_{p,p})$  la base canonique de  $\mathbf{R}^p$  et  $\mathcal{B}_p^* := (e_{p,1}^*, \dots, e_{p,p}^*)$  sa base duale ;
- $\Omega$  une partie ouverte de  $\mathbf{R}^n$  ;
- $a$  un point de  $\Omega$  ;
- une application

$$f \left| \begin{array}{l} \Omega \quad \longrightarrow \quad \mathbf{R}^p \\ (x_1, \dots, x_n) \longmapsto (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_p(x_1, \dots, x_n)) = \sum_{i=1}^p f_i(x_1, \dots, x_n) e_{p,i} \end{array} \right. \quad [\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket f_i = e_{p,i}^* \circ f]$$

différentiable en  $a$ .

**Rappel 43.** — D'après la proposition 28 :

$$\forall h \in \mathbf{R}^n \quad df(a) \cdot h = \sum_{j=1}^p (df_j(a) \cdot h) e_{p,j} .$$

En particulier :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad df(a) \cdot e_{n,i} = \sum_{j=1}^p (df_j(a) \cdot e_{n,i}) e_{p,j}$$

i.e. :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \sum_{j=1}^p \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(a) e_{p,j} .$$

**Proposition 44.** — La matrice de l'application  $df(a) \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^p)$ , appelée matrice Jacobienne de  $f$  en  $a$  et notée  $J_a(f)$ , est donnée par :

$$J_a(f) := \text{Mat}_{\mathcal{B}_n, \mathcal{B}_p}(df(a)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_p}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix} \quad [\text{matrice Jacobienne de } f \text{ en } a]$$

$$\text{i.e. } J_a(f) = \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \right)_{(i,j) \in \llbracket 1, p \rrbracket \times \llbracket 1, n \rrbracket} .$$

**Exercice 45.** — On admet que l'application :

$$f \left| \begin{array}{l} \mathbf{R}^3 \quad \longrightarrow \quad \mathbf{R}^2 \\ (x, y, z) \longmapsto (x^2(y+1), xz^2) \end{array} \right.$$

est différentiable et on considère un point  $(a, b, c) \in \mathbf{R}^3$ . Calculer la matrice Jacobienne  $J_{(a,b,c)}f$  de  $f$  en  $(a, b, c)$  puis expliciter la différentielle  $df(a, b, c)$  de  $f$  en  $(a, b, c)$ .

**Exercice 46.** — On admet que l'application :

$$f \left| \begin{array}{l} \mathbf{R}^2 \longrightarrow \\ (x, y) \longmapsto \end{array} \right. \mathbf{R}^3 \left( \sin(xy), y \cos(x), x y e^{y^2} \right)$$

est différentiable et on considère un point  $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ . Calculer la matrice Jacobienne  $J_{(a,b)}f$  de  $f$  en  $(a, b)$  puis expliciter la différentielle  $df(a, b)$  de  $f$  en  $(a, b)$ .

**5.4. Différentielle d'une fonction différentiable sur ouvert de  $\mathbf{R}^n$  à valeurs dans  $\mathbf{R}$  et gradient**

*Notation.* — Soient :

- $n$  un entier naturel non nul ;
- $(e_1, \dots, e_n)$  la base canonique de  $\mathbf{R}^n$  ;
- $\langle \cdot, \cdot \rangle$  le produit scalaire usuel sur  $\mathbf{R}^n$  défini par :

$$\langle \cdot, \cdot \rangle \left| \begin{array}{l} \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \longrightarrow \\ ((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) \longmapsto \end{array} \right. \mathbf{R} \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

- $\| \cdot \|$  la norme associée définie par :

$$\| \cdot \| \left| \begin{array}{l} \mathbf{R}^n \longrightarrow \\ (x_1, \dots, x_n) \longmapsto \end{array} \right. \mathbf{R}_+ \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

- $\Omega$  une partie ouverte de  $\mathbf{R}^n$  ;
- $a$  un point de  $\Omega$  ;
- une application :

$$f \left| \begin{array}{l} \Omega \longrightarrow \\ (x_1, \dots, x_n) \longmapsto \end{array} \right. \mathbf{R} f(x_1, \dots, x_n)$$

une application différentiable en  $a$ .

**Théorème 47.** — *L'application :*

$$\left| \begin{array}{l} \mathbf{R}^n \longrightarrow \\ x \longmapsto \end{array} \right. \mathcal{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}) \left| \begin{array}{l} \mathbf{R}^n \longrightarrow \\ h \longmapsto \end{array} \right. \mathbf{R} \left( \langle x, \cdot \rangle \right) \left( \langle x, h \rangle \right)$$

est un isomorphisme de  $\mathbf{R}$ -espaces vectoriels. Il s'agit d'un cas particulier du théorème de Riesz.

D'après le théorème de Riesz, il existe un unique vecteur  $v$  de  $\mathbf{R}^n$  qui représente  $df(a) \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$ , i.e. :



$$\exists ! v \in \mathbf{R}^n \quad \forall h \in \mathbf{R}^n \quad df(a) \cdot h = \langle v, h \rangle .$$

Nous allons établir que ce vecteur  $v$  est le gradient de  $f$  en  $a$ , que nous définissons ci-dessous.

**Définition 48.** — *Le gradient de  $f$  en  $a$ , noté  $\nabla f(a)$  est défini par :*

$$\nabla f(a) := \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \frac{\partial f}{\partial x_2}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right) \in \mathbf{R}^n .$$

**Proposition 49.** — Pour tout  $h \in \mathbf{R}^n$  :

$$df(a) \cdot h = \langle \nabla f(a), h \rangle .$$

*Notation.* — On note  $S(0, 1) := \{x \in \mathbf{R}^n : \|x\| = 1\}$  la sphère unité de  $\mathbf{R}^n$  pour la norme euclidienne.

**Proposition 50.** — Supposons  $\nabla f(a) \neq 0_{\mathbf{R}^n}$ . L'application :

$$\begin{array}{l} S(0, 1) \longrightarrow \mathbf{R} \\ h \longmapsto D_h f(a) \end{array}$$

atteint son maximum en l'unique point  $\frac{\nabla f(a)}{\|\nabla f(a)\|}$ .

**Exercice 51.** — On admet que l'application :

$$f \left| \begin{array}{l} ]0, +\infty[ \times ]0, +\infty[ \longrightarrow \mathbf{R} \\ (x, y) \longmapsto xy + \frac{4}{x} + \frac{2}{y} . \end{array} \right.$$

est différentiable sur  $]0, +\infty[ \times ]0, +\infty[$ .

1. Calculer  $\nabla f(a, b)$ , pour tout  $(a, b) \in ]0, +\infty[ \times ]0, +\infty[$ .
2. Déterminer les points critiques de  $f$ , i.e. les points  $(a, b)$  de  $]0, +\infty[ \times ]0, +\infty[$  tels que  $\nabla f(a, b) = (0, 0)$ .

## 6. Opérations sur les applications différentiables

Dans cette partie, nous nous proposons de démontrer les résultats suivants, après avoir précisé leurs formulations.

1. Une combinaison linéaire d'applications différentiables est différentiable et on dispose d'une formule de différentiation (proposition 52).
2. La composée d'applications différentiables par une application multilinéaire est différentiable, et on dispose d'une formule de différentiation (proposition 54).
3. Une application polynomiale en  $n$  variables réelles est différentiable sur  $\mathbf{R}^n$  (corollaire 56).
4. La composée de deux applications différentiables est différentiable et on dispose d'une formule de différentiation (théorème 57).
5. Le quotient de deux applications numériques différentiables est différentiable et on dispose d'une formule de différentiation (corollaire 58).
6. Une application rationnelle en  $n$  variables réelles est différentiable sur son ouvert de définition (corollaire 59).

### 6.1. Combinaison linéaire de deux applications différentiables

**Proposition 52.** — Soient  $E, F$  des  $\mathbf{R}$ -espaces vectoriels de dimension finie,  $\Omega$  une partie ouverte de  $E$ ,  $(f, g) \in F^\Omega \times F^\Omega$ ,  $(\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2$  et  $a$  un point de  $\Omega$ . Si les applications  $f$  et  $g$  sont différentiables en  $a$ , alors l'application :

$$\lambda \cdot f + \mu \cdot g \left| \begin{array}{l} \Omega \longrightarrow F \\ x \longmapsto \lambda \cdot f(x) + \mu \cdot g(x) \end{array} \right.$$

est différentiable en  $a$  :

$$d(\lambda \cdot f + \mu \cdot g)(a) = \lambda \cdot df(a) + \mu \cdot dg(a) \quad [\text{identité dans } \mathcal{L}(E, F)] .$$

**Exercice 53.** — On note  $J$  la matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$  dont tous les coefficients valent 1 et  $f$  l'application définie par :

$$f \left| \begin{array}{l} \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \\ A \longmapsto A^2 + \text{tr}(A) J . \end{array} \right.$$

Démontrer que  $f$  est différentiable sur  $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$  et calculer sa différentielle  $df(A)$  en tout point  $A$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ .

**6.2. Composée d'applications différentiables par une application multilinéaire**

**Proposition 54.** — Soient  $E, F_1, \dots, F_n, G$  des  $\mathbf{R}$ -espaces vectoriels de dimension finie,  $\Omega$  une partie ouverte de  $E$ ,  $f_1 \in F_1^\Omega, \dots, f_n \in F_n^\Omega$ , une application multilinéaire :

$$M : F_1 \times F_2 \times \dots \times F_n \longrightarrow G$$

et  $a \in \Omega$ . On note  $f$  l'application définie par :

$$f \left| \begin{array}{l} \Omega \longrightarrow G \\ x \longmapsto M(f_1(x), \dots, f_n(x)) \end{array} \right.$$

Si les application  $f_1, \dots, f_n$  sont différentiables en  $a$ , alors l'application  $f$  est différentiable en  $a$  et, pour tout  $h \in E$  :

$$df(a) \cdot h = \begin{cases} M(df_1(a) \cdot h, f_2(a), \dots, f_n(a)) \\ + M(f_1(a), df_2(a) \cdot h, \dots, f_n(a)) \\ + \dots \\ + M(f_1(a), f_2(a), \dots, df_n(a) \cdot h) . \end{cases}$$

**Exercice 55.** — Soit  $f$  l'application définie par :

$$f \left| \begin{array}{l} \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \\ A \longmapsto A^3 . \end{array} \right.$$

Démontrer que  $f$  est différentiable sur  $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$  et calculer sa différentielle  $df$ .

**Corollaire 56.** — Soient un entier naturel  $n \geq 1$  et  $(a_{i_1, \dots, i_n})_{(i_1, \dots, i_n) \in \mathbf{N}^n}$  une famille de réels dont tous les termes sont nuls, sauf un nombre fini d'entre eux. Alors l'application polynomiale :

$$f \left| \begin{array}{l} \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R} \\ (x_1, \dots, x_n) \longmapsto \sum_{(i_1, \dots, i_n) \in \mathbf{N}^n} a_{i_1, \dots, i_n} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots x_n^{i_n} \end{array} \right.$$

est différentiable sur  $\mathbf{R}^n$ .

*Démonstration.* D'après la proposition 52, il suffit de démontrer le résultat pour l'application :

$$f \left| \begin{array}{l} \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R} \\ (x_1, \dots, x_n) \longmapsto x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots x_n^{i_n} \end{array} \right.$$

où  $(i_1, \dots, i_n) \in \mathbf{N}^n$ .

Si  $(e_1, \dots, e_n)$  désigne la base canonique de  $\mathbf{R}^n$  et  $(e_1^*, \dots, e_n^*)$  désigne sa base duale, alors, pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , l'application  $e_k^* : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}$  est différentiable puisque linéaire.

Introduisons l'application  $(i_1 + i_2 + \dots + i_n)$ -linéaire définie par :

$$M \left| \begin{array}{l} \mathbf{R}^{i_1+i_2+\dots+i_n} \longrightarrow \\ (x_k)_{1 \leq k \leq i_1+i_2+\dots+i_n} \longmapsto \end{array} \right. \begin{array}{l} \mathbf{R} \\ \prod_{1 \leq k \leq i_1+i_2+\dots+i_n} x_k \end{array} .$$

La différentiabilité de l'application :

$$f = M(\underbrace{e_1^*, \dots, e_1^*}_{i_1 \text{ fois}}, \underbrace{e_2^*, \dots, e_2^*}_{i_2 \text{ fois}}, \underbrace{e_n^*, \dots, e_n^*}_{i_n \text{ fois}})$$

résulte alors de la proposition 54. □

### 6.3. Composée de deux applications différentiables ou règle de la chaîne

*Notation.* — On considère :

- $(E, N_E), (F, N_F), (G, N_G)$  des  $\mathbf{R}$ -espaces vectoriels normés de dimension finie ;
- $\Omega_E$  un ouvert de  $E$  et  $\Omega_F$  un ouvert de  $F$  ;
- $f : \Omega_E \longrightarrow F$  une application telle que, pour tout  $x \in \Omega_E, f(x) \in \Omega_F$  ;
- $g : \Omega_F \longrightarrow G$  ;
- $a$  un point de  $\Omega_E$ .

**Théorème 57.** — Si l'application  $f$  est différentiable en  $a$  et l'application  $g$  est différentiable en  $f(a)$ , alors l'application :

$$g \circ f \left| \begin{array}{l} \Omega_E \longrightarrow \\ x \longmapsto \end{array} \right. \begin{array}{l} G \\ g(f(x)) \end{array}$$

est différentiable en  $a$  et :

$$d(g \circ f)(a) = dg(f(a)) \circ df(a) \quad [\text{identité dans } \mathcal{L}(E, G)] .$$

*Démonstration.*

- (a) Une boule ouverte  $B_F(f(a), r)$  incluse dans  $\Omega_F$ . — Comme  $a$  appartient à  $\Omega_F$ , qui est ouvert dans  $F$ , il existe  $r > 0$  tel que  $B_F(f(a), r) \subset \Omega_F$ .
- (b) Une boule ouverte  $B_E(a, \rho)$  incluse dans  $\Omega_E$  et envoyée dans  $B_F(f(a), r)$  par  $f$ . — Comme l'application  $f$  est différentiable en  $a$ , elle est continue en  $a$ . Ainsi, il existe  $\rho > 0$  tel que, pour tout  $x \in B_E(a, \rho), f(x) \in B_F(f(a), r)$ .
- (c) Développement limité à l'ordre 1 de  $f$  en  $a$ . — Posons :

$$\varepsilon \left| \begin{array}{l} B_E(0_E, \rho) \longrightarrow \\ h \longmapsto \end{array} \right. \begin{cases} F & \\ \begin{array}{l} 0_F \quad \text{si } h = 0_E \\ \frac{f(a+h) - f(a) - df(a) \cdot h}{N_E(h)} \quad \text{si } h \neq 0_E \end{array} \end{cases}$$

de sorte que, pour tout  $h \in B_E(0_E, \rho)$  :

$$f(a+h) = f(a) + df(a) \cdot h + N_E(h) \varepsilon(h) .$$

Comme  $f$  est différentiable au point  $a, \varepsilon(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0_E} 0_F$ .

(d) Développement limité à l'ordre 1 de  $g$  en  $f(a)$ . — Posons :

$$\eta \left\{ \begin{array}{l} B_F(0_F, r) \longrightarrow \\ k \longmapsto \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{ll} 0_G & \text{si } k = 0_F \\ \frac{g(f(a) + k) - g(f(a)) - \text{dg}(f(a)) \cdot k}{N_F(k)} & \text{si } k \neq 0_F \end{array} \right. \quad G$$

de sorte que, pour tout  $k \in B_F(0_F, r)$  :

$$g(f(a) + k) = g(f(a)) + \text{dg}(f(a)) \cdot k + N_F(k) \eta(k).$$

Comme  $g$  est différentiable au point  $f(a)$ ,  $\eta(k) \xrightarrow[k \rightarrow 0_F]{} 0_G$ .

(e) Composition des deux DL1 obtenus en (c) et (d). — Soit  $h \in B_E(0_E, \rho)$ . Comme :

$$g(f(a + h)) = g(f(a)) + \text{dg}(f(a)) \cdot h + N_E(h) \varepsilon(h) \quad \text{et} \quad \text{dg}(f(a)) \cdot h + N_E(h) \varepsilon(h) = f(a + h) - f(a) \in B_F(0_F, r)$$

il vient :

$$g(f(a + h)) = g(f(a)) + \text{dg}(f(a)) \cdot (\text{dg}(f(a)) \cdot h + N_E(h) \varepsilon(h)) + N_F(\text{dg}(f(a)) \cdot h + N_E(h) \varepsilon(h)) \eta(f(a + h) - f(a))$$

puis, comme l'application  $\text{dg}(f(a))$  est linéaire :

$$g(f(a + h)) = g(f(a)) + \underbrace{\text{dg}(f(a)) \cdot (\text{dg}(f(a)) \cdot h)}_{=\text{dg}(f(a)) \circ \text{dg}(f(a)) \cdot h} + \kappa(h)$$

où :

$$\begin{aligned} \kappa(h) &= \text{dg}(f(a)) \cdot (N_E(h) \varepsilon(h)) + N_F(\text{dg}(f(a)) \cdot h + N_E(h) \varepsilon(h)) \eta(f(a + h) - f(a)) \\ &= N_E(h) \text{dg}(f(a)) \cdot \varepsilon(h) + N_F(\text{dg}(f(a)) \cdot h + N_E(h) \varepsilon(h)) \eta(f(a + h) - f(a)) \quad [\text{linéarité de } \text{dg}(f(a))] . \end{aligned}$$

Pour conclure, il reste à établir que :

$$\frac{\kappa(h)}{N_E(h)} \xrightarrow[h \rightarrow 0_E]{} 0_G .$$

(f) Étude du reste  $\kappa(h)$ . — Soit  $h \in B_E(0_E, \rho) \setminus \{0_E\}$ . L'inégalité triangulaire et l'homogénéité des normes  $N_F$  et  $N_G$  livrent :

$$N_G(\kappa(h)) \leq N_E(h) N_G(\text{dg}(f(a)) \cdot \varepsilon(h)) + (N_F(\text{dg}(f(a)) \cdot h) + N_E(h) N_F(\varepsilon(h))) N_G(\eta(f(a + h) - f(a))) .$$

Les applications  $\text{dg}(f(a))$  et  $\text{dg}(f(a))$  sont continues, puisque linéaires avec sources des  $\mathbf{R}$ -espaces vectoriels de dimension finie. Nous pouvons donc considérer leurs normes subordonnées, pour obtenir :

$$N_G(\kappa(h)) \leq N_E(h) \|\text{dg}(f(a))\| N_F(\varepsilon(h)) + (\|\text{dg}(f(a))\| N_E(h) + N_E(h) N_F(\varepsilon(h))) N_G(\eta(f(a + h) - f(a)))$$

puis :

$$N_G \left( \frac{\kappa(h)}{N_E(h)} \right) \leq \underbrace{\|\text{dg}(f(a))\|}_{\xrightarrow[h \rightarrow 0_E]{} 0_{\mathbf{R}}} \underbrace{N_F(\varepsilon(h))}_{\xrightarrow[h \rightarrow 0_E]{} 0_{\mathbf{R}}} + \underbrace{(\|\text{dg}(f(a))\| + N_F(\varepsilon(h)))}_{\xrightarrow[h \rightarrow 0_E]{} \|\text{dg}(f(a))\|}} \underbrace{N_G(\eta(f(a + h) - f(a)))}_{\xrightarrow[h \rightarrow 0_E]{} 0_{\mathbf{R}}}$$

où la continuité de  $f$  en  $a$  joue une nouvelle fois un rôle. Nous concluons alors avec le théorème d'encadrement. □

**Corollaire 58.** — Soient  $\Omega$  un ouvert de  $F$ ,  $f : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$ ,  $g : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$  une application qui ne s'annule pas sur  $\Omega$  et  $a \in \Omega$ . Si les applications  $f$  et  $g$  sont différentiables en  $a$  alors l'application :

$$\frac{f}{g} \left| \begin{array}{l} \Omega \longrightarrow \mathbf{R} \\ x \longmapsto \frac{f(x)}{g(x)} \end{array} \right.$$

est différentiable en  $a$  et :

$$\forall h \in E \quad d \frac{f}{g}(a) \cdot h = \frac{(df(a) \cdot h) \times g(a) - f(a) \times (dg(a) \cdot h)}{g(a)^2} \in \mathbf{R}.$$

*Démonstration.* L'application inverse :

$$i \left| \begin{array}{l} \mathbf{R}^* \longrightarrow \mathbf{R} \\ x \longmapsto \frac{1}{x} \end{array} \right.$$

est dérivable sur  $\mathbf{R}^*$  donc différentiable sur  $\mathbf{R}^*$ . De plus, pour tout  $a \in \mathbf{R}^*$  :

$$\forall h \in \mathbf{R} \quad di(a) \cdot h = h i'(a) = -\frac{h}{a^2}.$$

Introduisons la forme bilinéaire  $B$  définie par :

$$B \left| \begin{array}{l} \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R} \\ (x_1, x_2) \longmapsto x_1 \times x_2. \end{array} \right.$$

La différentiabilité en  $a$  de l'application :

$$\frac{f}{g} = B(f, i \circ g)$$

résulte du théorème 57 et de la proposition 54.

Ces deux résultats livrent de plus, pour tout  $h \in E$  :

$$\begin{aligned} d \frac{f}{g}(a) \cdot h &= B(df(a) \cdot h, i \circ dg(a)) + B(f(a), dig(a) \circ dg(a) \cdot h) \\ &= df(a) \cdot h \times \frac{1}{g(a)} + f(a) \times \left( -\frac{dg(a) \cdot h}{g(a)^2} \right) \\ &= \frac{(df(a) \cdot h) \times g(a) - f(a) \times (dg(a) \cdot h)}{g(a)^2}. \end{aligned}$$

□

**Corollaire 59.** — Soient un entier naturel  $n \geq 1$  et  $(a_{i_1, \dots, i_n})_{(i_1, \dots, i_n) \in \mathbf{N}^n}$ ,  $(b_{i_1, \dots, i_n})_{(i_1, \dots, i_n) \in \mathbf{N}^n}$  des familles de réels dont tous les termes sont nuls, sauf un nombre fini d'entre eux. Supposons que l'ouvert  $\Omega$  de  $\mathbf{R}^n$  défini par :

$$\Omega := \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n : \sum_{(i_1, \dots, i_n) \in \mathbf{N}^n} b_{i_1, \dots, i_n} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots x_n^{i_n} \neq 0 \right\}$$

est non vide. Alors la fonction rationnelle :

$$\left( \begin{array}{l} \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R} \\ (x_1, \dots, x_n) \longmapsto \frac{\sum_{(i_1, \dots, i_n) \in \mathbf{N}^n} a_{i_1, \dots, i_n} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots x_n^{i_n}}{\sum_{(i_1, \dots, i_n) \in \mathbf{N}^n} b_{i_1, \dots, i_n} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots x_n^{i_n}} \end{array} \right.$$

est différentiable sur  $\Omega$ .

*Démonstration.* L'assertion résulte du corollaire 56 et du corollaire 58.

□

## 6.4. Dérivée le long d'un arc

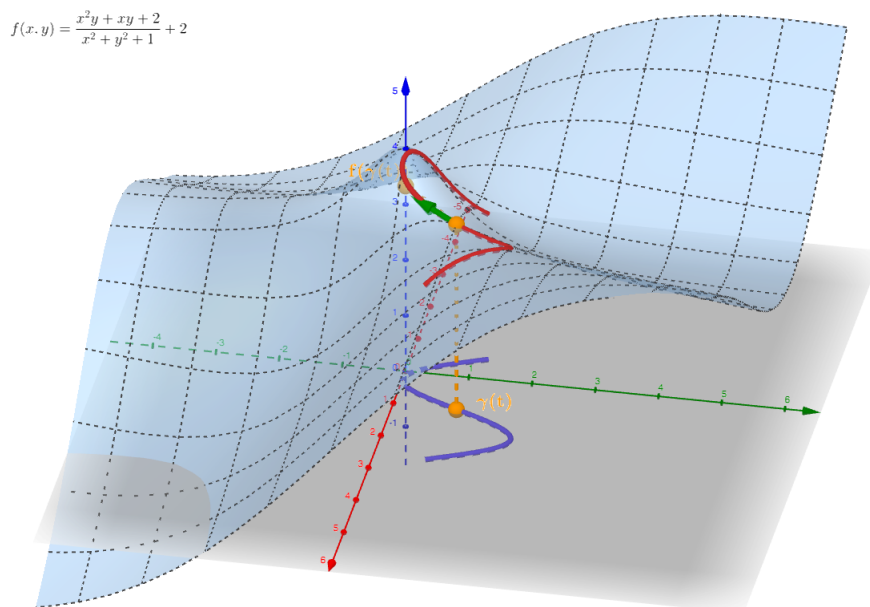
*Notation.* — Soient

- $I$  un intervalle de  $\mathbf{R}$ ;
- $E, F$  des  $\mathbf{R}$ -espaces vectoriels de dimension finie ;
- $\Omega$  une partie ouverte de  $E$  ;
- un arc  $\gamma : I \longrightarrow E$  tel que, pour tout  $t \in I$ ,  $\gamma(t) \in \Omega$  ;
- une application  $f : \Omega \longrightarrow F$  ;
- $t_0 \in I$ .

**Corollaire 60.** — Si l'arc  $\gamma$  est dérivable en  $t_0$  et l'application  $f$  différentiable en  $\gamma(t_0)$ , alors l'arc  $f \circ \gamma : I \longrightarrow F$  est dérivable en  $t_0$  et :

$$(f \circ \gamma)'(t_0) = df(\gamma(t_0)) \cdot \gamma'(t_0) \quad [\text{identité entre vecteurs de } F].$$

Interprétation géométrique de la dérivée le long d'un arc [Geogebra]



**Exercice 61.** — Soient  $I$  un intervalle de  $\mathbf{R}$ ,  $E$  un  $\mathbf{R}$ -espace vectoriel de dimension finie,  $\Omega$  une partie ouverte et convexe de  $E$ , une application  $f : \Omega \longrightarrow E$  différentiable sur  $\Omega$ ,  $a$  et  $b$  deux points de  $\Omega$ . Considérons l'application

$$\gamma \left| \begin{array}{l} [0, 1] \longrightarrow E \\ t \longmapsto t \cdot a + (1-t) \cdot b \end{array} \right.$$

Justifier que l'application  $f \circ \gamma$  est dérivable sur  $[0, 1]$  et calculer sa dérivée sur  $[0, 1]$ .

**Exercice 62.** — Soient  $I$  un intervalle de  $\mathbf{R}$ ,  $\Omega$  une partie ouverte de  $\mathbf{R}^n$ ,

$$f \left| \begin{array}{l} \Omega \longrightarrow \mathbf{R}^p \\ x \longmapsto (f_1(x), \dots, f_p(x)) \end{array} \right.$$

une application différentiable sur  $\Omega$ ,  $x_1, \dots, x_n$  des fonctions dérivables de  $I$  dans  $\mathbf{R}$  telles que :

$$\forall t \in I \quad (x_1(t), \dots, x_n(t)) \in \Omega.$$

Démontrer que la fonction :

$$g \left| \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbf{R}^p \\ t \longmapsto (f(x_1(t), \dots, x_n(t))) \end{array} \right.$$

est dérivable sur  $I$  et que :

$$\forall t \in I \quad g'(t) = \left( \sum_{i=1}^n x'_i(t) \partial_i f_1(x_1(t), \dots, x_n(t)), \sum_{i=1}^n x'_i(t) \partial_i f_2(x_1(t), \dots, x_n(t)), \dots, \sum_{i=1}^n x'_i(t) \partial_i f_p(x_1(t), \dots, x_n(t)) \right).$$

**6.5. Dérivées partielles d'une composée de deux applications différentiables**

*Notation.* — On considère :

- $\Omega_n$  un ouvert de  $\mathbf{R}^n$  et  $\Omega_p$  un ouvert de  $\mathbf{R}^p$  ;
- deux applications :

$$f \left| \begin{array}{l} \Omega_n \longrightarrow \mathbf{R}^p \\ x \longmapsto (f_1(x), \dots, f_p(x)) \end{array} \right. \quad \text{et} \quad g \left| \begin{array}{l} \Omega_p \longrightarrow \mathbf{R}^q \\ y \longmapsto (g_1(y), \dots, g_q(y)) \end{array} \right.$$

- $a$  un point de  $\Omega_n$ .

On suppose que :

$$\forall x \in \Omega_n \quad f(x) \in \Omega_p$$

de sorte que la fonction :

$$h = g \circ f \left| \begin{array}{l} \Omega_n \longrightarrow \mathbf{R}^q \\ x \longmapsto g(f(x)) = (h_1(x), \dots, h_q(x)) \end{array} \right.$$

est bien définie.

**Théorème 63.** — Si l'application  $f$  est différentiable en  $a$  et l'application  $g$  est différentiable en  $f(a)$ , alors :

$$J_a(g \circ f) = J_{f(a)}(g) \times J_a(f)$$

et :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, q \rrbracket \times \llbracket 1, n \rrbracket \quad \frac{\partial h_i}{\partial x_j}(a) = \sum_{k=1}^p \frac{\partial g_i}{\partial y_k}(f(a)) \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(a)$$

où les composantes de  $x$  dans  $\mathbf{R}^n$  sont notées  $(x_1, \dots, x_n)$  et celles de  $y$  dans  $\mathbf{R}^p$  sont notées  $(y_1, \dots, y_p)$ .

**Remarque 64.** — Si on spécialise le théorème 63 au cas où  $g$  est une fonctions à valeurs réelles, i.e. si  $q = 1$ , alors :

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad \frac{\partial g \circ f}{\partial x_j}(a) = \sum_{k=1}^p \frac{\partial g}{\partial y_k}(f(a)) \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(a).$$

**Exercice 65.** — Soient  $\Omega_n$  un ouvert de  $\mathbf{R}^n$ , une application :

$$f \left| \begin{array}{l} \Omega_n \longrightarrow \mathbf{R}^p \\ x \longmapsto (f_1(x), \dots, f_p(x)) \end{array} \right.$$

différentiable sur  $\Omega_n$ ,  $\Omega_m$  un ouvert de  $\mathbf{R}^m$ ,  $x_1, \dots, x_n$  des applications de  $\Omega_m$  dans  $\mathbf{R}$  différentiables sur  $\Omega_m$  telles que :

$$\forall (u_1, \dots, u_m) \in \Omega_m \quad (x_1(u_1, \dots, u_m), \dots, x_n(u_1, \dots, u_m)) \in \Omega_n$$

et  $g$  l'application définie par :

$$g \left| \begin{array}{l} \Omega_m \longrightarrow \mathbf{R}^p \\ (u_1, \dots, u_m) \longmapsto f(x_1(u_1, \dots, u_m), \dots, x_n(u_1, \dots, u_m)). \end{array} \right.$$

Démontrer que l'application  $g$  est différentiable sur  $\Omega_m$  et que, pour tout  $a \in \Omega_m$ , pour tout  $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$  :

$$\frac{\partial g}{\partial u_i}(a) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial x_j}{\partial u_i}(a) \cdot \partial_j f(x_1(a), \dots, x_n(a))$$

où les composantes de  $u$  dans  $\mathbf{R}^m$  sont notée  $(u_1, \dots, u_m)$ .

## 7. Applications de classe $\mathcal{C}^1$

### 7.1. Définition d'une application de classe $\mathcal{C}^1$

**Définition 66.** — Soient  $E, F$  des  $\mathbf{R}$ -espaces vectoriels de dimension finie,  $\Omega$  une partie ouverte de  $E$ ,  $f : \Omega \longrightarrow F$  une application. On dit que l'application  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\Omega$  si :

1. l'application  $f$  est différentiable sur  $\Omega$ ;
2. sa différentielle  $df : \Omega \longrightarrow \mathcal{L}(E, F)$  est continue sur  $\Omega$ .

### 7.2. Caractérisation des applications de classe $\mathcal{C}^1$ par les dérivées partielles

**Théorème 67.** — Soient  $\Omega$  une partie ouverte de  $\mathbf{R}^n$ ,

$$f \left| \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \mathbf{R}^p \\ (x_1, \dots, x_n) & \longmapsto & (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_p(x_1, \dots, x_n)) \end{array} \right.$$

une application. Alors la fonction  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\Omega$  si et seulement si toutes ses dérivées partielles existent et sont continues sur  $\Omega$ , i.e. :

$$f \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \Omega \iff \forall (i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket \times \llbracket 1, n \rrbracket \quad \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \text{ est définie et continue sur } \Omega .$$

**Exemple 68.** — On souhaite étudier la différentiabilité et, cas échéant, calculer la différentielle de l'application :

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & \left( x^2 + xy - y^3, \cos\left(\frac{x}{y^2 + 1}\right) \right) \end{array} \right.$$

en s'appuyant sur le critère  $\mathcal{C}^1$ .

- *Introduction des fonctions composantes.* — Si on pose :

$$f_1 : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}; (x, y) \longmapsto x^2 + xy - y^3 \quad \text{et} \quad f_2 : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}; (x, y) \longmapsto \cos\left(\frac{x}{y^2 + 1}\right)$$

alors pour tout  $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ ,  $f(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y))$ .

- *Étude de la dérivée partielle  $\frac{\partial f_1}{\partial x}$ .* — Soit  $y \in \mathbf{R}$  fixé. L'application :

$$f_1(\cdot, y) : x \longmapsto f_1(x, y) = x^2 + xy - y^3$$

est polynomiale, donc dérivable sur  $\mathbf{R}$ . La dérivée partielle de  $f_1$  par rapport à  $x$  existe donc sur  $\mathbf{R}^2$  tout entier et elle est donnée par :

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}; (x, y) \longmapsto 2x + y$$

qui est continue sur  $\mathbf{R}^2$ .

- *Étude de la dérivée partielle  $\frac{\partial f_1}{\partial y}$ .* — Soit  $x \in \mathbf{R}$  fixé. L'application :

$$f_1(x, \cdot) : y \longmapsto f_1(x, y) = x^2 + xy - y^3$$

est polynomiale, donc dérivable sur  $\mathbf{R}$ . La dérivée partielle de  $f_1$  par rapport à  $y$  existe donc sur  $\mathbf{R}^2$  tout entier et elle est donnée par :

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}; (x, y) \longmapsto x - 3y^2$$

qui est continue sur  $\mathbf{R}^2$ .

- *Étude de la dérivée partielle*  $\frac{\partial f_2}{\partial x}$ . — Soit  $y \in \mathbf{R}$  fixé. L'application :

$$f_2(\cdot, y) : x \mapsto f_2(x, y) = \cos\left(\frac{x}{y^2 + 1}\right)$$

est la composée d'une fonction rationnelle par  $\cos$ , donc dérivable sur  $\mathbf{R}$ . La dérivée partielle de  $f_2$  par rapport à  $x$  existe donc sur  $\mathbf{R}^2$  tout entier et elle est donnée par :

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R} ; (x, y) \mapsto -\frac{1}{y^2 + 1} \sin\left(\frac{x}{y^2 + 1}\right)$$

qui est continue sur  $\mathbf{R}^2$ .

- *Étude de la dérivée partielle*  $\frac{\partial f_2}{\partial y}$ . — Soit  $x \in \mathbf{R}$  fixé. L'application

$$f_2(x, \cdot) : y \mapsto f_2(x, y) = \cos\left(\frac{x}{y^2 + 1}\right)$$

est la composée d'une fonction rationnelle par  $\cos$ , donc dérivable sur  $\mathbf{R}$ . La dérivée partielle de  $f_2$  par rapport à  $y$  existe donc sur  $\mathbf{R}^2$  tout entier et elle est donnée par :

$$\frac{\partial f_2}{\partial y} : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R} ; (x, y) \mapsto \frac{2xy}{(y^2 + 1)^2} \sin\left(\frac{x}{y^2 + 1}\right)$$

qui est continue sur  $\mathbf{R}^2$ .

- *Conclusion.* — D'après le critère  $\mathcal{C}^1$ , la fonction  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbf{R}^2$ , donc différentiable sur  $\mathbf{R}^2$  et pour tout  $(a, b) \in \mathbf{R}^2$  :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(df(a, b)) = \begin{pmatrix} 2a + b & a - 3b^2 \\ -\frac{1}{b^2 + 1} \sin\left(\frac{a}{b^2 + 1}\right) & \frac{2ab}{(b^2 + 1)^2} \sin\left(\frac{a}{b^2 + 1}\right) \end{pmatrix}$$

où  $\mathcal{B}$  désigne la base canonique de  $\mathbf{R}^2$  et donc pour tout  $(h_1, h_2) \in \mathbf{R}^2$  :

$$df(a, b) \cdot (h_1, h_2) = \left( (2a + b)h_1 + (a - 3b^2)h_2, -\frac{1}{b^2 + 1} \sin\left(\frac{a}{b^2 + 1}\right)h_1 + \frac{2ab}{(b^2 + 1)^2} \sin\left(\frac{a}{b^2 + 1}\right)h_2 \right).$$

**Exercice 69.** — Soit :

$$f \left| \begin{array}{l} \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R} \\ (x, y) \longmapsto f(x, y) \end{array} \right.$$

une application différentiable sur  $\mathbf{R}^2$ . On lui associe l'application :

$$g \left| \begin{array}{l} \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R} \\ (r, \theta) \longmapsto f(r \cos(\theta), r \sin(\theta)). \end{array} \right.$$

Démontrer que la fonction  $g$  est différentiable sur  $\mathbf{R}^2$ , puis exprimer les dérivées partielles de  $g$  en fonction de celles de  $f$ .

**Exercice 70.** — Soit  $\alpha \in \mathbf{R}$ . On considère l'application définie sur  $\mathbf{R}^2$  par :

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{y^4}{x^2 + y^2 - xy} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ \alpha & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

1. Justifier que l'application  $f$  est bien définie.

2. Déterminer  $\alpha$  pour que  $f$  soit continue sur  $\mathbf{R}^2$ .
3. Dans cette question, on suppose que  $\alpha = 0$ .
  - (a) Justifier l'existence de  $\frac{\partial f}{\partial x}$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}$  sur  $\mathbf{R} \setminus \{(0,0)\}$  et les calculer.
  - (b) Justifier l'existence de  $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$  et donner leurs valeurs.
  - (c) La fonction  $f$  est-elle de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbf{R}^2$  ?

**Exercice 71.** — On définit deux fonctions :

$$f \left| \begin{array}{l} \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R} \\ (x, y) \longmapsto \sin(x^2 - y^2) \end{array} \right. \quad \text{et} \quad g \left| \begin{array}{l} \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2 \\ (x, y) \longmapsto (x + y, x - y) \end{array} \right. .$$

1. Justifier que les fonctions  $f$  et  $g$  sont différentiables en tout vecteur  $(x, y) \in \mathbf{R}^2$  et écrire la matrice jacobienne de  $f$  puis de  $g$  en  $(x, y)$ .
2. Pour  $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ , déterminer l'image d'un vecteur  $(u, v) \in \mathbf{R}^2$  par l'application linéaire  $d(f \circ g)((x, y))$  en utilisant les deux méthodes suivantes :
  - (a) en calculant  $f \circ g$  ;
  - (b) en utilisant le produit de deux matrices jacobiniennes.

### 7.3. Opérations sur les applications de classe $\mathcal{C}^1$

Les résultats suivants :

1. proposition 52 (combinaison linéaire d'applications différentiables) ;
2. proposition 54 (composée d'applications différentiables par une application multilinéaire) ;
3. corollaire 56 (différentiabilité d'une application polynomiale en  $n$  variables réelles) ;
4. théorème 57 (composée de deux applications différentiables) ;
5. corollaire 58 (quotient de deux applications numériques différentiables) ;
6. corollaire 59 (différentiabilité d'une application rationnelle en  $n$  variables réelles) ;

valent tous en remplaçant partout « différentiable(s) » par « de classe  $\mathcal{C}^1$  ».

### 7.4. Intégration d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ le long d'un arc

**Théorème 72.** — Soient  $E, F$  des  $\mathbf{R}$ -espace vectoriel de dimension finie,  $\Omega$  une partie ouverte de  $E$ , un arc  $\gamma : [0, 1] \longrightarrow E$  de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[0, 1]$  tel que :

$$\forall t \in [0, 1] \quad \gamma(t) \in \Omega \quad [\text{l'arc est tracé sur } \Omega]$$

$a := \gamma(0)$  et  $b = \gamma(1)$  les extrémités de l'arc  $\gamma$ , une application  $f : \Omega \longrightarrow F$  de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\Omega$ . Alors :

$$f(b) - f(a) = \int_0^1 df(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt .$$

**Exercice 73.** — Soient  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace euclidien,  $\| \cdot \|$  la norme sur  $E$  associée au produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ,  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base orthonormée de  $E$ ,  $\Omega$  une partie ouverte convexe de  $E$ ,  $a$  un point de  $\Omega$  et  $f : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$  une application de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\Omega$ .

1. Justifier que, pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , le nombre réel :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) := \lim_{t \rightarrow 0_{\mathbf{R}}} \frac{f(a + te_i) - f(a)}{t} \quad [i\text{-ième dérivée partielle de } f \text{ en } a \text{ dans la base } \mathcal{B}]$$

existe et en donner une expression à l'aide de la différentielle  $df(a)$  de  $f$  en  $a$ .

2. Justifier qu'il existe un unique vecteur  $\nabla f(a) \in E$ , appelé gradient de  $f$  en  $a$ , tel que :

$$\forall h \in E \quad df(a) \cdot h = \langle \nabla f(a), h \rangle$$

et en donner une expression à l'aide des dérivées partielles de  $f$  en  $a$  dans la base  $\mathcal{B}$ .

3. On suppose que le gradient de  $f$  est borné sur  $\Omega$ , i.e. :

$$\exists k > 0 \quad \forall x \in \Omega \quad \|\nabla f(x)\| \leq k.$$

Démontrer que la fonction  $f$  est  $k$ -lipschitzienne sur  $\Omega$ .

### 7.5. Caractérisation des fonctions constantes sur un ouvert connexe par arcs

**Théorème 74.** — Soient  $E, F$  des  $\mathbf{R}$ -espaces vectoriels de dimension finie,  $\Omega$  une partie ouverte connexe par arcs de  $E$ ,  $f : \Omega \longrightarrow F$  une application. Alors :

$$f \text{ est constante sur } \Omega \iff \begin{cases} f \text{ est différentiable sur } \Omega \\ \text{et} \\ \forall x \in \Omega \quad df(x) = 0_{\mathcal{L}(E,F)}. \end{cases}$$

**Exercice 75.** — Déterminer toutes les applications  $f : \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \longrightarrow \mathbf{R}$  différentiable sur  $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$  qui vérifient :

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \quad df(A) = \text{Tr}.$$

### 7.6. Étude d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre

**Exercice 76.** —

1. Soit  $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ ,  $(x, y) \longmapsto f(x, y)$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbf{R}^2$  telle que :

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2 \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0.$$

Démontrer qu'il existe une fonction  $\varphi : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ , de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbf{R}$ , telle que :

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2, \quad f(x, y) = \varphi(x).$$

2. (a) Soit  $\varphi : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbf{R}$ . Démontrer que l'application

$$f \left| \begin{array}{l} \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R} \\ (x, y) \longmapsto \varphi(x + y) \end{array} \right.$$

est de classe  $\mathcal{C}^1$  et qu'elle vérifie :

$$(E) \quad \forall (x, y) \in \mathbf{R}^2 \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0.$$

(b) Réciproquement, soit  $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbf{R}^2$  telle que :

$$(E) \quad \forall (x, y) \in \mathbf{R}^2 \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0.$$

Démontrer qu'il existe une fonction  $\varphi : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ , de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbf{R}$ , telle que :

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2 \quad f(x, y) = \varphi(x + y).$$

On pourra considérer le changement de variable  $x = \frac{u+v}{2}$  et  $y = \frac{u-v}{2}$ .

## 8. Trois méthodes classiques pour étudier la différentiabilité

### 8.1. Appliquer des théorèmes d'opérations à des fonctions usuelles différentiables

Pour établir la différentiabilité d'une fonction numérique de plusieurs variables réelles, une méthode classique consiste à combiner les résultats sur les fonctions usuelles différentiables :

- une fonction d'une variable réelle est différentiable si et seulement si elle est dérivable (proposition 40) ;
- une application polynomiale en  $n$  variables réelles est différentiable (corollaire 56) ;
- une application rationnelle en  $n$  variables réelles est différentiable (corollaire 59) ;



avec des théorèmes d'opérations :

- combinaison linéaire d'applications différentiables (proposition 52) ;
- composée d'applications différentiables par une application multilinéaire (proposition 54) ;
- composée de deux applications différentiables (théorème 57) ;
- quotient de deux applications numériques différentiables (corollaire 58).

**Exemple 77.** — Considérons la fonction :

$$f \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R} \\ (x, y, z) \longmapsto \frac{\exp(x^2 + y - z)}{x^2 + y^2 + z^2 + 3} \end{array} \right.$$

L'application :

$$f_1 : (x, y, z) \longmapsto x^2 + y - z$$

est polynomiale donc différentiable sur  $\mathbf{R}^3$ .

Comme l'application  $\exp$  est dérivable sur  $\mathbf{R}$ , elle est différentiable sur  $\mathbf{R}$ .

Par composition, l'application :

$$\exp \circ f_1 : (x, y, z) \longmapsto \exp(x^2 + y - z)$$

est différentiable sur  $\mathbf{R}^3$ .

L'application :

$$f_2 : (x, y, z) \longmapsto x^2 + y^2 + z^2 + 3$$

est polynomiale donc différentiable sur  $\mathbf{R}^3$ .

Par quotient, l'application

$$f = \frac{\exp \circ f_1}{f_2}$$

est différentiable sur  $\mathbf{R}^3$  ( $f_2$  ne s'annule pas).

### 8.2. Calculer un DL1 de $f$ en un point $a$ en développant $f(a+h)$

*Notation.* — Soient :

- $E$  un  $\mathbf{R}$ -espace vectoriel de dimension finie, muni d'une norme  $N_E$  (elles sont toutes équivalentes) ;
- $F$  un  $\mathbf{R}$ -espace vectoriel de dimension finie, muni d'une norme  $N_F$  (elles sont toutes équivalentes) ;
- $\Omega$  une partie ouverte de  $E$  ;
- $f : \Omega \longrightarrow F$  une application ;
- $a$  un point de  $\Omega$ .

Pour étudier la différentiabilité de  $f$  en  $a$ , on peut chercher à développer la quantité  $f(a+h)$ , pour  $h \in E$  un vecteur au voisinage de  $0_E$  et chercher à obtenir une expression de la forme :



$$f(a+h) = f(a) + \underbrace{L(h)}_{\text{linéaire en } h} + \underbrace{r(h)}_{\text{reste}}.$$

Alors, si l'on prouve, avec le plus grand soin, que  $r(h) \underset{h \rightarrow 0_E}{=} o(N_E(h))$ , alors :

1. l'application  $f$  est différentiable en  $a$  ;
2.  $df(a) = L$ .

**Exemple 78.** — Dans l'exercice 27, nous suivis cette démarche pour établir que l'application :

$$f \left| \begin{array}{l} \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \\ A \longmapsto A^2 \end{array} \right.$$

est différentiable en tout point  $A$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$  et que

$$df(A) \left| \begin{array}{l} \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \\ H \longmapsto AH + HA. \end{array} \right.$$

**Exercice 79.** — Soient  $n \geq 2$  un entier et  $\|\cdot\|$  une norme sous-multiplicative sur  $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ . On définit l'application  $f$  par :

$$f \left| \begin{array}{l} \mathbf{GL}_n(\mathbf{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \\ A \longmapsto A^{-1}. \end{array} \right.$$

1. Démontrer que pour tout  $H \in B(0_{\mathcal{M}_n(\mathbf{R})}, 1)$ , la série  $\sum (-1)^p H^p$  converge et calculer le produit :

$$(I_n + H) \left( \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p H^p \right).$$

2. Démontrer que l'application  $f$  est différentiable en  $I_n$  et que pour tout  $H \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$  :

$$df(I_n) \cdot H = -H.$$

3. Soit  $A \in \mathbf{GL}_n(\mathbf{R})$ . Démontrer que  $f$  est différentiable en  $A$  et que pour tout  $H \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$  :

$$df(A) \cdot H = -A^{-1} H A^{-1}.$$

### 8.3. Appliquer le critère fondamental $\mathcal{C}^1$ pour une fonction de plusieurs variables

*Notation.* — Soient

- $n \geq 1$  et  $m \geq 1$  des nombres entiers ;
- $\mathcal{B}_n = (e_1, \dots, e_n)$  la base canonique de  $\mathbf{R}^n$  ;
- $\mathcal{B}_m = (e'_1, \dots, e'_m)$  la base canonique de  $\mathbf{R}^m$  ;
- $\Omega$  une partie ouverte de  $\mathbf{R}^n$  ;
- $f : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}^m ; (x_1, \dots, x_n) \longmapsto (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n))$  une application.

Pour étudier la différentiabilité de  $f$  sur  $\Omega$  tout entier, on peut :

- fixer un couple  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, m \rrbracket$ ;
- fixer un point  $(a_1, \dots, a_n)$  de  $\Omega$ ;
- considérer la fonction d'une variable réelle :

$$f_j(a_1, \dots, a_{i-1}, \bullet, a_{i+1}, \dots, a_n): x_i \mapsto f_j(a_1, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_n);$$

- justifier la dérivabilité de la fonction d'une variable réelle  $f_j(a_1, \dots, a_{i-1}, \bullet, a_{i+1}, \dots, a_n)$  en  $a_i$  (en revenant à la définition *via* un taux d'accroissement si nécessaire);
- calculer la dérivée de la fonction  $f_j(a_1, \dots, a_{i-1}, \bullet, a_{i+1}, \dots, a_n)$  en  $a_i$ , qui est, par définition, la  $i$ -ème dérivée partielle de la fonction  $f_j$  au point  $(a_1, \dots, a_n)$  :

$$f_j(a_1, \dots, a_{i-1}, \bullet, a_{i+1}, \dots, a_n)'(a_i) = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(a_1, \dots, a_n);$$



- justifier la continuité de la fonction  $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}$  sur  $\Omega$  (l'existence seule des dérivées partielles n'assure pas la différentiabilité);
- citer le critère  $\mathcal{C}^1$  qui livre :
  1. le caractère  $\mathcal{C}^1$  de  $f$  sur  $\Omega$  et donc, en particulier sa différentiabilité sur  $\Omega$ ;
  2. pour tout  $a \in \Omega$  :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_n, \mathcal{B}_m}(df(a)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix} \quad [\text{matrice Jacobienne de } f \text{ en } a].$$

**Exemple 80.** — Dans l'exemple 68, nous suivis cette démarche pour établir que l'application

$$f \left| \begin{array}{l} \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2 \\ (x, y) \longmapsto \left( x^2 + xy - y^3, \cos\left(\frac{x}{y^2 + 1}\right) \right) \end{array} \right.$$

est différentiable sur  $\mathbf{R}^2$  et que pour tout  $(a, b) \in \mathbf{R}^2$  :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(df(a, b)) = \begin{pmatrix} 2a + b & a - 3b^2 \\ -\frac{1}{b^2 + 1} \sin\left(\frac{a}{b^2 + 1}\right) & \frac{2ab}{(b^2 + 1)^2} \sin\left(\frac{a}{b^2 + 1}\right) \end{pmatrix}$$

où  $\mathcal{B}$  désigne la base canonique de  $\mathbf{R}^2$ . Nous aurions également pu prendre appui sur les fonctions usuelles différentiables et les théorèmes d'opérations.

**Exercice 81.** — Démontrer que l'application :

$$f \left| \begin{array}{l} \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R} \\ (x, y) \longmapsto \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \end{array} \right.$$

est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbf{R}^2$ .

**8.4. Différentiabilité et différentielle du déterminant : deux approches (HP)**

**Exercice 82.** — Soit  $n \geq 2$  un nombre entier. Soit l'application :

$$f \left| \begin{array}{l} \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \longrightarrow \mathbf{R} \\ A \longmapsto \det(A) . \end{array} \right.$$

1. Soit  $H \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ . Écrire  $f(I_n + H)$  comme une somme sur les éléments du groupe symétrique  $\mathfrak{S}_n$ .
2. Dédurre que la question 1 que :

$$f(I_n + H) \underset{H \rightarrow 0, \mathcal{M}_n(\mathbf{K})}{=} 1 + \text{tr}(H) + o(\|H\|)$$

en écrivant un développement limité à l'ordre 1 de l'application  $f$  en  $I_n$ . Qu'en déduire pour l'application  $f$  ?

3. Justifier que l'application  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$  et, en considérant des dérivées directionnelles, démontrer que :

$$\forall H \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \quad df(I_n) \cdot H = \text{tr}(H) .$$

4. Soit  $A \in \text{GL}_n(\mathbf{R})$ . Démontrer que :

$$f(A + H) \underset{H \rightarrow 0, \mathcal{M}_n(\mathbf{K})}{=} \det(A) + \text{tr}(\text{Com}(A)^\top H) + o(\|H\|) .$$

Que peut-on déduire pour l'application  $f$  ?

**9. Applications de classe  $\mathcal{C}^k$**

**9.1. Dérivées partielles d'ordre  $k$**

**Définition 83.** — Soient  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbf{R}^n$ ,  $F$  un  $\mathbf{R}$ -espace vectoriel de dimension finie,

$$f \left| \begin{array}{l} \Omega \longrightarrow F \\ (x_1, \dots, x_n) \longmapsto f(x_1, \dots, x_n) \end{array} \right.$$

une application,  $k \geq 2$  un entier et  $(i_1, \dots, i_k) \in \llbracket 1, n \rrbracket^k$ . On dit que l'application admet une dérivée partielle d'ordre  $k$  pour le multi-indice  $(i_1, \dots, i_k)$  si :

1. la fonction  $f$  admet une dérivée partielle d'ordre  $k - 1$  pour le multi-indice  $(i_2, \dots, i_k)$ , que l'on note

$$\frac{\partial^{k-1} f}{\partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_k}} ;$$

2. la fonction  $\frac{\partial^{k-1} f}{\partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_k}}$  admet une dérivée partielle suivant la variable  $x_{i_1}$  que l'on note

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_k}} := \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \left( \frac{\partial^{k-1} f}{\partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_k}} \right) .$$

**Exercice 84.** — Démontrer que, pour tout  $(i_1, i_2) \in \llbracket 1, 2 \rrbracket^2$ , la fonction :

$$f \left| \begin{array}{l} \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R} \\ (x_1, x_2) \longmapsto \sin(x_1^2 + x_2^3) \end{array} \right.$$

admet une dérivée partielle d'ordre 2 pour le multi-indice  $(i_1, i_2)$  et calculer  $\frac{\partial f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2}}$ .

### 9.2. Définition d'une applications de classe $\mathcal{C}^k$

**Définition 85.** — Soient  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbf{R}^n$ ,  $F$  un  $\mathbf{R}$ -espace vectoriel de dimension finie,

$$f \left| \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & F \\ (x_1, \dots, x_n) & \longmapsto & f(x_1, \dots, x_n) \end{array} \right.$$

une application,  $k \geq 2$  un entier. On dit que l'application  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^k$  sur  $\Omega$  si, pour tout  $(i_1, \dots, i_k) \in \llbracket 1, n \rrbracket^k$  :

1. la fonction  $f$  admet une dérivée partielle d'ordre  $k$  pour le multi-indice  $(i_1, \dots, i_k)$  ;
2. la fonction  $\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_k}}$  est continue sur  $\Omega$  .

**Remarque 86.** — Soient  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbf{R}^n$ ,  $F$  un  $\mathbf{R}$ -espace vectoriel de dimension finie et  $f : \Omega \longrightarrow F$  une application. L'application est de classe  $\mathcal{C}^2$  au sens de la définition 85 si et seulement si :

1. la fonction  $f$  est différentiable sur  $\Omega$  ;
2. la fonction  $df : \Omega \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbf{R}^n, F)$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\Omega$  .

### 9.3. Théorème de Schwarz

**Théorème 87.** — Soient  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbf{R}^n$ ,  $F$  un  $\mathbf{R}$ -espace vectoriel de dimension finie,  $k \geq 2$  un entier et :

$$f \left| \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & F \\ (x_1, \dots, x_n) & \longmapsto & f(x_1, \dots, x_n) \end{array} \right.$$

une application de classe  $\mathcal{C}^k$ . Alors pour tout  $(i_1, \dots, i_k) \in \llbracket 1, n \rrbracket^k$  et pour toute permutation  $\sigma \in \mathfrak{S}_k$  :

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_k}} = \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_{\sigma(1)}} \partial x_{i_{\sigma(2)}} \dots \partial x_{i_{\sigma(k)}}} .$$

La continuité des dérivées partielles d'ordre  $k$  est essentielle dans le théorème de Schwarz. Si  $f$  est l'application :



$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (x, y) & \longmapsto & \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \end{array} \right.$$

alors les dérivées partielles  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$  et  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$  existent mais  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$  .

### 9.4. Caractère $\mathcal{C}^k$ via les applications composantes

**Proposition 88.** — Soient  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbf{R}^n$ ,

$$f \left| \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \mathbf{R}^p \\ (x_1, \dots, x_n) & \longmapsto & (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_p(x_1, \dots, x_n)) \end{array} \right.$$

une application et  $k \geq 1$  un entier. Alors, l'application  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^k$  sur  $\Omega$  si et seulement si ses applications composantes  $f_1, \dots, f_p$  sont de classe  $\mathcal{C}^k$  sur  $\Omega$ .

**9.5. Opérations sur les fonctions de classe  $\mathcal{C}^k$**

Soit un entier  $k \geq 2$ . Les résultats suivants :

1. proposition 52 (combinaison linéaire d'applications différentiables) ;
2. proposition 54 (composée d'applications différentiables par une application multilinéaire) ;
3. corollaire 56 (différentiabilité d'une application polynomiale en  $n$  variables réelles) ;
4. théorème 57 (composée de deux applications différentiables) ;
5. corollaire 58 (quotient de deux applications numériques différentiables) ;
6. corollaire 59 (différentiabilité d'une application rationnelle en  $n$  variables réelles) ;

valent tous en remplaçant partout « différentiable(s) » par « de classe  $\mathcal{C}^k$  ».

**Exercice 89.** — Soit une application :

$$f \left| \begin{array}{l} \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R} \\ (x, y) \longmapsto f(x, y) \end{array} \right.$$

de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbf{R}^2$ . Démontrer que l'application

$$g \left| \begin{array}{l} \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} \\ (r, \theta) \longmapsto f(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) \end{array} \right.$$

est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}$  et exprimer les dérivées partielles premières de secondes de  $g$ , en fonction des dérivées partielles premières de secondes de  $f$ .

**9.6. Étude d'une équation aux dérivées partielles du second ordre (équation de d'Alembert)**

**Exercice 90.** —

1. Soit une fonction :

$$g \left| \begin{array}{l} \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R} \\ (u, v) \longmapsto g(u, v) \end{array} \right.$$

de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbf{R}^2$  telle que :

$$\forall (u, v) \in \mathbf{R}^2, \quad \frac{\partial^2 g}{\partial v \partial u}(u, v) = 0.$$

Démontrer qu'il existe  $\varphi \in \mathcal{C}^2(\mathbf{R}, \mathbf{R})$  et  $\psi \in \mathcal{C}^2(\mathbf{R}, \mathbf{R})$  telles que :

$$\forall (u, v) \in \mathbf{R}^2 \quad g(u, v) = \varphi(u) + \psi(v).$$

2. Soit  $c \in \mathbf{R}^*$ . Soit une fonction :

$$f \left| \begin{array}{l} \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R} \\ (x, t) \longmapsto f(x, t) \end{array} \right.$$

de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbf{R}^2$  telle que :

$$\forall (x, t) \in \mathbf{R}^2 \quad c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, t) = \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(x, t).$$

(a) Soient  $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbf{R}$  fixés. On considère la fonction  $g$  définie par :

$$g \left| \begin{array}{l} \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R} \\ (u, v) \longmapsto f(\alpha u + \beta v, \gamma u + \delta v). \end{array} \right.$$

Démontrer que la fonction  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbf{R}^2$  et exprimer, pour tout  $(u, v) \in \mathbf{R}^2$ ,  $\frac{\partial^2 g}{\partial v \partial u}(u, v)$  en fonction de  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  et des dérivées partielles d'ordre 2 de  $f$ .

(b) En choisissant  $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbf{R}^4$  tels que :

- i. la matrice  $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$  est inversible ;
- ii. pour tout  $(u, v) \in \mathbf{R}^2$ ,  $\frac{\partial^2 g}{\partial v \partial u}(u, v) = 0$  ;

démontrer qu'il existe  $\varphi \in \mathcal{C}^2(\mathbf{R}, \mathbf{R})$  et  $\psi \in \mathcal{C}^2(\mathbf{R}, \mathbf{R})$  telles que :

$$\forall (x, t) \in \mathbf{R}^2 \quad f(x, t) = \varphi(x + ct) + \psi(x - ct).$$