Une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 2 avec raccordement
Extrait du sujet CCINP-1-MP-2014

a et b étant deux fonctions continues sur $\mathbf{R}$, on note l'équation différentielle :

$$(\mathscr{E}) \quad x^2 y'' + a(x)\, y' + b(x)\, y = 0\,.$$

On note S^+ l'espace vectoriel des solutions de $(\mathscr{E})$ sur l'intervalle $I =]0, +\infty[$ et S^- l'espace vectoriel des solutions de $(\mathscr{E})$ sur l'intervalle $J =]-\infty, 0[$. L'objectif de cet exercice est d'étudier la dimension de l'espace vectoriel S des fonctions y de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbf{R}$ vérifiant $(\mathscr{E})$ sur $\mathbf{R}$ tout entier.

1. Donner la dimension des espaces S^+ et S^-.

- *Dimension de S^+.* — Sur l'intervalle I, l'équation (E) se réécrit sous forme normalisée :

$$y'' + \frac{a(x)}{x^2} y' + \frac{b(x)}{x^2} y = 0\,.$$

  Les fonctions $x \longmapsto \dfrac{a(x)}{x^2}$ et $x \longmapsto \dfrac{b(x)}{x^2}$ sont continues sur l'intervalle I et l'équation est linéaire homogène d'ordre 2. Donc par théorème, $\boxed{S^+ \text{ est de dimension } 2}$.

- *Dimension de S^-.* — De même, $\boxed{S^- \text{ est de dimension } 2}$.

2. On note φ l'application linéaire de S vers $S^+ \times S^-$ définie par $\varphi(f) = (f_I, f_J)$ où f_I désigne la restriction de f à l'intervalle I et f_J désigne la restriction de f à l'intervalle J. Donner le noyau de l'application φ et en déduire que $\dim(S) \leqslant 4$.

- *Noyau de φ* — Soit $f \in \operatorname{Ker}(\varphi)$.
  Alors f est nulle sur les intervalles I et J donc sur $\mathbf{R}^*$.
  Par continuité de f en 0, $f(0) = 0$.
  Donc f est la fonction nulle sur $\mathbf{R}$, ce qui montre que $\boxed{\operatorname{Ker}(\varphi) = \{0_{\mathbf{R}^\mathbf{R}}\}}$.

- *Majoration de* $\dim(S)$ — L'application étant une application linéaire et injective, elle définit un isomorphisme de S sur $\operatorname{Im}(\varphi)$.
  Or $\operatorname{Im}(\varphi)$ est un sous-espace vectoriel de $S_1 \times S_2$ qui est un espace vectoriel de dimension $2 + 2 = 4$.
  Donc $\operatorname{Im}(\varphi)$ est un espace vectoriel de dimension finie et $\dim(\operatorname{Im}(\varphi)) \leqslant 4$.
  Étant isomorphe à $\operatorname{Im}(\varphi)$, S est aussi de même dimension finie, ce qui donne $\boxed{\dim(S) \leqslant 4}$.

3. Dans cette question, on considère $a(x) = x$ et $b(x) = 0$, d'où :

$$(\mathscr{E}) \quad x^2 y'' + x\, y' = 0\,.$$

Determiner S^+ et S^-. Determiner ensuite S et donner sans détails la dimension de S .

- *Résolution de $(\mathscr{E})$ sur un intervalle ne contenant pas* 0. — Soit I_0 un intervalle de $\mathbf{R}$ ne contenant pas 0. Sur I_0, l'équation $(\mathscr{E})$ est équivalente à :

$$y'' + \frac{1}{x} y' = 0 \qquad \text{[équation normalisée]}$$

soit au système :

$$(\mathscr{S}) \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} z' + \dfrac{1}{x} z & = & 0 \\ y' & = & z\,. \end{array} \right.$$

La première équation différentielle de $(\mathscr{S})$ est linéaire, homogène, d'ordre 1, a immédiatement pour ensemble solution sur l'intervalle I_0 la droite vectorielle :

$$\left\{ \left| \begin{array}{ccc} I_0 & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{k_1}{x} \end{array} \right. : k_1 \in \mathbf{R} \right\}.$$

Ainsi, une fonction $y \in \mathscr{C}^2(I_0, \mathbf{R})$ est solution de $(\mathscr{E})$ si et seulement si :

$$\exists\, k_1 \in \mathbf{R} \quad \forall\, x \in I_0 \quad y'(x) = \frac{k_1}{x}$$

si et seulement si :

$$\exists\, (k_1, k_2) \in \mathbf{R}^2 \quad \forall\, x \in I_0 \quad y(x) = k_1 \ln(|x|) + k_2\,.$$

Ainsi :

$$\boxed{\mathrm{Sol}_{(\mathscr{E}), I_0} = \mathrm{Vect}\left(\left| \begin{array}{ccc} I_0 & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & 1 \end{array} \right. , \left| \begin{array}{ccc} I_0 & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \ln(x) \end{array} \right. \right) .}$$

- *Détermination de S^+ et S^-.* — D'après le point précédent :

$$\boxed{S^+ = \mathrm{Vect}\left(\left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & 1 \end{array} \right. , \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \ln(x) \end{array} \right. \right)}$$

et

$$\boxed{S^- = \mathrm{Vect}\left(\left| \begin{array}{ccc} J & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & 1 \end{array} \right. , \left| \begin{array}{ccc} J & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \ln(-x) \end{array} \right. \right) .}$$

- *Détermination de S en analysant le raccordement en* 0. — Soit $f \in S$. Comme $f_I \in S^+$ et $f_J \in S^-$:

$$\exists\, (k_1, k_2, k_3, k_4) \in \mathbf{R}^4 \quad \forall\, x \in \mathbf{R}^* \quad f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} k_1 \ln(x) + k_2 & \text{si } x > 0 \\ k_3 \ln(-x) + k_4 & \text{si } x < 0\,. \end{array} \right.$$

La fonction f étant continue en 0, elle est bornée au voisinage de 0, d'où $k_1 = k_3 = 0$.
La continuité à gauche et à droite de f en 0 impose alors $k_2 = f(0) = k_4$.
La fonction f est donc constante sur $\mathbf{R}$.
Réciproquement, il est immédiat de vérifier que les fonctions constantes sur $\mathbf{R}$ sont éléments de S.
Nous pouvons donc conclure que :

$$\boxed{S = \mathrm{Vect}\left(\left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & 1 \end{array} \right. \right) \qquad \text{et} \qquad \dim(S) = 1.}$$

4. Dans cette question :

$$(\mathscr{E}) \quad x^2 y'' - 6xy' + 12y = 0\,.$$

Déterminer deux solutions sur I de cette équation de la forme $x \longmapsto x^\alpha$ (α réel). En déduire S^+ puis S^-. Déterminer S et donner la dimension de S.

- *Recherche de fonctions puissances solutions de* $(\mathscr{E})$ *sur* I. — Soit la fonction :

$$f_\alpha \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x^\alpha\,. \end{array} \right.$$

La fonction f_α, qui est de classe $\mathscr{C}^2$ sur I, est solution de $(\mathscr{E})$ sur I si et seulement si :

$$\forall\, x > 0 \quad x^2\,\alpha\,(\alpha-1)\,x^{\alpha-2} - 6\,x\,\alpha\,x^{\alpha-1} + 12\,x^\alpha = 0$$

si et seulement si :

$$\forall\, x > 0 \quad x^\alpha \left(\alpha^2 - 7\,\alpha + 12\right) = 0\,.$$

Comme 4 et 3 sont racines du polynôme $X^2 - 7X + 12$:

$$\boxed{\text{les fonctions } f_3 \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x^3 \end{array} \right. \text{ et } f_4 \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x^4 \end{array} \right. \text{ sont éléments de } S^+.}$$

- *Détermination de* S^+. — La famille (f_3, f_4) est une famille libre à 2 éléments (vérification immédiate et laissée au soin de la lectrice/du lecteur) d'éléments de S^+.
D'après Q1, S^+ est de dimension 2 .
Donc (f_3, f_4) une base de S^+ et :

$$\boxed{S^+ = \mathrm{Vect}\left(f_3, f_4\right)\quad .}$$

- *Deux fonctions puissances solutions de* $(\mathscr{E})$ *sur* J. — On vérifie immédiatement, par le calcul que :

$$\boxed{\text{les fonctions } g_3 \left| \begin{array}{ccc} J & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x^3 \end{array} \right. \text{ et } g_4 \left| \begin{array}{ccc} J & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x^4 \end{array} \right. \text{ sont éléments de } S^-.}$$

- *Détermination de* S^-. — La famille (g_3, g_4) est une famille libre à 2 éléments d'éléments de S^-.
D'après Q1, S^- est de dimension 2 .
Donc (g_3, g_4) une base de S^- et :

$$\boxed{S^- = \mathrm{Vect}\left(g_3, g_4\right)\quad .}$$

- *Détermination de* S *en analysant le raccordement en* 0. — Soit $f \in S$. Comme $f_I \in S^+$ et $f_J \in S^-$:

$$\exists\,(k_1, k_2, k_3, k_4) \in \mathbf{R}^4 \quad \forall\, x \in \mathbf{R}^* \quad f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} k_1\,x^3 + k_2\,x^4 & \text{si } x > 0 \\ k_3\,x^3 + k_4\,x^4 & \text{si } x < 0\,. \end{array} \right.$$

Par continuité de f en 0, nous en déduisons que $f(0) = 0$.

Nous en déduisons que :

$$\forall x \in \mathbf{R} \quad f(x) = \begin{cases} k_1 x^3 + k_2 x^4 & \text{si } x \geqslant 0 \\ k_3 x^3 + k_4 x^4 & \text{si } x < 0\,. \end{cases}$$

Réciproquement, étant donnés $(k_1, k_2, k_3, k_4) \in \mathbf{R}^4$, vérifions si la fonction :

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} k_1 x^3 + k_2 x^4 & \text{si } x \geqslant 0 \\ k_3 x^3 + k_4 x^4 & \text{si } x < 0 \end{cases} \end{array} \right.$$

appartient à S, en commençant par porter notre attention sur sa régularité (une solution de $(\mathscr{E})$ sur $\mathbf{R}$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbf{R}$).

— La fonction f est dérivable sur $\mathbf{R}^*$. Comme :

$$\forall x > 0 \quad \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = k_1 x^2 + k_2 x^3 \xrightarrow[x \to 0^+]{} 0$$

et

$$\forall x < 0 \quad \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = k_3 x^2 + k_4 x^2 \xrightarrow[x \to 0^-]{} 0$$

la fonction f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.
On calcule :

$$f' \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 3\,k_1 x^2 + 4\,k_2 x^3 & \text{si } x \geqslant 0 \\ 3\,k_3 x^2 + 4\,k_4 x^3 & \text{si } x < 0\,. \end{cases} \end{array} \right.$$

— La fonction f' est dérivable sur $\mathbf{R}^*$. Comme :

$$\forall x > 0 \quad \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = 3\,k_1 x + 4\,k_2 x^2 \xrightarrow[x \to 0^+]{} 0$$

et

$$\forall x < 0 \quad \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = 3\,k_3 x + 4\,k_4 x^2 \xrightarrow[x \to 0^-]{} 0$$

la fonction f' est dérivable en 0 et $f''(0) = 0$.
On calcule :

$$f'' \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 6\,k_1 x + 12\,k_2 x^2 & \text{si } x \geqslant 0 \\ 6\,k_3 x + 412\,k_4 x^2 & \text{si } x < 0 \end{cases} \end{array} \right.$$

qui est continue en sur $\mathbf{R}$.
La fonction f est donc de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbf{R}$.

— Comme f_I appartient à S^+ et f_J appartient à S^-, nous savons que :

$$\forall x \in \mathbf{R}^* \quad x^2 f''(x) - 6\,x\,f'(x) + 12\,f(x) = 0\,.$$

Comme $f(0) = f'(0) = f''(0)$, nous savons même que :

$$\forall x \in \mathbf{R} \quad x^2 f''(x) - 6\,x\,f'(x) + 12\,f(x) = 0\,.$$

La fonction f appartient donc à S.

D'après notre étude :

$$\boxed{S = \left\{ \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} k_1\,x^3 + k_2\,x^4 & \text{si } x \geqslant 0 \\ k_3\,x^3 + k_4\,x^4 & \text{si } x < 0 \end{cases} \end{array} \right. \;:\; (k_1, k_2, k_3, k_4) \in \mathbf{R}^4 \right\}}\ .$$

- *Dimension de S.* — Introduisons les fonctions h_1, h_2, h_3, h_4 définies par :

$$h_1 \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x^3 \times \mathbf{1}_{[0,+\infty[}(x) \end{array} \right. \qquad h_2 \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x^4 \times \mathbf{1}_{[0,+\infty[}(x) \end{array} \right.$$

$$h_3 \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x^3 \times \mathbf{1}_{]-\infty,0[}(x) \end{array} \right. \qquad h_4 \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x^4 \times \mathbf{1}_{]-\infty,0[}(x) \end{array} \right.$$

qui sont éléments de S, d'après la description de S en extension obtenue précédemment, e.g. h_1 est obtenue en choisissant $(k_1, k_2, k_3, k_4) = (1, 0, 0, 0)$).
Nous observons que :

$$S = \mathrm{Vect}\big(h_1, h_2, h_3, h_4\big)\ .$$

La famille (h_1, h_2, h_3, h_4) est libre. En effet, soient $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathbf{R}^4$ tel que :

$$\lambda_1\,h_1 + \lambda_2\,h_2 + \lambda_3\,h_3 + \lambda_4\,h_4 = 0_{\mathbf{R}^{\mathbf{R}}}\ .$$

En évaluant en $-1, -2, 1, 2$, il vient :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -8 & 16 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 8 & 16 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=:A} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice $A \in \mathscr{M}_4(\mathbf{R})$ étant de rang 4, elle est inversible, d'où $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$.

Nous en déduisons que $\boxed{\dim(S) = 4.}$

5. Donner un exemple d'équation différentielle du type :

$$(\mathscr{E}) \quad x^2\,y'' + a(x)\,y' + b(x)\,y = 0$$

tel que $\dim(S) = 0$ (on détaillera). On pourra, par exemple, s'inspirer de la question précédente.

- *Choix de l'équation différentielle.* — Considérons l'équation :

$$(\mathscr{E}) \qquad x^2\,y'' + 4\,x\,y' + 2\,y = 0\ .$$

Nos coefficients ont été choisis pour que les fonctions :

$$x \longmapsto \frac{1}{x} \qquad \text{et} \qquad x \longmapsto \frac{1}{x^2}$$

soient solutions de $(\mathscr{E})$ sur tout intervalle I_0 ne contenant par 0.

- *Détermination de S^+ et S^-.* — En suivant la démarche de la question précédente, on calcule :

$$\boxed{S^+ = \mathrm{Vect}\left(\left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x} \end{array} \right. , \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x^2} \end{array} \right. \right)}$$

et

$$\boxed{S^- = \mathrm{Vect}\left(\left| \begin{array}{ccc} J & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x} \end{array} \right. , \left| \begin{array}{ccc} J & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x^2} \end{array} \right. \right).}$$

- *Détermination de S en analysant le raccordement en 0.* — Soit $f \in S$. Comme $f_I \in S^+$ et $f_J \in S^-$:

$$\exists\,(k_1, k_2, k_3, k_4) \in \mathbf{R}^4 \quad \forall\, x \in \mathbf{R}^* \quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{k_1}{x} + \dfrac{k_2}{x^2} & \text{si } x > 0 \\[2ex] \dfrac{k_3}{x} + \dfrac{k_3}{x^4} & \text{si } x < 0\,. \end{cases}$$

Comme la fonction f est continue en 0 à droite, il vient :

$$\forall\, x > 0 \quad k_1\, x + k_2 = x^2 f(x) \xrightarrow[x \to 0^+]{} 0$$

d'où $k_2 = 0$.
Comme la fonction f est continue en 0 à gauche, il vient :

$$\forall\, x < 0 \quad k_3\, x + k_4 = x^2 f(x) \xrightarrow[x \to 0^-]{} 0$$

d'où $k_4 = 0$.
Ainsi :

$$\forall\, x \in \mathbf{R}^* \quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{k_1}{x} & \text{si } x > 0 \\[2ex] \dfrac{k_3}{x} & \text{si } x < 0\,. \end{cases}$$

La fonction f étant continue en 0, elle est bornée au voisinage de 0. Nous en déduisons $k_1 = k_3 = 0$.
La fonction f est donc la fonction nulle sur $\mathbf{R}$.
Réciproquement la fonction nulle sur $\mathbf{R}$ appartient à S.
Ainsi : $\boxed{S = \{0_{\mathbf{R}^{\mathbf{R}}}\} \text{ et } \dim(S) = 0.}$