Corrigé de Centrale MP2 2019

I. 1. X_n est une variable aléatoire discrète comme combinaison linéaire de variables aléatoires discrètes, donc e^{itX_n} également comme fonction d'une telle variable. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $|\mathrm{e}^{itX_n}| = 1$. Comme $1 \in L^1$, $\mathrm{e}^{itX_n} \in L^1$. On obtient

$$\Phi_{X_n}(t) = E\left(\mathrm{e}^{itX_n}\right) = E\left(\exp\left(it\sum_{k=1}^{n}\frac{\varepsilon_k}{2^k}\right)\right) = E\left(\prod_{k=1}^{n}\mathrm{e}^{\frac{it\varepsilon_k}{2^k}}\right).$$

Comme la suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est iid, la suite $\left(\mathrm{e}^{it\frac{\varepsilon_n}{2^n}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ l'est aussi par le lemme des coalitions, et il vient

$$\Phi_{X_n}(t) = \prod_{k=1}^{n} E\left(\mathrm{e}^{\frac{it\varepsilon_k}{2^k}}\right).$$

D'après la formule de transfert puis la formule d'Euler

$$E\left(\mathrm{e}^{\frac{it\varepsilon_k}{2^k}}\right) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{it}{2^k}} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{it}{2^k}} = \cos\left(\frac{t}{2^k}\right)$$

et on obtient finalement comme voulu

$$\Phi_{X_n}(t) = \prod_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{t}{2^k}\right).$$

2. On montre ce résultat par récurrence. Pour $n = 1$, on a avec la question précédente

$$\sin\left(\frac{t}{2}\right)\Phi_{X_1}(t) = \sin\left(\frac{t}{2}\right)\cos\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{\sin(t)}{2}.$$

Supposons que $\sin\left(\frac{t}{2^n}\right)\Phi_{X_n}(t) = \frac{\sin(t)}{2^n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, alors

$$\sin\left(\frac{t}{2^{n+1}}\right)\Phi_{X_{n+1}}(t) = \sin\left(\frac{t}{2^{n+1}}\right)\cos\left(\frac{t}{2^{n+1}}\right)\Phi_{X_n}(t) = \frac{1}{2}\sin\left(\frac{t}{2^n}\right)\Phi_{X_n}(t) = \frac{\sin(t)}{2^{n+1}}$$

ce qui clôt l'hérédité et la récurrence.

3. Pour tout $t \in \mathbb{R}^*$, on a $0 < \frac{t}{2^n} < \pi$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ assez grand (précisément pour $n \geqslant n_0 = \lfloor \log_2(\pi t)\rfloor + 1$) et donc $\sin\left(\frac{t}{2^n}\right) \neq 0$. Il vient pour un tel n

$$\Phi_{X_n}(t) = \frac{\sin(t)}{2^n\sin\left(\frac{t}{2^n}\right)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sin(t)}{t} = \operatorname{sinc}(t).$$

On a directement $\Phi_{X_n}(0) = E(1) = 1 = \operatorname{sinc}(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Finalement, $(\Phi_{X_n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers sinc.

4. sinc est continue sur $\mathbb{R}^*$ comme quotient d'applications continues dont le dénominateur ne s'annule pas, et l'équivalent usuel $\sin t \underset{t\to 0}{\sim} t$ déjà utilisé ci-dessus donne que $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} = 1 = \operatorname{sinc}(0)$. sinc, limite simple de $(\Phi_{X_n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ sur $\mathbb{R}$, est continue sur $\mathbb{R}$.

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a par symétrie que ε_n et $-\varepsilon_n$ ont la même loi. Le caractère iid de $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ permet d'affirmer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n) \sim (-\varepsilon_1,\ldots,-\varepsilon_n)$, en l'occurrence la loi uniforme sur $\{-1,1\}^n$. En appliquant à ces deux n-uplets la même fonction $(x_1,\ldots,x_n) \mapsto \sum_{k=1}^{n}\frac{x_k}{2^k}$, on obtient que $X_n \sim -X_n$.

6. $|\cos(tX_n)| \leqslant 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, ce qui montre que $\cos(tX_n) \in L^1$. D'après la formule d'Euler et par linéarité de l'espérance, on a pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$\varphi_n(t) = E(\cos(tX_n)) = \frac{1}{2}\Phi_{X_n}(t) + \frac{1}{2}\Phi_{-X_n}(t) = \Phi_{X_n}(t)$$

puisque $X_n \sim -X_n$ avec la question précédente, donc $\mathrm{e}^{itX_n} \sim \mathrm{e}^{-itX_n}$ puis $E\left(\mathrm{e}^{itX_n}\right) = E\left(\mathrm{e}^{-itX_n}\right)$. Il découle de ce qui précède que $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement vers sinc sur $\mathbb{R}$.

7. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\varphi_n(2^{n+1}\pi) = \prod_{k=1}^{n}\cos\left(2^{n+1-k}\pi\right) = 1$, tandis que $\operatorname{sinc}(2^{n+1}\pi) = 0$. Il en découle que

$$\|\varphi_n - \operatorname{sinc}\|_{\infty,\mathbb{R}} \geqslant |\varphi_n(2^{n+1}\pi) - \operatorname{sinc}(2^{n+1}\pi)| = 1$$

et donc que $\|\varphi_n - \operatorname{sinc}\|_{\infty,\mathbb{R}}$ ne converge pas vers 0. $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne converge pas uniformément vers sinc sur $\mathbb{R}$.

II. 8. Il est clair que $\Phi_n(x_1,\dots,x_n)$ est correctement définie pour tout $(x_1,\dots,x_n)\in\{0,1\}^1$, et à valeurs dans $\mathbb{N}$ puisque $x_j 2^{n-j}\in\mathbb{N}$ pour tout $j\in[\![1,n]\!]$. De plus,

$$\Phi_n(x_1,\dots,x_n)=\sum_{j=1}^n x_j 2^{n-j}\leqslant\sum_{j=1}^n 2^{n-j}=2^{n-1}\frac{1-\left(\frac12\right)^n}{1-\frac12}=2^n-1$$

et Φ_n est bien à valeurs dans $[\![0,2^n-1]\!]$.

9. On a $\operatorname{Im}\Phi_n=A_n$ par définition même de A_n.

10. On demande de démontrer que $\operatorname{Im}\Phi_n=[\![0,2^n-1]\!]$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, autrement dit que Φ_n est surjective, ce qu'on fait par récurrence sur n. On a $\Phi_1(0)=0$ et $\Phi_1(1)=1$ de sorte que $\operatorname{Im}\Phi_1=[\![0,1]\!]$, comme voulu. Supposons que Φ_n soit surjective pour $n\in\mathbb{N}^*$ fixé. Soit $k\in[\![0,2^{n+1}-1]\!]$.

Si $k\in[\![0,2^n-1]\!]$, il existe par hypothèse de récurrence $(x_1,\dots,x_n)\in\{0,1\}^n$ tel que $\Phi_n(x_1,\dots,x_n)=k$. Alors

$$\Phi_{n+1}(0,x_1,\dots,x_n)=0+\sum_{j=2}^{n+1}x_{j-1}2^{n+1-j}=\sum_{j=1}^n x_j 2^{n-j}=\Phi_n(x_1,\dots,x_n)=k.$$

Si $k\in[\![2^n,2^{n+1}-1]\!]$, alors $k-2^n\in[\![0,2^{n+1}-2^n-1]\!]=[\![0,2^n-1]\!]$, et il existe encore $(x_1,\dots,x_n)\in\{0,1\}^n$ tel que $\Phi_n(x_1,\dots,x_n)=k-2^n$. Alors

$$\Phi_{n+1}(1,x_1,\dots,x_n)=2^n+\sum_{j=2}^{n+1}x_{j-1}2^{n+1-j}=2^n+k-2^n=k.$$

On a ainsi montré que Φ_{n+1} est surjective, ce qui clôt l'hérédité et la récurrence.

11. Φ_n est surjective de $\{0,1\}^n$ sur $[\![0,2^n-1]\!]$, et ces deux ensembles sont finis, de même cardinal 2^n. Φ_n est donc bijective.

12. Soit $x\in D_n$: il existe $(x_1,\dots,x_n)\in\{0,1\}^n$ tel que $x=\displaystyle\sum_{j=1}^n\frac{x_j}{2^j}=\sum_{j=1}^{n+1}\frac{x_j}{2^j}$ en posant $x_{n+1}=0$ et donc $x\in D_{n+1}$. On a ainsi prouvé que $D_n\subset D_{n+1}$ et donc $(D_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante au sens de l'inclusion. Pour tout $n\in\mathbb{N}$ et tout $x\in D_n$, avec les mêmes notations, on a bien sûr $x=\displaystyle\sum_{j=1}^n\frac{x_j}{2^j}\geqslant 0$ et

$$x=\sum_{j=1}^n\frac{x_j}{2^j}\leqslant\sum_{j=1}^n\frac{1}{2^j}=\frac12\,\frac{1-\left(\frac12\right)^n}{1-\frac12}=1-\left(\frac12\right)^n\leqslant 1$$

si bien que $D_n\subset[0,1[$, et donc $D=\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}D_n\subset[0,1]$.

13. Soit $(x,n)\in\mathbb{R}\times\mathbb{N}$. On sait que $\lfloor 2^n x\rfloor\leqslant 2^n x<\lfloor 2^n x\rfloor+1$ et comme $2^n>0$, il vient

$$\pi_n(x)=\frac{\lfloor 2^n x\rfloor}{2^n}\leqslant\frac{2^n x}{2^n}=x<\frac{\lfloor 2^n x\rfloor+1}{2^n}=\pi_n(x)+\frac{1}{2^n}.$$

14. Soit $(x,k)\in[0,1[\times\mathbb{N}$. On a par télescopage

$$\sum_{j=1}^k\frac{d_j(x)}{2^j}=\sum_{j=1}^k\frac{2^j(\pi_j(x)-\pi_{j-1}(x))}{2^j}=\pi_k(x)-\pi_0(x)$$

et $\pi_0(x)=\lfloor x\rfloor=0$ puisque $x\in[0,1[$, d'où le résultat voulu.

15. Pour tout $j\in\mathbb{N}^*$ et tout $x\in\mathbb{R}$, on a

$$d_j(x)=\left\lfloor 2^j x\right\rfloor-2\left\lfloor 2^{j-1}x\right\rfloor=\lfloor 2a\rfloor-2\lfloor a\rfloor$$

en notant $a=2^{j-1}x$. On a $\lfloor a\rfloor\leqslant a<\lfloor a\rfloor+1$ et donc $2\lfloor a\rfloor\leqslant 2a<2\lfloor a\rfloor+2$. $\lfloor 2a\rfloor$ est donc égal, soit à $2\lfloor a\rfloor$ si $2a\in[2\lfloor a\rfloor,2\lfloor a\rfloor+1[$, soit à $2\lfloor a\rfloor+1$ si $2a\in[2\lfloor a\rfloor+1,2\lfloor a\rfloor+2[$. Dans tous les cas, on a bien $d_j(x)=\lfloor 2a\rfloor-2\lfloor a\rfloor\in\{0,1\}$.

16. Par définition même de A_n et D_n, $\theta : x\mapsto 2^n x$ est une application de D_n dans A_n, bijective de bijection réciproque $y\mapsto\dfrac{y}{2^n}$. Comme $A_n=[\![0,2^n-1]\!]$ d'après ce qui précède, θ est bien une bijection de D_n sur $[\![0,2^n-1]\!]$, comme voulu.

17. Ψ_n est surjective par définition de D_n, et D_n est en bijection avec A_n, qui est de cardinal 2^n. Ψ_n est donc une bijection de $[\![0,2^n-1]\!]$ sur D_n puisque ces ensembles sont finis de même cardinal.

18. Soit $x\in D_n$, il existe $(x_1,\dots,x_n)\in\{0,1\}^n$ tel que $x=\displaystyle\sum_{j=1}^n\frac{x_j}{2^j}$. Alors $2^k x=\displaystyle\sum_{j=1}^n 2^{k-j}x_j$. Si $k\geqslant n$, il s'agit d'un entier et donc $\pi_k(x)=x=\displaystyle\sum_{j=1}^n 2^{k-j}x_j$. Si $k<n$, alors

$$2^k x=\sum_{j=1}^k 2^{k-j}x_j+\sum_{j=k+1}^n 2^{k-j}x_j.$$

Or, $0 \leqslant \sum_{j=k+1}^{n} 2^{k-j} x_j \leqslant \sum_{j=k+1}^{n} 2^{k-j} = \frac{1}{2} \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}}{1-\frac{1}{2}} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} < 1$ et $\sum_{j=1}^{k} 2^{k-j} x_j \in \mathbb{N}$. Il vient $\lfloor 2^k x \rfloor = \sum_{j=1}^{k} 2^{k-j} x_j$, puis $\pi_k(x) = \sum_{j=1}^{k} 2^{k-j} x_j$. On a bien

$$\pi_k(x) = \sum_{j=1}^{\min(n,k)} 2^{k-j} x_j$$

dans tous les cas.

III. **19.** Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, U_k est à valeurs dans $\{0,1\}$, donc Y_n est à valeurs dans D_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et comme $D_n \subset [0,1[$,

$P(Y_n \in [0,1[) = 1$.

20. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in D_n^2$ tel que $x = \sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{2^j}$ avec $(x_1, \ldots, x_n) \in \{0,1\}^n$. On a $\{Y_n \leqslant x\} = \{2^n Y_n \leqslant 2^n x\}$. $2^n Y_n$ est à valeurs dans $\mathbb{N}$ et $2^n x \in \mathbb{N}$, si bien que

$$\{Y_n \leqslant x\} = \bigcup_{\substack{0 \leqslant k \leqslant 2^n x \\ \text{disjointe}}} \{2^n Y = k\}.$$

Or, pour tout $k \in [\![0, 2^n x]\!]$, par bijectivité de Φ_n^{-1}

$$\{2^n Y = k\} = \left\{\Phi_n^{-1}(2^n Y) = \Phi_n^{-1}(k)\right\} = \bigcap_{1 \leqslant j \leqslant n} \left\{U_j = \left(\Phi_n^{-1}(k)\right)_j\right\}.$$

On a $P\left(U_j = \left(\Phi_n^{-1}(k)\right)_j\right) = \frac{1}{2}$ pour tout $(j,k) \in [\![1,n]\!] \times [\![0, 2^n x]\!]$, puis $P(2^n Y = k) = \frac{1}{2^n}$. par indépendance de la famille $(U_1, \ldots, U_n)$. On en conclut que

$$F_n(x) = P(Y_n \leqslant x) = \sum_{k=0}^{2^n x} \frac{1}{2^n} = \frac{2^n x + 1}{2^n} = x + \frac{1}{2^n}.$$

21. Pour $x \in D_n$, on a comme ci-dessus $\{Y_n < x\} = \bigcup_{\substack{0 \leqslant k \leqslant 2^n x - 1 \\ \text{disjointe}}} \{2^n Y = k\}$ puis $G_n(x) = x$ par un raisonnement identique.

22. Pour tout $x \in D_n$, on a $\{Y_n = x\} = \{Y_n \leqslant x\} \setminus \{Y_n < x\}$, et comme le second événement est inclus dans le premier, il vient $P(Y_n = x) = F_n(x) - G_n(x) = \frac{1}{2^n} = \frac{1}{\mathrm{Card}(D_n)}$, donc $Y_n \sim \mathscr{U}(D_n)$.

23. On considère le n-uplet aléatoire $V = (V_1, \ldots, V_n) = \Psi_n^{-1}(X_n)$, à valeurs dans $\{0,1\}^n$. Pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in \{0,1\}^n$, on note $x = \Psi_n(x_1, \ldots, x_n)$. Ψ_n étant bijective, il vient

$$P\Big((V_1, \ldots, V_n) = (x_1, \ldots, x_n)\Big) = P\Big(\Psi_n(V_1, \ldots, V_n) = \Psi_n(x_1, \ldots, x_n)\Big) = P(X_n = x) = \frac{1}{2^n}.$$

Le n-uplet $(V_1, \ldots, V_n)$ suit donc la loi uniforme sur $\{0,1\}^n$. Pour tout $I \subset [\![1,n]\!]$ et tout $(x_i)_{i \in I} \in \{0,1\}^I$, on a par calcul de loi marginale en notant $J = [\![1,n]\!] \setminus I$

$$P\left(\bigcap_{i \in I} \{V_i = x_i\}\right) = \sum_{(x_j)_{j \in J} \in \{0,1\}^J} P\left(\left(\bigcap_{i \in I} \{V_i = x_i\}\right) \cap \left(\bigcap_{j \in J} \{V_j = x_j\}\right)\right) = \sum_{(x_j)_{j \in J} \in \{0,1\}^J} \frac{1}{2^n} = \frac{2^{\mathrm{Card}(J)}}{2^n} = \frac{1}{2^{\mathrm{Card}\, I}}.$$

En particulier, on obtient que $V_k \sim \mathscr{B}\left(\frac{1}{2}\right)$ pour tout $k \in [\![1,n]\!]$ en prenant $I = \{k\}$, puis

$$P\left(\bigcap_{i \in I} \{V_i = x_i\}\right) = \prod_{i \in I} P(V_i = x_i)$$

d'où les $(V_1, \ldots, V_n)$ sont indépendantes, et on a bien $X_n = \Psi_n(V_1, \ldots, V_n)$ comme voulu. *Plus généralement, un n-uplet aléatoire de loi uniforme sur un produit d'ensembles finis $E_1 \times \ldots \times E_n$ est constitué de variables aléatoires uniformes indépendantes. Ce fait assez évident intuitivement peut-il être affirmé tel quel ? Je ne sais pas !*

IV. **24.** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $Y_{n+1} = Y_n + \frac{U_{n+1}}{2^{n+1}} \geqslant Y_n$ et donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\{Y_{n+1} \leqslant x\} \subset \{Y_n \leqslant x\}$, ce qui impose $F_{n+1}(x) \leqslant F_n(x)$. Le

même raisonnement tient pour G_n et donc $(F_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(G_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont décroissantes.

25. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(F_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante et positive (c'est une suite de probabilités) donc convergente. Il en va de même de $(G_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$, et les suites $(F_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(G_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont simplement convergentes sur $\mathbb{R}$.

26. Pour tout $x \in D$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $x \in D_{n_0}$. On sait alors que $x \in D_n$ pour tout $n \geqslant n_0$. Il vient $F_n(x) = x + \frac{1}{2^n}$ avec 20 pour tout $n \geqslant n_0$ et donc $F_n(x) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} x$. De plus, $F_n(1) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et donc $F_n(1) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1$. On a le même résultat pour G_n.

27. Soit $x \in [0,1[$, on sait alors que $\pi_n(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{d_j(x)}{2^j}$. Montrons que $y \in D_n$ vérifie $y \leqslant x$ si et seulement si $y \leqslant \pi_n(x)$.

• Si $y \leqslant \pi_n(x)$, alors $y \leqslant x$ par 13.

• Supposons $y > \pi_n(x)$. Notant $(y_1, \ldots, y_n) = \Psi_n^{-1}(y)$, on a, comme vu en 20, l'existence de $r \in [\![1,n]\!]$ tel que $y_k = d_k(x)$ pour tout $k \in [\![1,r-1]\!]$, $y_r = 1$ et $d_r(x) = 0$. On a déjà vu aussi à cette occasion que $\left|\sum_{j=r+1}^{n} \frac{y_j - d_j(x)_j}{2^j}\right| \leqslant \frac{1}{2^r} - \frac{1}{2^n}$ de sorte que

$$y - \pi_n(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{y - d_j(x)}{2^j} = \frac{1}{2^r} + \sum_{j=r+1}^{n} \frac{y_j - d_j(x)_j}{2^j} \geqslant \frac{1}{2^r} + \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^r} = \frac{1}{2^n}$$

et donc $y \geqslant \pi_n(x) + \frac{1}{2^n} > x$ encore par 13. On a ainsi prouvé que $\{Y_n \leqslant x\} = \{Y_n \leqslant \pi_n(x)\}$ et donc $F_n(x) = \pi_n(x) + \frac{1}{2^n}$ avec 20. L'encadrement

$$x - \frac{1}{2^n} < \pi_n(x) \leqslant x$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ montre que $\pi_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$. On a donc bien $F_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$. Le même résultat est valide pour G_n. Le cas $x = 1$ a déjà été traité.

28. Soit un intervalle non vide $I \subset [0,1]$, on note $a = \inf I$ et $b = \sup I$. Si $(a,b) \in I^2$, autrement dit si $I = [a,b]$, alors

$$P(Y_n \in I) = P(\{Y_n \leqslant b\} \setminus \{Y_n < a\}) = P(Y_n \leqslant b) - P(Y_n < a) = F_n(b) - G_n(a) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} b - a.$$

Le même raisonnement s'applique avec des modifications évidentes à tous les autres types d'intervalles et fournit le résultat général voulu.

29. On a prouvé ci-dessus que $P(Y_n \in I) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sup I - \inf I = \int_0^1 \mathbb{1}_I$ pour tout sous-intervalle I de $[0,1]$. Soit f une fonction en escalier sur $[0,1]$ à valeurs réelles : il existe $k \in \mathbb{N}^*$ et une subdivision $a_0 = 0 < a_1 < \ldots < a_k = 1$ de $[0,1]$ et des constantes $(c_1, \ldots, c_k) \in \mathbb{R}^k$ telles que la restriction de f à $I_k =]a_{i-1}, a_i[$ soit constante de valeur c_i pour tout $i \in [\![1,k]\!]$. On note encore $J_j = \{a_j\}$ pour tout $j \in [\![0,k]\!]$, qui est aussi un intervalle (de longueur nulle, mais le raisonnement de la question précédente ne s'embarrasse pas de ça). Il en découle que

$$f = \sum_{i=1}^{k} c_i \mathbb{1}_{I_i} + \sum_{j=0}^{k} f(a_j) \mathbb{1}_{J_j}.$$

Pour tout $i \in [\![1,k]\!]$, $P(Y_n \in I_i) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a_i - a_{i-1}$ et pour tout $j \in [\![0,k]\!]$, $P(Y_n \in J_j) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a_j - a_j = 0$. Par linéarité de l'espérance puis combinaison de limites

$$E(f(Y_n)) = \sum_{i=1}^{k} c_i E(\mathbb{1}_{I_i}) + \sum_{j=0}^{k} f(a_j) E(\mathbb{1}_{J_j}) = \sum_{i=1}^{k} c_i P(Y_n \in I_i) + \sum_{j=0}^{k} f(a_j) P(Y_n \in J_j) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sum_{i=1}^{k} c_i (a_i - a_{i-1}) = \int_0^1 f.$$

Soit maintenant $f \in C([0,1],\mathbb{R})$ quelconque. On sait alors (cours) que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction en escalier g sur $[0,1]$ telle que $\|f - g\|_\infty \leqslant \varepsilon$. On a alors par les diverses inégalités triangulaires

$$\begin{aligned}
\left|E(f(Y_n)) - \int_0^1 f\right| &\leqslant \left|E(f(Y_n)) - E(g(Y_n))\right| + \left|E(g(Y_n)) - \int_0^1 g\right| + \left|\int_0^1 g - \int_0^1 f\right| \\
&\leqslant E(|(f-g)(Y_n)|) + \left|E(g(Y_n)) - \int_0^1 g\right| + \int_0^1 |g - f| \\
&\leqslant E(\|f-g\|_\infty) + \left|E(g(Y_n)) - \int_0^1 g\right| + \int_0^1 \|g - f\|_\infty \\
&\leqslant 2\varepsilon + \left|E(g(Y_n)) - \int_0^1 g\right|.
\end{aligned}$$

La preuve précédente, effectuée pour les fonctions en escalier, montre qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\left|E(g(Y_n)) - \int_0^1 g\right| \leqslant \varepsilon$ pour tout $n \geqslant n_0$. Pour un tel n, on a $\left|E(f(Y_n)) - \int_0^1 f\right| \leqslant 3\varepsilon$ et on a ainsi démontré que $E(f(Y_n)) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 f$.

Remarque. On peut faire bien plus simple... Soit $f \in C([0,1],\mathbb{R})$. On a par la formule de transfert

$$E(f(Y_n)) = \sum_{y \in D_n} f(y) P(Y_n = x) = \frac{1}{2^n} \sum_{y \in D_n} f(y).$$

Or, $D_n = \{2^{-n}k, k \in A_n\} = \{2^{-n}k, k \in [\![0, 2^n - 1]\!]\} = \left\{\frac{k}{2^n}, k \in [\![0, 2^n - 1]\!]\right\}$ si bien que

$$E(f(Y_n)) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n - 1} f\left(\frac{k}{2^n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 f$$

en reconnaissant une extraction d'une suite de sommes de Riemann associées à l'application continue f sur $[0,1]$. *Le raisonnement attendu dans le problème est sans doute le premier, du fait du « en déduire ». Il s'agit d'un raisonnement probabiliste typique de ce qu'on appelle la convergence en loi d'une suite de variables aléatoires : on a ici prouvé que la suite* $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *converge en loi vers une variable aléatoire de loi uniforme sur* $[0,1]$ *(notion hors programme : ce n'est pas une loi discrète).*

30. Pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, on pose $\varepsilon_k = 2U_k-1$, qui suit la loi uniforme sur $\{-1,1\}$ de la partie I, puis pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $X_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{\varepsilon_k}{2^k}$. On a donc

$$X_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{2U_k-1}{2^k} = 2\sum_{k=1}^{n}\frac{U_k}{2^k} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k} = 2Y_n - 1 + \frac{1}{2^n}$$

et pour tout $t\in\mathbb{R}$

$$E(\cos(tX_n)) = E\left(\cos\left(t(2Y_n-1)+\frac{t}{2^n}\right)\right) = \cos\left(\frac{t}{2^n}\right)E(\cos(t(2Y_n-1))) - \sin\left(\frac{t}{2^n}\right)E(\sin(t(2Y_n-1))).$$

Les applications $x\mapsto\cos(t(2x-1))$ et $x\mapsto\sin(t(2x-1))$ sont continues sur $[0,1]$, si bien que pour $t\neq 0$

$$E(\cos(t(2Y_n-1))) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 \cos(t(2x-1))\mathrm{d}x = \left[\frac{\sin(t(2x-1))}{2t}\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{\sin(t)}{2t} - \frac{\sin(-t)}{2t} = \operatorname{sinc}(t)$$

et $E(\sin(t(2Y_n-1)))$ possède aussi une limite finie qui nous importe peu puisque ce terme est en facteur de $\sin\left(\frac{t}{2^n}\right)$ qui tend vers 0. On a bien

$$E(\cos(tX_n)) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \operatorname{sinc} t$$

pour tout $t\in\mathbb{R}$, le cas $t=0$ étant toujours évident.

31. On pose $g(t) = \frac{t-1}{\ln t}$ pour $t\in]0,1[$, prolongée par continuité sur $[0,1]$ par $g(0)=0$ (limite évidente) et $g(1)=1$ avec l'équivalent usuel $\ln t \underset{t\to1}{\sim} t-1$. Pour $t\in]0,1[$, $f: x\mapsto t^x = \mathrm{e}^{x\ln t}$ est continue sur $[0,1]$ et avec ce qui précède

$$E(t^{Y_n}) = E(f(Y_n)) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 \mathrm{e}^{x\ln t}\mathrm{d}x = \frac{t-1}{\ln t} = g(t).$$

Par ailleurs, avec la formule de transfert

$$t\mapsto E(t^{Y_n}) = \sum_{k=0}^{2^n-1} t^{2^{-n}k}P(Y_n = 2^{-n}k) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{2^n-1} t^{2^{-n}k}$$

est une fonction continue sur $[0,1]$, et pour tout $t\in[0,1]$

$$|E(t^{Y_n})| = E(t^{Y_n}) \leqslant E(1) = 1$$

et $t\mapsto 1$ est continue et intégrable sur $[0,1]$. D'après le théorème de convergence dominée

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 E(t^{Y_n})\mathrm{d}t = \int_0^1 g(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{t-1}{\ln t}\mathrm{d}t$$

(qui, notons-le, montre au passage l'existence de cette dernière intégrale qui est en fait celle d'une fonction continue sur un segment). Enfin, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$

$$\int_0^1 E(t^{Y_n})\mathrm{d}t = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{2^n-1}\int_0^1 t^{2^{-n}k}\mathrm{d}t = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{2^n-1}\frac{1}{1+\frac{k}{2^n}}$$

et en reconnaissant une nouvelle somme de Riemann associée à $h: t\mapsto \frac{1}{1+t}$ continue sur $[0,1]$, on trouve cette fois

$$\int_0^1 E(t^{Y_n})\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t} = \ln 2.$$

Par unicité de la limite, $\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t}\mathrm{d}t = \ln 2$.

V. 32. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, D_n est fini, de sorte que D est dénombrable comme réunion dénombrable d'ensembles au plus dénombrables.

33. Supposons l'existence d'une bijection $f:\mathbb{N}\to\mathscr{P}(\mathbb{N})$. $A = \{x\in\mathbb{N}, x\notin f(x)\}$ est une partie de $\mathbb{N}$, et on peut donc considérer $n = f^{-1}(A)$, d'où $f(n) = A$. Si $n\in A$, alors $n\notin f(n) = A$ par définition de A, et si $n\notin A$, alors $n\notin f(A)$ et donc $n\in A$. Dans les deux cas, on aboutit à une absurdité, et une telle bijection f ne saurait exister. On a donc démontré que $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ n'est pas dénomrable.

34. Soit $u \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, on définit alors $A = \Xi(u) = \{n \in \mathbb{N}, u_n = 1\}$. A est une partie de $\mathbb{N}$ et Ξ une application de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ dans $\mathscr{P}(\mathbb{N})$. Pour tout $u \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, on a de plus $u_n = 1$ si et seulement $n \in \Xi(u)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, autrement dit $u = \mathbb{1}_{\Xi(u)} = (\Phi \circ \Xi)(u)$. Réciproquement, pour tout $A \in \mathscr{P}(\mathbb{N})$, si $u = \Phi(A)$, alors

$$\Xi(\Phi(A)) = \{n \in \mathbb{N}, \Phi(A)_n = 1\} = \{n \in \mathbb{N}, \mathbb{1}_A(n) = 1\} = A$$

et donc $(\Xi \circ \Phi)(A) = A$. Finalement, Φ est bijective, de bijection réciproque Ξ.

35. Pour tout $u = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, on a $\dfrac{x_n}{2^{n+1}} \geqslant 0$ ce qui permet d'écrire dans $[0,+\infty]$

$$0 \leqslant \Psi(u) \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = 1 < \infty$$

ce qui montre du même coup que $\sum \dfrac{x_n}{2^{n+1}}$ converge, si bien que $\Psi(u)$ est correctement définie, et qu'elle est à valeurs dans $[0,1]$.

Pour tout $x \in [0,1[$, on pose $x_n = d_{n+1}(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et $u = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ avec 13 et 14

$$\pi_n(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{d_j(x)}{2^j} = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{x_j}{2^{j+1}} \leqslant x \leqslant \sum_{j=0}^{n-1} \frac{x_j}{2^{j+1}} + \frac{1}{2^n}$$

donc

$$x - \frac{1}{2^n} = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{x_j}{2^{j+1}} \leqslant x$$

si bien que par encadrement, $\Psi(u) = \lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{j=0}^{n-1} \dfrac{x_j}{2^{j+1}} = x$ et Ψ est surjective. Elle n'est cependant pas injective : on considère par exemple la suite u définie par $u_0 = 0$ et $u_n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et la suite v définie par $v_0 = 1$ et $v_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On a alors $\Psi(v) = \dfrac{1}{2}$ de façon immédiate et

$$\Psi(u) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{4} \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

de sorte que $\Psi(u) = \Psi(v)$ avec $u \neq v$.

36. Soit $(u,v) \in (\{0,1\}^{\mathbb{N}})^2$, $u = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Supposons que $u \neq v$ et $x = \Psi(u) = \Psi(v) = y$. On note $r = \min\{n \in \mathbb{N}, u_n \neq v_n\}$, et on suppose par exemple (par symétrie des rôles) que $u_r = 0$ et $v_r = 1$. On a alors

$$0 = y - x = \frac{1}{2^{r+1}} + \sum_{n=r+1}^{+\infty} \frac{y_n - x_n}{2^{n+1}}$$

et donc $\sum\limits_{n=r+1}^{+\infty} \dfrac{x_n - y_n}{2^{n+1}} = \dfrac{1}{2^{r+1}}$. Or, $x_n - y_n \leqslant 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ d'où

$$\sum_{n=r+1}^{+\infty} \frac{x_n - y_n}{2^{n+1}} \leqslant \sum_{n=r+1}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^{r+1}}$$

si bien que toutes ces inégalités sont des égalités, autrement dit $x_n - y_n = 1$ pour tout $n \geqslant r+1$. Ceci impose que $x_n = 1$ et $y_n = 0$ pour tout $n \geqslant r+1$, et donc que x est stationnaire à 1 et y est stationnaire à 0 à partir du rang $r+1$. Ceci implique au passage que $x = y = \sum\limits_{n=0}^{r} \dfrac{y_n}{2^{n+1}} \in D_{r+1}$ et $x \geqslant \dfrac{1}{2^{r+1}}$ donc $x \neq 0$. On a ainsi montré qu'un élément $x \in [0,1[$ possède au plus deux antécédents par Ψ, et que x en possède exactement deux si et seulement si $x \in D^*$.

Ceci montre également que Λ est correctement définie : si u n'est pas stationnaire, alors $\Psi(u) \notin D$, et si u est stationnaire, alors $\Psi(u) \in D$. *On peut d'ailleurs remarquer que dans le cas stationnaire à* 1*, l'énoncé pourrait préciser « si* $\Psi((x_n)) \in D^* \cup \{1\}$*... » plutôt que « si* $\Psi((x_n)) \in D \cup \{1\}$*... » sans que cela n'ait de réelle conséquence sur la bonne définition de* Λ*, sinon un peu de confusion assez mal venue dans une question déjà bien délicate.*

• Si $x \in]0,1[\setminus D^*$, alors $x \notin D^*$. On sait alors que $x = \Psi(u)$ avec $u \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ non stationnaire et donc $x = \Psi(u) = \Lambda(u)$. La non stationnarité de u implique que u est le seul antécédent de x par Ψ avec l'étude ci-dessus. La restriction de Λ aux suites non stationnaires est donc une bijection de cet ensemble sur $]0,1[\setminus D^*$. On étend cette bijection à $x = 0$ dont la suite nulle est clairement le seul antécédent.

• Si $x \in D^*$, alors x possède deux antécédents par Ψ, l'un stationnaire à 0 et l'autre stationnaire à 1 à partir d'un même rang $r+1$. Notons $u = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $u = (x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ces deux antécédents, le premier stationnaire à 1 et vérifiant $x_r = 0$, le second à stationnaire à 1 et vérifiant $x'_r = 1$. On a alors $\Lambda(u) = \dfrac{x}{2}$ et $\Lambda(v) = \dfrac{1+x}{2}$. Renversons le problème.

(i) Si $y \in D^*$ et $y < \dfrac{1}{2}$, alors $x = 2y \in D^*$ et il existe $u \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ tel que $y = \Lambda(u)$. Si $w \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ est telle que $y = \Lambda(w)$, alors w est nécessairement stationnaire (sinon, $y = \Lambda(w) \notin D^*$), puis nécessairement stationnaire à 1 (sinon $y = \Lambda(w) \geqslant \dfrac{1}{2}$ par définition de

Λ), donc $y = \dfrac{\Psi(w)}{2} = \dfrac{x}{2}$ d'où $\Psi(w) = x$. Comme x possède u pour unique antécédent stationnaire à 1 par Ψ, on a $w = u$, et u est l'unique antécédent de y par Λ.

(ii) Si $y \in D^*$ et $y \geqslant \dfrac{1}{2}$, alors $x = 2y - 1 \in D^*$ et il existe $v \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ tel que $y = \Lambda(v)$. Si $w \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ est telle que $y = \Lambda(w)$, un raisonnement similaire à celui ci-dessus montre que $w = v$ et v est l'unique antécédent de y par Λ.

Finalement, tout élément de $[0,1[$ possède bien un unique antécédent par Λ dans $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, et Λ est bien bijective.

37. On a prouvé que $[0,1[$ était en bijection avec $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ (36), que $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ était en bijection avec $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ (34) et enfin que $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ n'était pas dénombrable (33), d'où la conclusion.