Corrigé de l'épreuve Mathématiques, Mines-Ponts I, 2025, filières MP-MPI.
Version provisoire du 26/04/2025

Laurent Bonavero - Lycée Champollion (Grenoble)

Avertissements : *ceci n'est pas LE corrigé mais UN corrigé.*
Il y a dans tous mes corrigés des erreurs potentielles ou des choses qui ne sembleront pas claires...me contacter le cas échéant !

Inégalités de Khintchine

Inégalités de Hölder.

(1) Si x ou y est nul, l'inégalité demandée est évidente. Sinon, posons $\alpha = x^p$ et $\beta = y^q$. La fonction ln étant concave, comme $1/p + 1/q = 1$, on a
$$\ln\left(\frac{1}{p}\alpha + \frac{1}{q}\beta\right) \geq \frac{1}{p}\ln(\alpha) + \frac{1}{q}\ln(\beta) = \ln(x) + \ln(y) = \ln(xy).$$
Par croissance de l'exponentielle, il vient
$$\boxed{xy \leq \frac{1}{p}\alpha + \frac{1}{q}\beta = \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q}.$$

(2) Supposons $\mathbb{E}(X^p) = \mathbb{E}(Y^q) = 1$. D'après (1), on a
$$XY \leq \frac{1}{p}X^p + \frac{1}{q}Y^q$$
et par croissance de l'espérance,
$$\boxed{\mathbb{E}(XY) \leq \frac{1}{p}\mathbb{E}(X^p) = 1}.$$
Si $\mathbb{E}(X^p) = 0$ ou $\mathbb{E}(Y^q) = 0$, l'inégalité est évidente. Sinon, on pose
$$\tilde{X} = \frac{1}{(\mathbb{E}(X^p))^{1/p}}X \text{ et } \tilde{Y} = \frac{1}{(\mathbb{E}(Y^q))^{1/q}}Y.$$
On a alors $\mathbb{E}((\tilde{X})^p) = \mathbb{E}((\tilde{Y})^q) = 1$ et en appliquant le résultat précédent, il vient
$$\frac{\mathbb{E}(XY)}{(\mathbb{E}(X^p))^{1/p}\,(\mathbb{E}(Y^q))^{1/q}} = \mathbb{E}(\tilde{X}\tilde{Y}) \leq 1$$
et donc
$$\boxed{\mathbb{E}(XY) \leq (\mathbb{E}(X^p))^{1/p}\,(\mathbb{E}(Y^q))^{1/q}}.$$

(3) Pour $p = q = 2$, on obtient l'inégalité de Cauchy-Schwarz
$$\boxed{\mathbb{E}(XY) \leq \sqrt{\mathbb{E}(X^2)}\sqrt{\mathbb{E}(Y^2)}},$$
que l'on démontre en montrant que
$$\lambda \mapsto P(\lambda) = \mathbb{E}\big((X + \lambda Y)^2\big)$$
est une fonction polynomiale de degré ($\leq$ à) 2, à valeurs positives sur $\mathbb{R}$ et donc de discriminant ≤ 0.

Une inégalité de déviation

(4) On a pour tout $t \in \mathbb{R}$,
$$\boxed{\operatorname{ch}(t) = \sum_{n\geq 0} \frac{t^{2n}}{(2n)!} \leq \sum_{n\geq 0} \frac{t^{2n}}{2^n\, n!} = e^{t^2/2}}$$
où l'on a utilisé les inégalités (évidentes) :
$$\forall n \geq 0,\ 2^n\, n! \leq (2n)!.$$

(5) On a par indépendance/coalition, théorème de transfert et (4) :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\exp\left(t\sum_{i=1}^n c_iX_i\right)\right) &= \mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^n e^{tc_iX_i}\right)\\
&= \prod_{i=1}^n \mathbb{E}\left(e^{tc_iX_i}\right)\\
&= \prod_{i=1}^n \frac{e^{tc_i}+e^{-tc_i}}{2}\\
&= \prod_{i=1}^n \mathrm{ch}(tc_i)\\
&\leq \prod_{i=1}^n e^{t^2c_i^2/2}\\
&= \boxed{\exp\left(\frac{t^2}{2}\sum_{i=1}^n c_i^2\right)}.
\end{aligned}$$

(6) On a

$$\left(\exp\left(x\left|\sum_{i=1}^n c_iX_i\right|\right) > e^{tx}\right) = \left(\exp\left(x\sum_{i=1}^n c_iX_i\right) > e^{tx}\right)\bigcup\left(\exp\left(-x\sum_{i=1}^n c_iX_i\right) > e^{tx}\right).$$

Ces deux événements étant disjoints, on en déduit à l'aide de l'inégalité de Markov et de (5) :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\exp\left(x\left|\sum_{i=1}^n c_iX_i\right|\right) > e^{tx}\right) &= \mathbb{P}\left(\exp\left(x\sum_{i=1}^n c_iX_i\right) > e^{tx}\right) + \mathbb{P}\left(\exp\left(-x\sum_{i=1}^n c_iX_i\right) > e^{tx}\right)\\
&\leq e^{-tx}\mathbb{E}\left(\exp\left(x\sum_{i=1}^n c_iX_i\right)\right) + e^{-tx}\mathbb{E}\left(\exp\left(x\sum_{i=1}^n (-c_i)X_i\right)\right)\\
&\leq e^{-tx}\exp\left(\frac{x^2}{2}\sum_{i=1}^n c_i^2\right) + e^{-tx}\exp\left(\frac{x^2}{2}\sum_{i=1}^n (-c_i)^2\right)\\
&= \boxed{2e^{-tx}\exp\left(\frac{x^2}{2}\sum_{i=1}^n c_i^2\right)}.
\end{aligned}$$

(7) Par stricte croissance de l'exponentielle, on a pour tout $x > 0$,

$$\mathbb{P}\left(\left|\sum_{i=1}^n c_iX_i\right| > t\right) = \mathbb{P}\left(\exp\left(x\left|\sum_{i=1}^n c_iX_i\right|\right) > e^{tx}\right) \leq 2e^{-tx}\exp\left(\frac{x^2}{2}\sum_{i=1}^n c_i^2\right).$$

Pour $t = 0$, l'inégalité demandée est vraie. Pour $t > 0$, en appliquant ce qui précède pour

$$x = \frac{t}{\sum_{i=1}^n c_i^2},$$

il vient

$$\boxed{\mathbb{P}\left(\left|\sum_{i=1}^n c_iX_i\right| > t\right) \leq 2\exp\left(-\frac{t^2}{\sum_{i=1}^n c_i^2}\right)\exp\left(\frac{t^2}{2\sum_{i=1}^n c_i^2}\right) = 2\exp\left(-\frac{t^2}{2\sum_{i=1}^n c_i^2}\right)}.$$

Commentaires : l'inégalité (dite de concentration) obtenue en (7) est connue sous le nom d'inégalité de Hoeffding.

Inégalités de Khintchine

(8) La fonction F_X est une fonction en escaliers, nulle pour t assez grand. On en déduit que

$$t \mapsto t^{p-1} F_X(t)$$

est continue par morceaux sur $\mathbb{R}^+$, nulle pour t assez grand et donc intégrable sur $\mathbb{R}^+$.
Notons $X(\Omega) = \{x_0, \dots, x_N\}$ avec $0 \leq x_0 < x_1 < \cdots < x_N$. On a alors

$$\forall t \in [0, x_0[,\ F_X(t) = 1,$$

$$\forall i \in [\![0, N-1]\!],\ \forall t \in [x_i, x_{i+1}[\,, F_X(t) = \mathbb{P}(X > t) = \mathbb{P}(X > x_i) = \sum_{j=i+1}^{N} \mathbb{P}(X = x_j)$$

et

$$\forall t \geq x_N,\ F_X(t) = 0.$$

On a alors à l'aide de la relation de Chasles,

$$\begin{aligned}
p\int_0^{+\infty} t^{p-1} F_X(t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^{x_0} pt^{p-1}\,\mathrm{d}t + \sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N} \mathbb{P}(X = x_j) \int_{x_i}^{x_{i+1}} pt^{p-1}\,\mathrm{d}t \\
&= x_0^p + \sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N} \mathbb{P}(X = x_j)(x_{i+1}^p - x_i^p) \\
&= x_0^p + \sum_{j=1}^{N} \mathbb{P}(X = x_j) \sum_{i=0}^{j-1} (x_{i+1}^p - x_i^p) \\
&= x_0^p + \sum_{j=1}^{N} \mathbb{P}(X = x_j)(x_j^p - x_0^p) \\
&= x_0^p\big(1 - \sum_{j=1}^{N} \mathbb{P}(X = x_j)\big) + \sum_{j=1}^{N} \mathbb{P}(X = x_j) x_j^p \\
&= \mathbb{P}(X = x_0) x_0^p + \sum_{j=1}^{N} \mathbb{P}(X = x_j) x_j^p \\
&= \sum_{j=0}^{N} \mathbb{P}(X = x_j) x_j^p \\
&= \boxed{\mathbb{E}(X^p)}.
\end{aligned}$$

(9) La fonction $t \mapsto t^3 e^{-t^2/2}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ et $t^3 e^{-t^2/2} = o(1/t^2)$ en $+\infty$ par croissances comparées. Par comparaison à une intégrale de Riemann, la fonction $t \mapsto t^3 e^{-t^2/2}$ est donc intégrable sur $\mathbb{R}^+$.
En appliquant (8) avec $X = \left|\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right|$ et $p = 4$, on a

$$\mathbb{E}\left(\left(\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right)^4\right) = \mathbb{E}(X^4) = 4\int_0^{+\infty} t^3\, \mathbb{P}\left(\left|\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right| > t\right)\,\mathrm{d}t.$$

Or, d'après (7) et l'hypothèse $\sum_{i=1}^{n} c_i^2 = 1$, on a

$$\mathbb{P}\left(\left|\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right| > t\right) \leq 2\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right).$$

De là, par croissance de l'intégrale,

$$\boxed{\mathbb{E}\left(\left(\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right)^4\right) \leq 4 \times \int_0^{+\infty} t^3 \times 2e^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t = 8\int_0^{+\infty} t^3 e^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t}.$$

(10) Comme $\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right) = 0$, on a par indépendance des X_i :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\left(\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right)^2\right) &= \mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}(c_i X_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} c_i^2 \mathbb{V}(X_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} c_i^2 (\mathbb{E}(X_i^2) - 0) \\
&= \boxed{\sum_{i=1}^{n} c_i^2}.
\end{aligned}$$

(11) Sous l'hypothèse $\sum_{i=1}^{n} c_i^2 = 1$, on a comme en (9) :

$$\mathbb{E}\left(\left|\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right|^p\right) = p\int_0^{+\infty} t^{p-1}\,\mathbb{P}\left(\left|\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right| > t\right)\,\mathrm{d}t \leq p\int_0^{+\infty} t^{p-1} \times 2e^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t = 2p\int_0^{+\infty} t^{p-1} e^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t.$$

Si $\sum_{i=1}^{n} c_i^2 > 0$, on a

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{c_j}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} c_i^2}}\right)^2 = 1$$

et donc

$$\mathbb{E}\left(\left|\sum_{i=1}^{n} \frac{c_i}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n} c_j^2}} X_i\right|^p\right) \leq 2p\int_0^{+\infty} t^{p-1} e^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t$$

puis

$$\frac{1}{\left(\sum_{j=1}^{n} c_j^2\right)^{p/2}}\mathbb{E}\left(\left|\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right|^p\right) \leq 2p\int_0^{+\infty} t^{p-1} e^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t$$

et enfin en passant à la puissance $1/p$:

$$\boxed{\left[\mathbb{E}\left(\left|\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right|^p\right)\right]^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} c_i^2\right)^{1/2}\left(2p\int_0^{+\infty} t^{p-1} e^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t\right)^{1/p} = \beta_p\left[\mathbb{E}\left(\left(\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right)^2\right)\right]^{1/2}}$$

avec

$$\boxed{\beta_p = \left(2p\int_0^{+\infty} t^{p-1} e^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t\right)^{1/p}}.$$

La constante β_p est bien définie car la fonction $t \mapsto t^{p-1}e^{-t^2/2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ pour les mêmes raisons que dans le cas $p=4$. Par stricte positivité de l'intégrale, on a de plus $\boxed{\beta_p > 0}$ pour tout p.

(12) Posons

$$X = \left(\sum_{i=1}^n c_i X_i\right)^2 \quad \text{et } Y = 1$$

et appliquons l'inégalité de Hölder prouvée en (2) en remplaçant p par $p/2$ qui est bien ≥ 1. On obtient

$$\mathbb{E}\left(\left(\sum_{i=1}^n c_i X_i\right)^2 \times 1\right) \leq \left[\mathbb{E}\left(\left|\sum_{i=1}^n c_i X_i\right|^{2p/2}\right)\right]^{2/p} 1^{1-2/p}.$$

Par croissance de la fonction racine carrée, il vient

$$\boxed{\left[\mathbb{E}\left(\left(\sum_{i=1}^n c_i X_i\right)^2\right)\right]^{1/2} \leq \left[\mathbb{E}\left(\left|\sum_{i=1}^n c_i X_i\right|^p\right)\right]^{1/p}}.$$

(13) On a

$$\frac{1}{2} = \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{4} = \theta\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{4}\right) \Leftrightarrow \theta = \frac{1}{4/p-1}.$$

Or,

$$1 \leq p < 2 \Rightarrow 2 < 4/p \leq 4 \Rightarrow 1 < 4/p - 1 \leq 3 \Rightarrow 1 > \theta \geq 1/3 > 0$$

et on a donc bien $\boxed{\theta \in]0,1]}$.

(14) Soit θ comme en (13). On a

$$1 = \frac{2\theta}{p} + \frac{1-\theta}{2}.$$

En posant

$$X = \left|\sum_{i=1}^n c_i X_i\right|^{2\theta} \quad \text{et } Y = \left|\sum_{i=1}^n c_i X_i\right|^{2(1-\theta)}$$

et en appliquant l'inégalité de Hölder montrée en (2) avec $p/2\theta$ jouant le rôle de p, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\left(\sum_{i=1}^n c_i X_i\right)^2\right) &= \mathbb{E}(XY) \\
&\leq \left[\mathbb{E}\left(\left(\left|\sum_{i=1}^n c_i X_i\right|^{2\theta}\right)^{p/2\theta}\right)\right]^{2\theta/p} \left[\mathbb{E}\left(\left(\left|\sum_{i=1}^n c_i X_i\right|^{2(1-\theta)}\right)^{2/(1-\theta)}\right)\right]^{(1-\theta)/2} \\
&= \left[\mathbb{E}\left(\left|\sum_{i=1}^n c_i X_i\right|^p\right)\right]^{2\theta/p} \left[\mathbb{E}\left(\left|\sum_{i=1}^n c_i X_i\right|^4\right)\right]^{(1-\theta)/2}
\end{aligned}$$

(15) En utilisant (11) avec $p=4$, on a

$$\mathbb{E}\left(\left|\sum_{i=1}^n c_i X_i\right|^4\right) \leq \beta_4^4 \left[\mathbb{E}\left(\left(\sum_{i=1}^n c_i X_i\right)^2\right)\right]^2.$$

En injectant dans (14), il vient

$$\mathbb{E}\left(\left(\sum_{i=1}^n c_i X_i\right)^2\right) \leq \left[\mathbb{E}\left(\left|\sum_{i=1}^n c_i X_i\right|^p\right)\right]^{2\theta/p} \beta_4^{2(1-\theta)} \left[\mathbb{E}\left(\left(\sum_{i=1}^n c_i X_i\right)^2\right)\right]^{1-\theta}.$$

De là
$$\left[\mathbb{E}\left(\left(\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right)^2\right)\right]^{\theta} \leq \beta_4^{2(1-\theta)} \left[\mathbb{E}\left(\left|\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right|^p\right)\right]^{2\theta/p}$$
et enfin, comme $1-\theta > 0$,
$$\boxed{\left[\mathbb{E}\left(\left(\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right)^2\right)\right]^{1/2} \leq \beta_4^{(1-\theta)/\theta} \left[\mathbb{E}\left(\left|\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right|^p\right)\right]^{1/p}},$$
ce qui donne le résultat en posant $\boxed{\tilde{\alpha}_p = \dfrac{1}{\beta_4^{(1-\theta)/\theta}} > 0}$ (cette constante dépend bien de p car θ dépend de p).

(16) *Cette question semble être une répétition de la précédente, l'énoncé aurait pu préciser ici que $p \geq 1$.*

Pour $p \geq 2$, on a
$$\left[\mathbb{E}\left(\left(\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right)^2\right)\right]^{1/2} \leq \left[\mathbb{E}\left(\left|\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right|^p\right)\right]^{1/p}$$
et pour $p \in [1,2[$, on a
$$\tilde{\alpha}_p \left[\mathbb{E}\left(\left(\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right)^2\right)\right]^{1/2} \leq \left[\mathbb{E}\left(\left|\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right|^p\right)\right]^{1/p}.$$
En posant $\alpha_p = \min(1, \tilde{\alpha}_p)$, on a
$$\boxed{\forall p \geq 1,\ \alpha_p \left[\mathbb{E}\left(\left(\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right)^2\right)\right]^{1/2} \leq \left[\mathbb{E}\left(\left|\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right|^p\right)\right]^{1/p}}.$$

Une première conséquence

(17) Sans difficulté et laissé au lecteur.

(18) Comme u est nulle à partir d'un certain rang, $\psi(u)$ est une somme finie de variables aléatoires donc est une variable aléatoire :
$$\boxed{\forall u \in \mathbb{R}^{(\mathbb{N})},\ \psi(u) \in L^0(\Omega)}.$$
L'énoncé, *un peu imprécis ici dans l'expression trop vague "conserve le produit scalaire"*, demande de prouver que
$$\forall u, v \in \mathbb{R}^{(\mathbb{N})},\ \varphi\big(\psi(u), \psi(v)\big) = \langle u, v\rangle = \sum_{i=0}^{+\infty} u_i v_i.$$
Or, toutes les sommes écrites ci-dessous étant finies
$$\begin{aligned}
\varphi\big(\psi(u), \psi(v)\big) &= \mathbb{E}\big(\psi(u)\psi(v)\big) \\
&= \mathbb{E}\left(\sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} u_i X_i v_j X_j\right) \\
&= \sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} u_i v_j \mathbb{E}(X_i X_j).
\end{aligned}$$
Or,
$$\mathbb{E}(X_i X_j) = \mathbb{E}(X_i)\mathbb{E}(X_j) = 0 \text{ si } i \neq j$$

et
$$\mathbb{E}(X_i^2) = 1.$$
On en déduit que
$$\boxed{\varphi\big(\psi(u), \psi(v)\big) = \sum_{i=0}^{+\infty} u_i v_i = \langle u, v\rangle}.$$

(19) Il s'agit de montrer qu'il existe des constantes $\alpha_{p,q} > 0$ et $\beta_{p,q} > 0$ telles que
$$\forall u \in \mathbb{R}^{(\mathbb{N})},\ \alpha_{p,q}\left[\mathbb{E}(|\psi(u)|^p)\right]^{1/p} \leq \left[\mathbb{E}(|\psi(u)|^q)\right]^{1/q} \leq \beta_{p,q}\left[\mathbb{E}(|\psi(u)|^p)\right]^{1/p},$$
ou encore
$$\forall u \in \mathbb{R}^{(\mathbb{N})},\ \alpha_{p,q}\left[\mathbb{E}\left(\left|\sum_{i=0}^{+\infty} u_i X_i\right|^p\right)\right]^{1/p} \leq \left[\mathbb{E}\left(\left|\sum_{i=0}^{+\infty} u_i X_i\right|^q\right)\right]^{1/q} \leq \beta_{p,q}\left[\mathbb{E}\left(\left|\sum_{i=0}^{+\infty} u_i X_i\right|^p\right)\right]^{1/p}.$$
Ceci découle découle de (12) et (16) en remarquant que les constantes α_p déterminées en (16) ne dépendent pas de n et qu'à u fixé, les sommes ci-dessus ne font intervenir qu'un nombre fini de termes.
Les questions (12) et (16) montrent en effet que $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_p$ sont équivalentes pour tout $p \geq 1$ sur $R = \psi\left(\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}\right)$.
Par transitivité de l'équivalence de normes, on en déduit que $\boxed{\|\cdot\|_p \text{ et } \|\cdot\|_q \text{ sont équivalentes}}$ pour tout $p, q \geq 1$ sur $R = \psi\left(\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}\right)$.

Une deuxième conséquence

(20) Soit $X_1, \ldots, X_k$ une famille de k variables aléatoires indépendantes suivant toutes une loi de Rademacher. Par définition de l'espérance, on a
$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\left|\sum_{i=1}^{k} a_i X_i\right|\right) &= \sum_{(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_k)\in\{-1,1\}^k} \left|\sum_{i=1}^{k} a_i \varepsilon_i\right| \mathbb{P}(X_1 = \varepsilon_1, \ldots, X_k = \varepsilon_k) \\
&= \frac{1}{2^k} \sum_{(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_k)\in\{-1,1\}^k} \left|\sum_{i=1}^{k} a_i \varepsilon_i\right| \\
&= \frac{1}{n} \sum_{(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_k)\in\{-1,1\}^k} \left|\sum_{i=1}^{k} a_i \varepsilon_i\right|.
\end{aligned}$$
Or, d'après (10) et (11) pour $p = 1$,
$$\mathbb{E}\left(\left|\sum_{i=1}^{k} a_i X_i\right|\right) \leq \beta_1 \sqrt{\sum_{i=1}^{k} a_i^2} = \beta_1 \|(a_1, \ldots, a_k)\|_2^{\mathbb{R}^k}$$
et d'après (10) et (16) pour $p = 1$,
$$\alpha_1 \|(a_1, \ldots, a_k)\|_2^{\mathbb{R}^k} = \alpha_1 \sqrt{\sum_{i=1}^{k} a_i^2} \leq \mathbb{E}\left(\left|\sum_{i=1}^{k} a_i X_i\right|\right).$$
Tout ceci montre que
$$\boxed{\alpha_1 n \|(a_1, \ldots, a_k)\|_2^{\mathbb{R}^k} \leq \sum_{(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_k)\in\{-1,1\}^k} \left|\sum_{i=1}^{k} a_i \varepsilon_i\right| \leq \beta_1 n \|(a_1, \ldots, a_k)\|_2^{\mathbb{R}^k}}.$$

(21) Considérons l'application $T : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^{2^k} = \mathbb{R}^n$ définie par l'énoncé. Cette application est clairement linéaire et d'après l'inégalité de gauche obtenue en (20),

$$T(a_1, \dots, a_k) = 0 \Rightarrow (a_1, \dots, a_k) = 0_{\mathbb{R}^k}.$$

L'application T est donc $\boxed{\text{injective}}$.
Notons $F = \mathrm{Im}(T)$. Ce sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ est de dimension k.
Soit $x = (x_1, \dots, x_n) = T(a_1, \dots, a_k) \in F$. On a d'une part

$$\sum_{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k) \in \{-1,1\}^k} \left| \sum_{i=1}^k a_i \varepsilon_i \right| = \sum_{i=1}^n |x_i| = \|x\|_1^{\mathbb{R}^n}.$$

D'autre part, avec les notations introduites en (20), on a d'après (10) à nouveau :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n x_i^2 &= \sum_{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k) \in \{-1,1\}^k} \left| \sum_{i=1}^k a_i \varepsilon_i \right| \\ &= n \times \mathbb{E}\left(\left| \sum_{i=1}^k a_i X_i \right|^2 \right) \\ &= n \sum_{i=1}^k a_i^2. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\|(a_1, \dots, a_k)\|_2^{\mathbb{R}^k} = \frac{1}{\sqrt{n}} \|x\|_2^{\mathbb{R}^n}.$$

En injectant ces informations dans la double inégalité obtenue en (20), on obtient

$$\boxed{\forall x \in F = T\big(\mathbb{R}^k\big),\ \alpha_1 \sqrt{n} \|x\|_2^{\mathbb{R}^n} \leq \|x\|_1^{\mathbb{R}^n} \leq \beta_1 \sqrt{n} \|x\|_2^{\mathbb{R}^n}}.$$

Commentaires : par Cauchy-Schwarz, on a bien sûr

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \|\cdot\|_1^{\mathbb{R}^n} \leq \sqrt{n} \|\cdot\|_2^{\mathbb{R}^n}.$$

En revanche, il n'existe bien sûr pas de constante $\alpha > 0$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \alpha \sqrt{n} \|\cdot\|_2^{\mathbb{R}^n} \leq \|\cdot\|_1^{\mathbb{R}^n}.$$

Ce qu'affirme le résultat obtenu en (21), c'est qu'il est possible de trouver un sous-espace vectoriel F_n de $\mathbb{R}^n$ de dimension de l'ordre de $\log_2(n)$ et une constante $\alpha > 0$ (indépendante de n bien sûr) pour lesquels l'inégalité précédente est vraie en restriction à F_n.
Ce type de résultat est du à Dvoretzky et date des années 60.