

**UNIVERSITÉ PARIS 13
UFR DE MATHÉMATIQUES**

Thèse

en vue de l'obtention du grade de

Docteur de l'Université Paris 13

Discipline : Mathématiques

présentée par

David BLOTTIÈRE

**Réalisation de Hodge du polylogarithme d'un schéma
abélien et dégénérescence des classes d'Eisenstein des
familles modulaires de Hilbert-Blumenthal**

Soutenue publiquement le 30 mai 2006, devant le jury composé de :

Jean-Benoît BOST	Président
Michael HARRIS	Examineur
Jan NEKOVÁŘ	Rapporteur
Jacques TILOUINE	Examineur
Jörg WILDESHAUS	Directeur de thèse

Autre rapporteur : Spencer BLOCH

À mes parents.

Remerciements

J'ai effectué ma thèse sous la direction de Jörg Wildeshaus. Je tiens à lui exprimer ma profonde reconnaissance, non seulement pour le choix du sujet qu'il m'a proposé, mais aussi pour les discussions que nous avons partagées et les encouragements qu'il a su m'adresser dans les moments de doute. Tout au long de ce travail, j'ai bénéficié de ses conseils et de sa vision juste et éclairante du domaine. Ce fut pour moi une aide précieuse.

Spencer Bloch et Jan Nekovář ont accepté d'être les rapporteurs de cette thèse ; je les en remercie chaleureusement. Durant mon D.E.A., j'ai suivi le cours de géométrie algébrique de Jean-Benoît Bost, qui fut à l'origine du choix de mon domaine de recherches. Je suis honoré de sa présence dans mon jury et je l'en remercie. J'adresse également mes remerciements à Michael Harris et Jacques Tilouine pour avoir accepté de faire partie du jury.

Mes conditions de travail au L.A.G.A. furent excellentes et je suis reconnaissant à l'équipe de géométrie arithmétique de m'avoir accueilli en son sein. J'ai appris beaucoup au contact de ses chercheurs, notamment lors du groupe de travail sur le régulateur p -adique, organisé par Jörg Wildeshaus.

De février à juillet 2004, sur l'invitation de Guido Kings, j'ai effectué un séjour prédoctoral à l'Université de Regensburg, financé par une bourse du réseau européen "Arithmetic Algebraic Geometry". Je remercie l'équipe de géométrie pour son accueil, et spécialement Guido Kings pour les discussions que nous avons pu avoir sur le sujet de thèse lui-même et ses débouchés.

Au cours du premier semestre de l'année 2005, Sophie Morel et moi-même avons organisé un groupe de travail sur la thèse de Richard Pink. Je remercie Sophie pour son investissement dans ce projet, de même que l'ensemble des participants.

Je suis reconnaissant aux personnes suivantes pour les discussions que nous avons eues durant la préparation de mon doctorat : Ahmed Abbes, Nathanaël Apfelbaum, Clara Brodeur, François Brunault, Gaëtan Chenevier, Marc De Labora, Frédéric Déglise, Francesco Lemma, Sophie Morel et Sandra Rozensztajn.

Il me reste à adresser un grand merci à mes parents, ma soeur Géraldine et le reste de la famille pour leur soutien.

Mon dernier remerciement va naturellement à Béatrice qui m'a accompagné avec amour et sourires durant la préparation de ce travail.

Plan

1. Introduction
2. Rappels sur les modules de Hodge
3. Courants
4. Familles de tores réels
5. Le logarithme d'un schéma abélien
6. Le polylogarithme d'un schéma abélien
7. Le morphisme de Levin
8. Valeurs du polylogarithme en un point de torsion
9. Le polylogarithme des variétés de Hilbert-Blumenthal
10. Perspectives

En fin de document, se trouve une table des matières détaillée.

Contenu des différents chapitres

Dans l'introduction on rappelle succinctement la définition des principaux objets que l'on étudie, afin de donner la problématique de la thèse. On énonce également les résultats obtenus. Les chapitres 2, 3 et 4 sont essentiellement des rappels. En fin de chapitre 3, est effectué un calcul qui intervient dans la preuve du premier résultat. Dans le chapitre 5, on introduit le logarithme et on lie les différentes définitions qui existent. Au chapitre 6, on définit le polylogarithme et on prouve un théorème qui avec une construction due à Levin, rappelée dans la partie suivante, permet de donner une description topologique du polylogarithme. Au chapitre 8, on définit la notion de classes d'Eisenstein et on propose une méthode pour calculer leurs réalisations topologiques. On applique cet outil en spécialisant au cas des familles modulaires de Hilbert-Blumenthal et on démontre alors que ces classes d'Eisenstein dégénèrent en des valeurs spéciales de la fonction L du corps du nombres totalement réel sous-jacent.

Chapitre 1

Introduction

La notion de polylogarithme a été initialement développée pour $\mathbb{G}_m(\mathbb{C}) - \{1\}$. Dans ce cas, dit classique, elle est reliée aux valeurs spéciales de la fonction ζ de Riemann. Plus tard, Beilinson et Levin ont introduit le polylogarithme d'une famille de courbes elliptiques (cf [BeLe]). Pour la courbe modulaire munie de sa famille universelle de courbes elliptiques, il a été établi que le polylogarithme elliptique dégénérât aux pointes en le polylogarithme classique (cf [BeLe]). Wildeshaus a ensuite défini la notion de polylogarithme pour la projection d'une variété de Shimura mixte sur la variété de Shimura pure sous-jacente et donc, en particulier, pour certains schémas abéliens, e.g. familles modulaires de Siegel (cf [Wi1]). La définition du polylogarithme d'un schéma abélien quelconque se déduit directement du travail exposé dans [Wi1]. À chaque théorie de faisceaux mixtes (e.g. cohomologie l -adique, modules de Hodge mixtes) est attachée une version (réalisation) du polylogarithme. Dans ce travail, on se restreint au cas des modules de Hodge mixtes.

Avant de présenter la problématique de cette thèse, rappelle succinctement la construction du polylogarithme d'un schéma abélien telle qu'elle est présentée dans [Ki2].

1.1 Construction du polylogarithme

1.1.1 Variations de structures de Hodge et modules de Hodge

Dans la suite, pour tout A sous-anneau de \mathbb{R} , SHM_A désigne la catégorie des A -structures de Hodge mixtes polarisables et pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $A(n)$ est la A -structure de Hodge pure de poids $-2n$ (V, F^\bullet) définie par :

$$\begin{aligned} V &:= (2\pi i)^n A \subset \mathbb{C}, \\ F^{-n} V_{\mathbb{C}} &:= V_{\mathbb{C}}, \\ F^{-n+1} V_{\mathbb{C}} &:= 0. \end{aligned}$$

Soient X une variété algébrique complexe lisse et $n \in \mathbb{Z}$. On note $a_X : X \rightarrow \text{Spec } \mathbb{C}$ le morphisme structural de X et :

$VSHM_{\mathbb{Q}}(X)$	la catégorie des variations de \mathbb{Q} -structures de Hodge mixtes dont les gradués sont polarisables et qui sont admissibles (cf [Ka]),
$\mathbb{Q}(n)_X^V$	la \mathbb{Q} -variation de structures de Hodge constante sur X associée à $\mathbb{Q}(n)$,
$\mathbb{V}(n)$	$:= \mathbb{V} \otimes \mathbb{Q}(n)_X^V$, pour $\mathbb{V} \in \text{Ob}(VSHM_{\mathbb{Q}}(X))$,
$MHM_{\mathbb{Q}}(X)$	la catégorie des \mathbb{Q} -modules de Hodge mixtes,
$\mathbb{Q}(n)_X^M$	$:= a_X^* \mathbb{Q}(n) \in \text{Ob}(D^b MHM_{\mathbb{Q}}(X))$,
$M(n)$	$:= M \otimes \mathbb{Q}(n)_X^M$ pour $M \in \text{Ob}(D^b MHM_{\mathbb{Q}}(X))$.

Pour préciser les deux dernières notations, on rappelle que l'on dispose des foncteurs standard (f_* , f^* , $f_!$, $f^!$, \mathbb{D} , \boxtimes , \otimes , \underline{Hom} , pour f un morphisme de variétés algébriques complexes) pour $D^b MHM_{\mathbb{Q}}(\cdot)$ et que $MHM_{\mathbb{Q}}(\text{Spec } \mathbb{C}) = SHM_{\mathbb{Q}}$.

On a un foncteur exact et pleinement fidèle ι :

$$\begin{aligned} \iota : VSHM_{\mathbb{Q}}(X) &\rightarrow MHM_{\mathbb{Q}}(X) \\ \mathbb{V} &\mapsto \mathbb{V}^\iota := \iota(\mathbb{V}). \end{aligned}$$

Dans la suite de cette partie, on rassemble quelques propriétés de comparaison entre variations de structures de Hodge et modules de Hodge.

1.1.1.1 Produit tensoriel

On relie le produit tensoriel sur $VSHM_{\mathbb{Q}}(X)$ et le foncteur correspondant sur $D^b MHM_{\mathbb{Q}}(X)$. Si on suppose de plus que X est de dimension pure d , alors pour tout $\mathbb{V}, \mathbb{W} \in \text{Ob}(VSHM_{\mathbb{Q}}(X))$, on a :

$$(\mathbb{V} \otimes \mathbb{W})^\iota[d] = \mathbb{V}^\iota \otimes \mathbb{W}^\iota$$

où le \otimes du membre de gauche (resp. droite) est le produit tensoriel pour $VSHM_{\mathbb{Q}}(X)$ (resp. pour $D^b MHM_{\mathbb{Q}}(X)$).

1.1.1.2 Pullback

De même, pour les pullbacks, on a le lien suivant.

Soient $f : X \rightarrow Y$ un morphisme de dimension relative pure d entre variétés algébriques complexes lisses et $\mathbb{V} \in \text{Ob}(VSHM_{\mathbb{Q}}(Y))$. Alors, on a l'identité :

$$(f^* \mathbb{V})^\iota = f^* \mathbb{V}^\iota[d]$$

dans laquelle le f^* du membre de gauche (resp. droite) est le pullback pour $VSHM_{\mathbb{Q}}(\cdot)$ (resp. pour $D^b MHM_{\mathbb{Q}}(\cdot)$). En particulier, si X est une variété algébrique lisse de dimension pure d ,

$$(\mathbb{Q}(0)_X^V)^\iota = \mathbb{Q}(0)_X^M[d].$$

1.1.1.3 Dualité

Soit X une variété algébrique complexe lisse de dimension pure d . Alors, pour tout $\mathbb{V} \in \text{Ob}(VSHM_{\mathbb{Q}}(X))$, $M, N \in \text{Ob}(D^b MHM_{\mathbb{Q}}(X))$:

$$\text{Hom}_{D^b MHM_{\mathbb{Q}}(X)}(M \otimes \mathbb{V}^\iota, N) = \text{Hom}_{D^b MHM_{\mathbb{Q}}(X)}(M, N \otimes (\mathbb{V}^\vee)^\iota[-2d])$$

où \mathbb{V}^\vee est le dual de \mathbb{V} dans $VSHM_{\mathbb{Q}}(X)$, i.e. $\mathbb{V}^\vee = \underline{Hom}(\mathbb{V}, \mathbb{Q}(0)_X^V)$.

1.1.1.4 Pureté

Soient $f : X \rightarrow Y$ un morphisme de dimension relative pure d entre variétés algébriques complexes lisses. Alors, pour tout $\mathbb{V} \in \text{Ob}(VSHM_{\mathbb{Q}}(Y))$,

$$f^! \mathbb{V}^{\iota} = f^* \mathbb{V}^{\iota}(d)[2d].$$

1.1.1.5 Variations géométriques et formalisme de M. Saito

Soient $f : X \rightarrow Y$ un morphisme projectif, lisse, de dimension relative pure d entre variétés algébriques complexes lisses. Au moyen du foncteur image directe $f_* : D^bMHM_{\mathbb{Q}}(X) \rightarrow D^bMHM_{\mathbb{Q}}(Y)$, on construit une collection d'objets de $MHM_{\mathbb{Q}}(Y)$:

$$(H^k f_*(\mathbb{Q}(0)_{X}^{\vee})^{\iota})_{k \in \mathbb{Z}}.$$

D'autre part, d'après le théorème d'Ehresmann (cf. [V-Thm 9.3]) et la théorie de Hodge, on a une famille d'objets de $VSHM_{\mathbb{Q}}(Y)$:

$$(R^k f_* \mathbb{Q})_{k \in \mathbb{Z}}.$$

On a le résultat de comparaison :

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad H^k f_*(\mathbb{Q}(0)_{X}^{\vee})^{\iota} = (R^{k+d} f_* \mathbb{Q})^{\iota}.$$

1.1.1.6 Groupes Ext^1

Soient X une variété algébrique complexe lisse, $\mathbb{V}, \mathbb{W} \in \text{Ob}(VSHM_{\mathbb{Q}}(X))$. Le foncteur ι est exact et donc induit un morphisme :

$$\iota^1 : Ext_{VSHM_{\mathbb{Q}}(X)}^1(\mathbb{V}, \mathbb{W}) \rightarrow Ext_{MHM_{\mathbb{Q}}(X)}^1(\mathbb{V}^{\iota}, \mathbb{W}^{\iota}).$$

ι^1 est un isomorphisme.

1.1.1.7 Formule de projection

Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme propre entre variétés algébriques lisses. On suppose que Y est de dimension pure d_Y et on se donne $\mathbb{V} \in \text{Ob}(VSHM_{\mathbb{Q}}(Y))$. Alors, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on a un isomorphisme canonique :

$$(H^k f_* \mathbb{Q}(0)_{X}^M) \otimes \mathbb{V}^{\iota}[-d_Y] \xrightarrow{\sim} H^{k-d_Y} f_* f^* \mathbb{V}^{\iota}.$$

1.1.2 Le logarithme

Désormais et pour la suite de ce chapitre, on se donne :

B une variété algébrique complexe lisse de dimension pure,
 $A \xrightleftharpoons[\pi]{e} B$ un schéma abélien complexe de dimension relative pure d .

Comme B est normale, π est un morphisme projectif. On note :

$$\begin{aligned} j : U &\hookrightarrow A && \text{l'immersion ouverte complémentaire de } e, \\ \pi_U &&& \text{la composition } \pi \circ j, \\ \mathcal{H} &:= (R^1\pi_*\mathbb{Q})^\vee := \underline{Hom}(R^1\pi_*\mathbb{Q}, \mathbb{Q}(0)_B^V) \in \text{Ob}(VSHM_{\mathbb{Q}}(B)). \end{aligned}$$

La suite spectrale de Leray pour la composition :

$$RHom_{MHM_{\mathbb{Q}}(B)}((\mathbb{Q}(0)_B^V)^\vee, \cdot) \circ \pi_*$$

appliquée à $\pi^*(\mathcal{H}^\vee)$ donne la suite exacte courte scindée (S) :

$$\begin{array}{c} 0 \longrightarrow Ext_{MHM_{\mathbb{Q}}(B)}^1((\mathbb{Q}(0)_B^V)^\vee, \mathcal{H}^\vee) \xrightleftharpoons[\pi^*]{e^*} H^1 RHom_{MHM_{\mathbb{Q}}(A)}(\pi^*((\mathbb{Q}(0)_B^V)^\vee), \pi^*(\mathcal{H}^\vee)) \\ \longrightarrow Hom_{MHM_{\mathbb{Q}}(B)}((\mathbb{Q}(0)_B^V)^\vee, H^1\pi_*\pi^*(\mathcal{H}^\vee)) \longrightarrow 0. \end{array}$$

De 1.1.1.1-2 et 1.1.1.5-7, on déduit :

$$\begin{aligned} Ext_{MHM_{\mathbb{Q}}(B)}^1((\mathbb{Q}(0)_B^V)^\vee, \mathcal{H}^\vee) &= Ext_{VSHM_{\mathbb{Q}}(B)}^1(\mathbb{Q}(0)_B^V, \mathcal{H}), \\ H^1 RHom_{MHM_{\mathbb{Q}}(A)}(\pi^*((\mathbb{Q}(0)_B^V)^\vee), \pi^*(\mathcal{H}^\vee)) &= Ext_{VSHM_{\mathbb{Q}}(A)}^1(\mathbb{Q}(0)_A^V, \pi^*\mathcal{H}), \\ Hom_{MHM_{\mathbb{Q}}(B)}((\mathbb{Q}(0)_B^V)^\vee, H^1\pi_*\pi^*(\mathcal{H}^\vee)) &= Hom_{VSHM_{\mathbb{Q}}(B)}(\mathbb{Q}(0)_B^V, \mathcal{H}^\vee \otimes \mathcal{H}). \end{aligned}$$

Avec les identités ci-dessus, la suite exacte (S) s'écrit :

$$\begin{array}{c} 0 \longrightarrow Ext_{VSHM_{\mathbb{Q}}(B)}^1(\mathbb{Q}(0)_B^V, \mathcal{H}) \xrightleftharpoons[\pi^*]{e^*} Ext_{VSHM_{\mathbb{Q}}(A)}^1(\mathbb{Q}(0)_A^V, \pi^*\mathcal{H}) \\ \xrightarrow{\delta} Hom_{VSHM_{\mathbb{Q}}(B)}(\mathbb{Q}(0)_B^V, \mathcal{H}^\vee \otimes \mathcal{H}) \longrightarrow 0 \end{array}$$

où π^* et e^* désignent les pullbacks pour $VSHM_{\mathbb{Q}}(\cdot)$.

Définition 1.1.1 – Soit $\mathcal{L}og^1$ l'unique élément de $Ext_{VSHM_{\mathbb{Q}}(A)}^1(\mathbb{Q}(0)_A^V, \pi^*\mathcal{H})$ tel que :

$$e^*(\mathcal{L}og^1) = 0 \text{ et } \delta(\mathcal{L}og^1) = Can$$

où Can est l'élément de $Hom_{VSHM_{\mathbb{Q}}(B)}(\mathbb{Q}(0)_B^V, \mathcal{H}^\vee \otimes \mathcal{H})$ qui correspond à Id sous l'identification $Hom_{VSHM_{\mathbb{Q}}(B)}(\mathbb{Q}(0)_B^V, \mathcal{H}^\vee \otimes \mathcal{H}) = Hom_{VSHM_{\mathbb{Q}}(B)}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$.

$\mathcal{L}og^1$ est la classe d'une suite exacte courte dans $VSHM_{\mathbb{Q}}(A)$ dont le terme médian est noté (abusivement) également $\mathcal{L}og^1$:

$$0 \rightarrow \pi^*\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{L}og^1 \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Q}(0)_A^V \rightarrow 0.$$

Définition 1.1.2 – Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathcal{L}og^n := \text{Sym}^n \mathcal{L}og^1$, et on note $\varepsilon_{n+1} : \mathcal{L}og^{n+1} \rightarrow \mathcal{L}og^n$ le morphisme induit par :

$$\text{Id} \otimes \varepsilon : \bigotimes^{n+1} \mathcal{L}og^1 = (\bigotimes^n \mathcal{L}og^1) \otimes \mathcal{L}og^1 \rightarrow (\bigotimes^n \mathcal{L}og^1) \otimes \mathbb{Q}(0)_A^V = \bigotimes^n \mathcal{L}og^1.$$

On définit le logarithme, noté $\mathcal{L}og$ par :

$$\mathcal{L}og := \varprojlim_{n \geq 0} \mathcal{L}og^n \in \text{Ob}(\text{pro-VSHM}_{\mathbb{Q}}(A))$$

avec comme morphismes de transition les ε_n , $n \geq 1$.

1.1.3 Images directes supérieures du logarithme

On donne les résultats des calculs de $H^k \pi_* \mathcal{L}og(d)^\iota$ et de $H^k \pi_{U*} \mathcal{L}og(d)^\iota_U$, $k \in \mathbb{Z}$.

i) On a $H^k \pi_* \mathcal{L}og(d)^\iota = 0$ si $k \neq d$. La composition $\mathcal{L}og(d) \xrightarrow{\text{can}} \mathcal{L}og^1(d) \xrightarrow{\varepsilon \otimes \text{Id}_{\mathbb{Q}(d)_A^V}} \mathbb{Q}(d)_A^V$ induit le morphisme α :

$$\alpha : H^d \pi_* \mathcal{L}og(d)^\iota \rightarrow H^d \pi_* (\mathbb{Q}(d)_A^V)^\iota = (\mathbb{Q}(0)_B^V)^\iota \quad (\text{cf 1.1.1.5}).$$

Ce dernier est un isomorphisme.

ii) Des deux identités :

$$\begin{aligned} \cdot \quad e^* \mathcal{L}og &= \prod_{k \geq 0} \text{Sym}^k \mathcal{H} && (\text{découle de la définition de } \mathcal{L}og^1), \\ \cdot \quad e^1 \mathcal{L}og(d)^\iota &= (e^* \mathcal{L}og)^\iota[-d] && (\text{cf 1.1.1.2, 1.1.1.4}), \end{aligned}$$

on déduit que $H^k e^1 \mathcal{L}og(d)^\iota = 0$, si $k \neq d$ et $H^d e^1 \mathcal{L}og(d)^\iota = \prod_{k \geq 0} (\text{Sym}^k \mathcal{H})^\iota$.

Cette propriété, i) et la suite exacte longue de cohomologie associée au triangle distingué :

$$e^1 \mathcal{L}og(d)^\iota \rightarrow \pi_* \mathcal{L}og(d)^\iota \rightarrow \pi_{U*} \mathcal{L}og(d)^\iota_U \rightarrow e^1 \mathcal{L}og(d)^\iota[1]$$

donnent $H^k \pi_{U*} \mathcal{L}og(d)^\iota_U = 0$ si $k \neq d - 1$ et une suite exacte courte (S') :

$$(S') \quad 0 \rightarrow H^{d-1} \pi_{U*} \mathcal{L}og(d)^\iota_U \rightarrow H^d(e^1 \mathcal{L}og(d)^\iota) \rightarrow H^d \pi_* \mathcal{L}og(d)^\iota \rightarrow 0.$$

On vérifie que (S') s'insère dans le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H^{d-1} \pi_{U*} \mathcal{L}og(d)^\iota_U & \xrightarrow{\beta'} & \prod_{k \geq 0} (\text{Sym}^k \mathcal{H})^\iota & \xrightarrow{\text{pr}_{k=0}} & (\mathbb{Q}(0)_B^V)^\iota \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \parallel & & \uparrow \alpha \\ 0 & \longrightarrow & H^{d-1} \pi_{U*} \mathcal{L}og(d)^\iota_U & \longrightarrow & H^d(e^1 \mathcal{L}og(d)^\iota) & \longrightarrow & H^d \pi_* \mathcal{L}og(d)^\iota \longrightarrow 0 \end{array}$$

La factorisation canonique de β' à travers $\prod_{k > 0} (\text{Sym}^k \mathcal{H})^\iota \hookrightarrow \prod_{k \geq 0} (\text{Sym}^k \mathcal{H})^\iota$ donne un morphisme β :

$$\beta : H^{d-1} \pi_{U*} \mathcal{L}og(d)^\iota_U \rightarrow \prod_{k > 0} (\text{Sym}^k \mathcal{H})^\iota$$

qui est un isomorphisme.

1.1.4 Le polylogarithme

Du résultat ii) ci-dessus, on déduit l'assertion suivante.

Les morphismes de bord de la suite spectrale de Leray pour la composition :

$$RHom_{MHM_{\mathbb{Q}}(B)}(\mathcal{H}^t, \cdot) \circ \pi_{U*}$$

appliquée à $\mathcal{L}og_U(d)^t$ donnent l'isomorphisme γ :

$$\begin{aligned} Ext_{MHM_{\mathbb{Q}}(U)}^{2d-1}((\pi_U^* \mathcal{H})^t, \mathcal{L}og_U(d)^t) &\xrightarrow{\gamma} Hom_{MHM_{\mathbb{Q}}(B)}(\mathcal{H}^t, \prod_{k>0} (Sym^k \mathcal{H})^t) \\ &\parallel \\ &Hom_{VSHM_{\mathbb{Q}}(B)}(\mathcal{H}, \prod_{k>0} Sym^k \mathcal{H}). \end{aligned}$$

Définition 1.1.3 – Le polylogarithme, noté $\mathcal{P}ol$ est l'unique élément de $Ext_{MHM_{\mathbb{Q}}(U)}^{2d-1}((\pi_U^* \mathcal{H})^t, \mathcal{L}og_U(d)^t)$ vérifiant :

$$\gamma(\mathcal{P}ol) = Id_{\mathcal{H}}.$$

Le polylogarithme est donc une $(2d - 1)$ -extension de $MHM_{\mathbb{Q}}(U)$ entre variations de structures de Hodge.

1.2 Énoncé du problème 1

Dans le cas elliptique ($d = 1$), le polylogarithme est une extension dans la catégorie $VSHM_{\mathbb{Q}}(U)$:

$$\mathcal{P}ol \in Ext_{MHM_{\mathbb{Q}}(U)}^1((\pi_U^* \mathcal{H})^t, \mathcal{L}og_U(1)^t) = Ext_{VSHM_{\mathbb{Q}}(U)}^1(\pi_U^* \mathcal{H}, \mathcal{L}og_U(1)) \quad (\text{cf 1.1.1.6}).$$

D'après la description des Ext -groupes de Yoneda, il existe $\mathbb{V} \in Ob(VSHM_{\mathbb{Q}}(U))$ et une suite exacte courte (S'') dans $VSHM_{\mathbb{Q}}(U)$:

$$(S'') \quad 0 \rightarrow \mathcal{L}og_U(1) \rightarrow \mathbb{V} \rightarrow \pi_U^* \mathcal{H} \rightarrow 0$$

dont la classe est $\mathcal{P}ol$. Dans la situation géométrique des courbes modulaires munies de leurs familles universelles de courbes elliptiques, une telle suite (S'') a été explicitement déterminée ainsi qu'une matrice de périodes (matrice de passage d'une base holomorphe compatible avec la filtration de Hodge vers une \mathbb{Q} -base horizontale compatible avec la filtration par le poids) pour la variation \mathbb{V} . On connaît donc, dans ce cas, une description explicite de l'extension polylogarithmique (cf [BeLe-4.8] et [Wi1-V-Thm 2.3, Thm 3.14 et sa preuve]).

Si la dimension relative d est au moins 2, on peut chercher à décrire le polylogarithme de façon analogue. Or, le premier point dans la description du polylogarithme elliptique est que $\mathcal{P}ol$ est une extension dans $VSHM_{\mathbb{Q}}(U)$ et ceci n'est pas vrai en dimensions supérieures, i.e. :

$$\mathcal{P}ol \notin Ext_{VSHM_{\mathbb{Q}}(U)}^{2d-1}((\pi_U^* \mathcal{H})^t, \mathcal{L}og_U(d)^t), \quad \text{si } d \geq 2.$$

La première partie de cette thèse est consacrée à l'étude du problème suivant :

Problème 1 : Décrire le polylogarithme d'un schéma abélien de dimension relative $d \geq 2$.

1.3 Réponse apportée au problème 1

1.3.1 Principe de rigidité du polylogarithme

Comme on l'a vu, le polylogarithme est une extension de modules de Hodge. Une propriété du polylogarithme, connue sous le nom de principe de rigidité, assure que l'extension topologique sous-jacente caractérise $\mathcal{P}ol$. Afin de préciser ceci, on introduit quelques notations.

Pour X une variété algébrique complexe lisse et \mathbb{K} un corps commutatif, on note :

\overline{X}	$X(\mathbb{C})$ muni de la topologie transcendante,
\mathbb{K}_X	le faisceau constant associé à \mathbb{K} sur \overline{X} ,
$\mathbb{K}_X\text{-mod}$	la catégorie des \mathbb{K}_X -modules,
$D_c^b(\mathbb{Q}_X)$	la sous-catégorie pleine de $D^b(\mathbb{Q}_X\text{-mod})$ dont les objets sont les complexes dont tous les objets de cohomologies sont des faisceaux constructibles,
$\overline{\mathbb{V}}$	le système local de \mathbb{Q} -vectoriels sous-jacent à \mathbb{V} , pour $\mathbb{V} \in \text{Ob}(VSHM_{\mathbb{Q}}(X))$.

On munit $D^bMHM_{\mathbb{Q}}(X)$ de t -structure usuelle de catégorie dérivée d'une catégorie abélienne et $D_c^b(\mathbb{Q}_X)$ de la t -structure perverse moitiée. Alors, on dispose d'un foncteur oubli t -exact For :

$$For := \text{real} \circ \text{rat} : D^bMHM_{\mathbb{Q}}(X) \rightarrow D_c^b(\mathbb{Q}_X).$$

Si de plus X est de dimension pure d , pour tout $\mathbb{V} \in \text{Ob}(VSHM_{\mathbb{Q}}(X))$, on a :

$$For(\mathbb{V}^t) = \overline{\mathbb{V}}[d].$$

On considère le schéma abélien et les notations introduits au début de la partie 1.1.2. Le foncteur oubli induit un morphisme noté (abusivement) également For :

$$For : Ext_{MHM_{\mathbb{Q}}(U)}^{2d-1}((\pi_U^* \mathcal{H})^t, \mathcal{L}og_U(d)^t) \rightarrow Ext_{\mathbb{Q}_U\text{-mod}}^{2d-1}(\overline{\pi_U^* \mathcal{H}}, \overline{\mathcal{L}og_U(d)})$$

qui est injectif. Ainsi, $\mathcal{P}ol$ est caractérisé par $For(\mathcal{P}ol) =: \overline{\mathcal{P}ol}$.

Lorsque le schéma abélien est muni d'une polarisation principale, on peut décrire l'extension topologique complexifiée sous-jacente au polylogarithme, i.e. :

$$\overline{\mathcal{P}ol}_{\mathbb{C}} := \overline{\mathcal{P}ol} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} \in Ext_{\mathbb{C}_U\text{-mod}}^{2d-1}(\overline{\pi_U^* \mathcal{H}_{\mathbb{C}}}, \overline{\mathcal{L}og_U(d)_{\mathbb{C}}}).$$

Pour ce faire, on utilise des outils d'analyse du type séries de Fourier ; c'est pourquoi on étend les scalaires de \mathbb{Q} à \mathbb{C} . Cette opération est sans conséquence pour notre étude. En effet, on peut montrer que le morphisme :

$$\cdot \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} : Ext_{\mathbb{Q}_U\text{-mod}}^{2d-1}(\overline{\pi_U^* \mathcal{H}}, \overline{\mathcal{L}og_U(d)}) \rightarrow Ext_{\mathbb{C}_U\text{-mod}}^{2d-1}(\overline{\pi_U^* \mathcal{H}_{\mathbb{C}}}, \overline{\mathcal{L}og_U(d)_{\mathbb{C}}}),$$

est injectif et donc $\overline{\mathcal{P}ol}_{\mathbb{C}}$ détermine $\mathcal{P}ol$.

Le premier résultat de cette thèse est la description de $\overline{\mathcal{P}ol}_{\mathbb{C}}$ comme morphisme de $D^b(\mathbb{C}_U\text{-mod})$. Pour ce faire, on utilise des courants introduits par Levin (cf [Le]). On donne ci-dessous les étapes de la construction de ce morphisme.

1.3.2 Construction d'un candidat à l'aide des courants de Levin

Si X est une variété algébrique complexe lisse, on note X^∞ la variété différentielle associée et \mathcal{O}_{X^∞} le faisceau des fonctions infiniment différentiables de X^∞ .

1. Soit le pro-fibré vectoriel \mathcal{G} défini par $\mathcal{G} := \prod_{k>0} \text{Sym}^k \overline{\pi_U^* \mathcal{H}} \otimes \mathcal{O}_{A^\infty}$. On construit une connexion intégrable ∇ sur \mathcal{G} telle que $\mathcal{L}og_{\mathbb{R}} := \overline{\mathcal{L}og} \widehat{\otimes}_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} = \text{Ker}(\nabla)$. Ainsi, le complexe de de Rham associé à (\mathcal{G}, ∇) noté $(\Omega_{A^\infty}^\bullet(\mathcal{G}), \nabla^\bullet)$ est une résolution de $\overline{\mathcal{L}og}_{\mathbb{R}}$, d'où un quasi-isomorphisme $i : \overline{\mathcal{L}og}_{\mathbb{R}} \rightarrow \Omega_{A^\infty}^\bullet(\mathcal{G})$.

2. On note $(\Omega_{A^\infty}^\bullet(\mathcal{G}(d)_{\mathbb{C}}), \nabla^\bullet(d)_{\mathbb{C}})$ le complexe $(\Omega_{A^\infty}^\bullet(\mathcal{G}), \nabla^\bullet) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}(d) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$. Au moyen de courants du type courants de Green, Levin construit un morphisme \mathcal{P} :

$$\mathcal{P} : \overline{\pi_U^* \mathcal{H}}_{\mathbb{C}} \rightarrow \Omega_{U^\infty}^{2d-1}(\mathcal{G}(d)_{\mathbb{C}})$$

tel que $\nabla^{2g-1}(d)_{\mathbb{C}} \circ \mathcal{P} = 0$ (cf [Le-Thm 3.4.4]).

3. Soit $[\mathcal{P}] \in \text{Hom}_{\text{Db}(\mathbb{C}_U\text{-mod})}(\overline{\pi_U^* \mathcal{H}}_{\mathbb{C}}, \overline{\mathcal{L}og}_U(d)_{\mathbb{C}}[2d-1])$ défini par :

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & & \overline{\pi_U^* \mathcal{H}}_{\mathbb{C}} & \\ & & & & & \downarrow \mathcal{P} & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{G}(d)_{\mathbb{C}} & \xrightarrow{\nabla(d)_{\mathbb{C}}} & \Omega_{U^\infty}^1(\mathcal{G}(d)_{\mathbb{C}}) & \xrightarrow{\nabla^1(d)_{\mathbb{C}}} & \dots \longrightarrow \Omega_{U^\infty}^{2d-1}(\mathcal{G}(d)_{\mathbb{C}}) \xrightarrow{\nabla^{2d-1}(d)_{\mathbb{C}}} \dots \\ & & \uparrow i \otimes \text{Id}_{\mathbb{R}(d) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}} & & & & \\ & & \overline{\mathcal{L}og}_U(d)_{\mathbb{C}} & & & & \end{array}$$

1.3.3 Énoncé du résultat 1

Résultat 1 : $[\mathcal{P}] = (\overline{\mathcal{P}ol})_{\mathbb{C}}$.

Pour la preuve, on utilise une relation différentielle vérifiée par les courants de Levin analogue à celle satisfaite par les courants de Green et le fait que le morphisme β est le morphisme résidu en B^∞ (vue comme sous-variété fermée de A^∞ via e).

On va à présent donner une construction qui associe au polylogarithme et à une section de torsion du schéma abélien un élément dans un groupe de cohomologie de Hodge absolue de la base B . Ceci va permettre d'introduire le deuxième problème étudié dans cette thèse.

1.4 Définition des valeurs du polylogarithme en un point de torsion

On considère toujours le schéma abélien introduit au début de la partie 1.1.2 et on conserve les mêmes notations. Soit $x : B \rightarrow U$ un point de torsion.

1.4.1 Principe de scindage

On a un isomorphisme canonique sc_x :

$$sc_x : x^* \mathcal{L}og_U \xrightarrow{\sim} \prod_{k \geq 0} Sym^k \mathcal{H}.$$

1.4.2 Contractions

On a un morphisme canonique $ev : \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}^\vee \rightarrow \mathbb{Q}(0)_B^V$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note $c_k : (Sym^k \mathcal{H}) \otimes \mathcal{H}^\vee \rightarrow Sym^{k-1} \mathcal{H}$ le morphisme induit par :

$$Id \otimes ev : (\otimes^k \mathcal{H}) \otimes \mathcal{H}^\vee = (\otimes^{k-1} \mathcal{H}) \otimes (\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}^\vee) \rightarrow (\otimes^{k-1} \mathcal{H}) \otimes \mathbb{Q}(0)_B^V = \otimes^{k-1} \mathcal{H}.$$

1.4.3 Les valeurs du polylogarithme en un point de torsion

Pour tout $l \geq 0$, on appelle l -ième valeur du polylogarithme en x et on note $[x^* \mathcal{P}ol]^l$ l'image de $\mathcal{P}ol$ sous la composition suivante notée val_x^l :

$$\begin{array}{c}
 Ext_{MHM_{\mathbb{Q}}(U)}^{2d-1}((\pi_U^* \mathcal{H})^\iota, \mathcal{L}og_U(d)^\iota) \\
 \downarrow (1.1.1.2) \downarrow x^* \\
 Ext_{MHM_{\mathbb{Q}}(B)}^{2d-1}(\mathcal{H}^\iota, (x^* \mathcal{L}og_U(d))^\iota) \\
 \downarrow \iota(sc_x)_* \\
 Ext_{MHM_{\mathbb{Q}}(B)}^{2d-1}(\mathcal{H}^\iota, \prod_{k \geq 0} ((Sym^k \mathcal{H})(d))^\iota) \\
 \parallel (1.1.1.1-3) \\
 Ext_{MHM_{\mathbb{Q}}(B)}^{2d-1}((\mathbb{Q}(0)_B^V)^\iota, \prod_{k \geq 0} (((Sym^k \mathcal{H}) \otimes \mathcal{H}^\vee)(d))^\iota) \\
 \downarrow (\iota(c_{l+1} \otimes Id_{\mathbb{Q}(d)_B^V}) \circ pr_{k=l+1})_* \\
 Ext_{MHM_{\mathbb{Q}}(B)}^{2d-1}((\mathbb{Q}(0)_B^V)^\iota, \prod_{k \geq 0} ((Sym^l \mathcal{H})(d))^\iota) \\
 \parallel ([HW1-Def A.1.9 b]), 1.1.1.2) \\
 H_{\mathbb{S}^p}^{2d-1-dim B}(B, ((Sym^l \mathcal{H})(d))^\iota).
 \end{array}$$

val_x^l \curvearrowright

Dans la littérature, les éléments $[x^* \mathcal{P}ol]^l$ sont appelés classes d'Eisenstein. Cette terminologie vient du fait que, dans le cas elliptique, ceux-ci peuvent être décrits au moyen de séries d'Eisenstein.

1.5 Énoncé du problème 2

Pour les courbes modulaires munies de leurs familles universelles de courbes elliptiques, Beilinson et Levin ont prouvé que les classes d'Eisenstein ont une origine motivique (cf [BeLe-Lem

6.4.5]). En étudiant la dégénérescence de ces classes en des points, on obtient des résultats de non-annulation (cf [BeLe-Prop 2.2.3], [SS], [Wi1-V-Cor 3.26]). Ceci implique alors la non-nullité de certains groupes de cohomologie motivique.

En dimension quelconque (quitte à travailler dans la théorie des modules de Hodge sur \mathbb{R} définie dans [HW1-A.2]), Kings a montré que les valeurs du polylogarithme d'un schéma abélien (défini sur \mathbb{R}) en un point de torsion (défini sur \mathbb{R}) viennent d'un élément d'un groupe de cohomologie motivique via le régulateur absolu (cf [Ki2]). Par analogie avec le cas elliptique, on pose le problème suivant :

Problème 2 : Existe-t-il un schéma abélien $\pi : A \rightarrow B$ de dimension relative $d \geq 2$, une section de torsion $x : B \rightarrow U$ et $l \geq 0$ tel que $[x^*Pol]^l \neq 0$.

1.6 Réponse apportée au problème 2

On s'inspire de la démarche de Beilinson et Levin qui établissent leur résultat de non-nullité en effectuant le calcul du résidu des classes d'Eisenstein en une pointe de la compactification de Baily-Borel de la base. Un contexte géométrique "voisin" des courbes modulaires est celui des variétés de Hilbert-Blumenthal. En effet, les compactifications de Baily-Borel de telles sont obtenues en leurs ajoutant un nombre fini de points.

Dans la deuxième partie de ce travail, on considère le polylogarithme des schémas abéliens universels de Hilbert-Blumenthal. Avant de formuler le résultat obtenu, on précise la définition (analytique) de cette famille de variétés abéliennes (au-dessus d'une composante connexe du schéma modulaire) et on explique la démarche adoptée pour étudier son polylogarithme et calculer le résidu des classes d'Eisenstein associées à des sections de torsion.

1.6.1 Données géométriques

Soient K un corps de nombres totalement réel de dimension g , \mathcal{O}_K son anneau d'entiers, \mathcal{D}_K la différentielle de K à \mathbb{Q} et $\sigma_1, \dots, \sigma_g$ une énumération des plongements réels de K . On note \mathcal{H}_2^+ le demi-plan de Poincaré supérieur.

On définit une action ρ de $SL_2(K)$ sur $(\mathcal{H}_2^+)^g$ en envoyant $\left(\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, (\tau_k)_{1 \leq k \leq g} \right) \in SL_2(K) \times (\mathcal{H}_2^+)^g$ sur :

$$\left(\frac{\sigma_k(\alpha)\tau_k + \sigma_k(\beta)}{\sigma_k(\gamma)\tau_k + \sigma_k(\delta)} \right)_{1 \leq k \leq g} \in (\mathcal{H}_2^+)^g$$

et une action ρ' de $(K \oplus K) \rtimes SL_2(K)$ (produit semi-direct pour l'action standard de $SL_2(K)$ sur $K \oplus K$) sur $\mathbb{C}^g \times (\mathcal{H}_2^+)^g$ en associant à $\left(\left((a, b), \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \right), ((z_k)_{1 \leq k \leq g}, (\tau_k)_{1 \leq k \leq g}) \right) \in ((K \oplus K) \rtimes SL_2(K)) \times (\mathbb{C}^g \times (\mathcal{H}_2^+)^g)$:

$$\left(\frac{z_k}{\sigma_k(\gamma)\tau_k + \sigma_k(\delta)} + \sigma_k(a) - \sigma_k(b) \left(\frac{\sigma_k(\alpha)\tau_k + \sigma_k(\beta)}{\sigma_k(\gamma)\tau_k + \sigma_k(\delta)} \right), \frac{\sigma_k(\alpha)\tau_k + \sigma_k(\beta)}{\sigma_k(\gamma)\tau_k + \sigma_k(\delta)} \right)_{1 \leq k \leq g} \in \mathbb{C}^g \times (\mathcal{H}_2^+)^g.$$

On fixe $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 3$. On définit Γ_N sous-groupe arithmétique net de $SL_2(K)$ par :

$$\Gamma_N := \left\{ M \in SL_2(\mathcal{O}_K) / M \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod{N\mathcal{O}_K} \right\}$$

et Λ_N sous-groupe arithmétique net de $(K \oplus K) \rtimes SL_2(K)$ par :

$$\Lambda_N := (\mathcal{D}_K^{-1} \oplus \mathcal{O}_K) \rtimes \Gamma_N.$$

On peut former les variétés analytiques quotients :

$$\begin{aligned} B(\mathbb{C}) &:= \Gamma_N \backslash (\mathcal{H}_2^+)^g && (\Gamma_N \text{ agit sur } (\mathcal{H}_2^+)^g \text{ via la restriction de } \rho), \\ A(\mathbb{C}) &:= \Lambda_N \backslash (\mathbb{C}^g \times (\mathcal{H}_2^+)^g) && (\Lambda_N \text{ agit sur } \mathbb{C}^g \times (\mathcal{H}_2^+)^g \text{ via la restriction de } \rho'). \end{aligned}$$

La projection canonique $pr_2 : \mathbb{C}^g \times (\mathcal{H}_2^+)^g \rightarrow (\mathcal{H}_2^+)^g$ induit un morphisme analytique complexe $\pi^{an} : A(\mathbb{C}) \rightarrow B(\mathbb{C})$. On peut montrer que $B(\mathbb{C})$ (resp. $A(\mathbb{C})$) est la variété analytique complexe associée à une variété algébrique complexe lisse B (resp. A) et que π^{an} est induit par un morphisme algébrique $\pi : A \rightarrow B$ qui est le morphisme structural d'un schéma abélien de dimension relative pure g au dessus de B de dimension pure g .

1.6.2 Description du polylogarithme

On applique le résultat 1 au schéma abélien défini ci-dessus. Pour cela, on munit $\pi : A \rightarrow B$ d'une polarisation principale. Le système local sous-jacent à la \mathbb{Z} -variation de structures de Hodge pures de poids -1 $(R^1\pi_*\mathbb{Z})^\vee$ s'identifie à $\mathcal{D}_K^{-1} \oplus \mathcal{O}_K$ muni de l'action standard de Γ_N . Le morphisme suivant :

$$\begin{aligned} (\mathcal{D}_K^{-1} \oplus \mathcal{O}_K) \times (\mathcal{D}_K^{-1} \oplus \mathcal{O}_K) &\rightarrow 2\pi i\mathbb{Z} \\ ((a_1, b_1), (a_2, b_2)) &\mapsto 2\pi i \operatorname{tr}_K(a_1b_2 - b_1a_2) \end{aligned}$$

où tr_K désigne la trace de K à \mathbb{Q} , définit une polarisation sur notre schéma abélien et on vérifie qu'elle est principale. On peut alors calculer les courants de Levin avec ces données pour déterminer \mathcal{P} et par suite $(\overline{\mathcal{P}ol})_{\mathbb{C}}$.

1.6.3 Détermination des classes d'Eisenstein associées à des sections de torsion

On fixe $a \in N^{-1}\mathcal{D}_K^{-1}$ et $b \in N^{-1}\mathcal{O}_K$. On définit (au niveau analytique complexe) une section de N -torsion $x_{a,b}^{an}$ de notre schéma abélien en posant :

$$\begin{aligned} x_{a,b}^{an} : B(\mathbb{C}) &\rightarrow A(\mathbb{C}) \\ [(\tau_k)_{1 \leq k \leq g}] &\mapsto [((\sigma_k(a) + \sigma_k(b)\tau_k)_{1 \leq k \leq g}, (\tau_k)_{1 \leq k \leq g})] \end{aligned}$$

On peut montrer que $x_{a,b}^{an}$ est le morphisme analytique associé à un morphisme algébrique $x_{a,b} : B \rightarrow A$.

Soit $l \geq 0$. La construction de $val_{x_{a,b}}^l$ admet des analogues topologiques pour des coefficients rationnels et complexes qui permettent de définir deux morphismes :

$$\overline{val}_{x_{a,b}}^l : Ext_{\mathbb{Q}U\text{-mod}}^{2g-1}(\overline{\pi_U^* \mathcal{H}}, \overline{\mathcal{L}og_U(g)}) \rightarrow H_{Betti, \mathbb{Q}}^{2g-1}(\overline{B}, \overline{Sym^l \mathcal{H}}(g)),$$

$$(\overline{val}_{x_{a,b}}^l)_{\mathbb{C}} : Ext_{\mathbb{C}U\text{-mod}}^{2g-1}(\overline{\pi_U^* \mathcal{H}}_{\mathbb{C}}, \overline{\mathcal{L}og_U(g)}_{\mathbb{C}}) \rightarrow H_{Betti, \mathbb{C}}^{2g-1}(\overline{B}, \overline{Sym^l \mathcal{H}}(g)_{\mathbb{C}}).$$

Ces derniers s'insèrent dans le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} Ext_{MHM_{\mathbb{Q}}(U)}^{2g-1}((\pi_U^* \mathcal{H})^t, \mathcal{L}og_U(g)^t) & \xrightarrow{val_{x_{a,b}}^l} & H_{\mathfrak{S}p}^{g-1}(B, (Sym^l \mathcal{H})(g)^t) \\ \downarrow For & & \downarrow For \\ Ext_{\mathbb{Q}U\text{-mod}}^{2g-1}(\overline{\pi_U^* \mathcal{H}}, \overline{\mathcal{L}og_U(g)}) & \xrightarrow{\overline{val}_{x_{a,b}}^l} & H_{Betti, \mathbb{Q}}^{2g-1}(\overline{B}, \overline{Sym^l \mathcal{H}}(g)) \\ \downarrow \cdot \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} & & \downarrow \cdot \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} \\ Ext_{\mathbb{C}U\text{-mod}}^{2g-1}(\overline{\pi_U^* \mathcal{H}}_{\mathbb{C}}, \overline{\mathcal{L}og_U(g)}_{\mathbb{C}}) & \xrightarrow{(\overline{val}_{x_{a,b}}^l)_{\mathbb{C}}} & H_{Betti, \mathbb{C}}^{2g-1}(\overline{B}, \overline{Sym^l \mathcal{H}}(g)_{\mathbb{C}}). \end{array}$$

On en déduit l'identité (I_1) suivante :

$$(I_1) \quad For([x_{a,b}^* \mathcal{P}ol]^l) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} = (\overline{val}_{x_{a,b}}^l)_{\mathbb{C}}((\overline{\mathcal{P}ol})_{\mathbb{C}}).$$

L'expression de $(\overline{\mathcal{P}ol})_{\mathbb{C}}$ obtenue précédemment permet de donner une formule pour $For([x_{a,b}^* \mathcal{P}ol]^l)$, i.e. d'expliciter les classes d'Eisenstein au niveau topologique après extension des scalaires de \mathbb{Q} à \mathbb{C} .

1.6.4 Résidu en une pointe

La pointe ∞

Comme on l'a dit auparavant, la compactification de Baily-Borel de B notée B^* s'obtient en ajoutant un nombre fini de points nommés pointes. L'une d'elle est remarquable : la pointe ∞ . On donne une base de voisinages de ∞ . Soient $\Gamma_{N, \infty}$ et pour $r \in \mathbb{R}^+$, V_r définis par :

$$\Gamma_{N, \infty} := \{M \in \Gamma_N / M \text{ est triangulaire supérieure}\},$$

$$V_r := \{(\tau_k)_{1 \leq k \leq g} \in (\mathcal{H}_2^+)^g / \prod_{k=1}^g \Im(\tau_k) > r\}.$$

Alors, $\Gamma_{N, \infty}$ agit sur V_r via la restriction de ρ pour $r \gg 0$. Pour $r \gg 0$, le morphisme canonique $\overline{V}_r := \Gamma_{N, \infty} \backslash V_r \rightarrow B(\mathbb{C})$ est une immersion ouverte. La famille des $\{\overline{V}_r \cup \{\infty\}\}_{r \gg 0}$ forme une base de voisinages de ∞ .

Le morphisme résidu

Le morphisme résidu Res_∞^l est construit à partir de deux morphismes. On commence par définir ces trois morphismes et ensuite on explicite le but de Res_∞^l .

- La dimension cohomologique de $SHM_{\mathbb{Q}}$ est 1. Ainsi, la suite spectrale de Leray pour la composition :

$$RHom_{SHM_{\mathbb{Q}}}(\mathbb{Q}(0), \cdot) \circ (a_B)_*$$

appliquée à $(Sym^l \mathcal{H})(g)^\iota$ induit une suite exacte courte :

$$\begin{array}{c} 0 \longrightarrow Ext_{SHM_{\mathbb{Q}}}^1(\mathbb{Q}(0), H^{g-2}(a_B)_*(Sym^l \mathcal{H})(g)^\iota) \longrightarrow H_{\mathcal{S}p}^{g-1}(B, (Sym^l \mathcal{H})(g)^\iota) \\ \xrightarrow{(1)} Hom_{SHM_{\mathbb{Q}}}(\mathbb{Q}(0), H^{g-1}(a_B)_*(Sym^l \mathcal{H})(g)^\iota) \longrightarrow 0. \end{array}$$

- Soient $i_\infty : \infty \hookrightarrow B^*$ (immersion fermée) et $j_B : B \hookrightarrow B^*$ l'immersion ouverte de B dans sa compactification. On a le triangle distingué (T) :

$$(T) \quad \begin{array}{ccc} (j_B)!((Sym^l \mathcal{H})(g)^\iota) & \longrightarrow & (j_B)_*((Sym^l \mathcal{H})(g)^\iota) \\ \uparrow [1] & & \swarrow \\ (i_\infty)_* i_\infty^* (j_B)_*((Sym^l \mathcal{H})(g)^\iota) & & \end{array}$$

Dans la suite exacte longue de cohomologie associée au triangle distingué $(a_B^*)_*(T)$, on a un morphisme noté (2) :

$$H^{g-1}(a_B)_*(Sym^l \mathcal{H})(g)^\iota \rightarrow H^{g-1} i_\infty^* (j_B)_*((Sym^l \mathcal{H})(g)^\iota).$$

- Définition de Res_∞^l

On pose alors le morphisme résidu par : $Res_\infty^l := (2)_* \circ (1)$:

$$Res_\infty^l : H_{\mathcal{S}p}^{g-1}(B, (Sym^l \mathcal{H})(g)^\iota) \rightarrow Hom_{SHM_{\mathbb{Q}}}(\mathbb{Q}(0), H^{g-1} i_\infty^* (j_B)_*((Sym^l \mathcal{H})(g)^\iota)).$$

- Le but du morphisme résidu

On applique le théorème [BW-Thm 2.9] à notre situation pour obtenir :

$$\begin{array}{ll} H^{g-1} i_\infty^* j_{B^*}((Sym^l \mathcal{H})(g)^\iota) \simeq \mathbb{Q}(0) & \text{si } g \text{ divise } l, \\ H^{g-1} i_\infty^* j_{B^*}((Sym^l \mathcal{H})(g)^\iota) = 0 & \text{sinon.} \end{array}$$

Ainsi, si g divise l , le but du morphisme résidu est \mathbb{Q} ($Hom_{SHM_{\mathbb{Q}}}(\mathbb{Q}(0), \mathbb{Q}(0)) = \mathbb{Q}$) et si g ne divise pas l , Res_∞^l est le morphisme nul.

Détermination du résidu de $[x_{a,b}^* \mathcal{P}ol]^l$

On suppose ici que g divise l . La construction de Res_∞^l a des analogues topologiques pour des coefficients rationnels et complexes grâce auxquels on peut définir :

$$\begin{aligned} \overline{Res}_\infty^l &: H_{Betti, \mathbb{Q}}^{2g-1}(\overline{B}, \overline{Sym^l \mathcal{H}(g)}) \rightarrow \mathbb{Q}, \\ (\overline{Res}_\infty^l)_\mathbb{C} &: H_{Betti, \mathbb{C}}^{2g-1}(\overline{B}, \overline{Sym^l \mathcal{H}(g)}_\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Ceux-ci s'insèrent dans le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} H_{Sp}^{g-1}(B, (Sym^l \mathcal{H})(g)^t) & \xrightarrow{Res_\infty^l} & \mathbb{Q} \\ \downarrow For & & \parallel \\ H_{Betti, \mathbb{Q}}^{2g-1}(\overline{B}, \overline{Sym^l \mathcal{H}(g)}) & \xrightarrow{\overline{Res}_\infty^l} & \mathbb{Q} \\ \downarrow \cdot \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} & & \downarrow \cdot \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} \\ H_{Betti, \mathbb{C}}^{2g-1}(\overline{B}, \overline{Sym^l \mathcal{H}(g)}_\mathbb{C}) & \xrightarrow{(\overline{Res}_\infty^l)_\mathbb{C}} & \mathbb{C}. \end{array}$$

On en déduit l'identité (I_2) :

$$(I_2) \quad Res_\infty^l([x_{a,b}^* \mathcal{P}ol]^l) = \overline{Res}_\infty^l_\mathbb{C}(For([x_{a,b}^* \mathcal{P}ol]^l)).$$

De (I_1) , (I_2) , et du résultat 1, on déduit que :

$$(I) \quad Res_\infty^l([x_{a,b}^* \mathcal{P}ol]^l) = \overline{Res}_\infty^l_\mathbb{C} \circ \overline{val}_{x_{a,b}}^l([P]).$$

À l'aide de la formule établie auparavant pour $\overline{val}_{x_{a,b}}^l([P])$, on peut expliciter le membre de droite de (I) et donc $Res_\infty^l([x_{a,b}^* \mathcal{P}ol]^l)$.

1.6.5 Énoncé du résultat 2

On introduit les notations suivantes :

$$\begin{aligned} d_K & \text{ le discriminant de } K \text{ à } \mathbb{Q}, \\ N_K & \text{ la norme de } K \text{ à } \mathbb{Q}, \\ \mathcal{O}_{K,N}^\times & := \{c \in \mathcal{O}_K^\times / c \equiv 1 \pmod{N\mathcal{O}_K}\}, \\ L((\mathcal{D}_K)^{-1}, N, c, s) & := \sum_{\lambda \in ((\mathcal{D}_K)^{-1} - \{0\}) / \mathcal{O}_{K,N}^\times} \frac{\exp(2\pi i \operatorname{tr}_K(\lambda c))}{N_K(\lambda)^s}, \text{ pour } c \in N^{-1}\mathcal{O}_K \text{ et } s \in \mathbb{C} \\ & \text{tel que } \Re(s) > 1. \end{aligned}$$

Résultat 2 :

i) Pour tout g ne divisant pas l , $a \in N^{-1}(\mathcal{D}_K)^{-1}$, $b \in N^{-1}\mathcal{O}_K$, $Res_\infty^l([x_{a,b}^* \mathcal{P}ol]^l) = 0$.

ii) Pour tout $l > 2g$ divisible par g ($l = ng$), $a \in N^{-1}(\mathcal{D}_K)^{-1}$, $b \in N^{-1}\mathcal{O}_K$, $b \neq 0$:

$$\text{Res}_\infty^l([x_{a,b}^* \mathcal{P}ol]^l) \underset{\mathbb{Q}^\times}{\sim} (2\pi i)^{-g(n+2)} |d_K|^{\frac{1}{2}} L((\mathcal{D}_K)^{-1}, N, b, n+2).$$

Le polylogarithme dégénère donc dans ce cas en une valeur spéciale de fonction L de corps de nombres.

iii) Pour tout $n \geq 5$, $b \in N^{-1}\mathcal{O}_K$, $b \neq 0$:

$$(2\pi i)^{-gn} |d_K|^{\frac{1}{2}} L((\mathcal{D}_K)^{-1}, N, b, n) \in \mathbb{Q}$$

Il s'agit d'un cas particulier du théorème de Klingen-Siegel.

iv) Pour tout $n \geq 4$ pair, $a \in N^{-1}(\mathcal{D}_K)^{-1}$, $b \in N^{-1}\mathcal{O}_K$, $b \neq 0$, tel que les idéaux entiers (N) et (Nb) sont copremiers, $g \geq 2$:

$$[x_{a,b}^* \mathcal{P}ol]^{ng} \neq 0.$$

On répond ainsi par l'affirmative à la question posée dans le problème 2.

Idées de preuve :

i) Ceci découle du calcul du but du morphisme résidu.

ii) On calcule les courants de Levin associés à la famille de Hilbert-Blumenthal pour obtenir une expression explicite de $[\mathcal{P}]$. On applique ensuite $(\overline{val}_{x_{a,b}}^l)_\mathbb{C}$ et on trouve une forme différentielle fermée $\omega_{a,b}^l$ sur B^∞ à valeurs dans $(\overline{Sym^l \mathcal{H}}(g))_\mathbb{C}$ dont la classe de cohomologie est $(\overline{val}_{x_{a,b}}^l)_\mathbb{C}([\mathcal{P}])$. On fixe $r \gg 0$ et on restreint la forme obtenue à \overline{V}_r . L'hypothèse " g divise l " permet de déterminer une projection canonique pr :

$$pr : (\overline{Sym^l \mathcal{H}}(g))_\mathbb{C}|_{\overline{V}_r} \rightarrow \overline{\mathbb{Q}(0)}_\mathbb{C}$$

définie sur \mathbb{Q} telle que $pr_* : H_{Betti, \mathbb{C}}^{2g-1}(i_\infty^*(j_B)_*(\overline{Sym^l \mathcal{H}}(g))_\mathbb{C}) \rightarrow H_{Betti, \mathbb{C}}^{2g-1}(i_\infty^*(j_B)_*\overline{\mathbb{Q}(0)}_\mathbb{C})$ est un isomorphisme. On en déduit l'identité :

$$(\overline{Res}_\infty^l)_\mathbb{C} \circ (\overline{val}_{x_{a,b}}^l)_\mathbb{C}([\mathcal{P}]) = \frac{1}{(2\pi i)^g} \int_{\overline{D}_r} pr(\omega_{a,b}|_{\overline{V}_r})_{\overline{D}_r}$$

où $\overline{D}_r = \Gamma_{N, \infty} \backslash D_r$, avec $D_r := \{(\tau_k)_{1 \leq k \leq g} \in (\mathcal{H}_2^+)^g / \prod_{k=1}^g \Im(\tau_k) = r\}$. On achève la preuve en effectuant ce calcul d'intégrale et en utilisant (I).

iii) On déduit ce résultat de ii) et de la \mathbb{Q} -structure du polylogarithme.

iv) On utilise une équation fonctionnelle pour $L((\mathcal{D}_F)^{-1}, N, r, \lambda, \cdot)$ déterminée par Siegel (cf [Si]).

1.6.6 Historique partiel des preuves du théorème de Klingen-Siegel

La preuve partielle qu'on donne dans cette thèse du théorème de Klingen-Siegel présente une certaine analogie avec l'approche originale de l'article [KI]. On met toutefois ici en lumière un lien avec la famille modulaire de Hilbert-Blumenthal, via le polylogarithme, qui ne figure pas dans [KI], ni, à ma connaissance, dans les articles publiés sur le sujet à ce jour. Depuis 1962, date de parution de [KI], plusieurs autres preuves du théorème ont été publiées. On mentionne les deux plus récentes, dues à Sczech et Nori. Tous deux utilisent la rationalité d'une classe de cohomologie pour obtenir la rationalité d'une valeur spéciale de la fonction L , ce qui est également notre cas.

Sczech [Sc] :

Sczech construit un cocycle Ψ dans le $(g-1)^{eme}$ groupe de cohomologie du groupe $GL_g(\mathbb{Z})$ à valeurs dans un certain espace de fonctions. Pour un corps de nombres totalement réel F de degré g , de groupe des unités totalement positives U , il définit, à partir de Ψ , une famille de classes de cohomologie $\eta_F(n) \in H^{g-1}(U, \mathbb{Q})$ ($n \in \mathbb{N}^*$). Sczech montre que l'évaluation de $\eta_F(n)$ sur une classe fondamentale de $H_{g-1}(U, \mathbb{Z})$ (qui donne un nombre rationnel) est liée à la valeur spéciale en $1-n$ d'une fonction L de Hecke, donnant ainsi une preuve alternative du résultat de Klingen-Siegel. Un point remarquable de la méthode de Sczech est que Ψ redonne toutes les valeurs spéciales des fonctions L de Hecke de tous les corps de nombres totalement réels.

Nori [N] :

Pour V un \mathbb{Q} -vectoriel de dimension g , Λ un réseau de V , $a \in V$, on note Γ le stabilisateur de $a + \Lambda \subset V$ dans $GL_g(V)$. Nori associe à ces données une classe de cohomologie $c(V, a, \Lambda, k) \in H^{g-1}(\Gamma, Sym^k V)$, $k \in \mathbb{N}$. Ensuite, il représente $c(V, a, \Lambda, k)$ par un courant lisse (i.e. une forme différentielle). On peut remarquer une analogie formelle entre les courants de Nori et ceux de Levin (cf [Le]). Soient F un corps de nombres totalement réel de degré g , L un réseau de F , $a \in F$. On note U le sous-groupe arithmétique de F^\times formé des unités totalement positives de F qui stabilisent $\Lambda + a\mathbb{Z}$ et qui agissent trivialement sur $(\Lambda + a\mathbb{Z})/\Lambda$. En restreignant $c(V, a, \Lambda, k)$ via l'inclusion canonique $U \hookrightarrow GL_g(F)$, Nori obtient une classe dans $H^{g-1}(U, Sym^k F)$. Soit k divisant g . On a un isomorphisme $\iota_k : H^{g-1}(U, Sym^k F) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Q}$. En calculant $\iota_k(Res_U^\Gamma(c(V, a, \Lambda, k))) \in \mathbb{Q}$ au moyen de la représentation de $c(V, a, \Lambda, k)$ par des formes différentielles, on retrouve l'expression d'une fonction L de F . Ainsi, Nori redémontre le théorème de Klingen-Siegel.

Enfin, on mentionne la prépublication de Kings [Ki3] dans laquelle il étudie la dégénérescence des classes d'Eisenstein des variétés de Hilbert-Blumenthal par une autre méthode que celle proposée dans ce travail. On en donne une description grossière.

Tout d'abord, Kings définit, pour toute famille topologique de tores réels n -dimensionnels $T \rightarrow S$, une notion de polylogarithme topologique pour un anneau commutatif quelconque de coefficients. Il s'agit d'une $(n-1)$ -extension topologique qu'on note Pol_T .

Soient $\pi : A \rightarrow B$ la famille introduite dans la partie 1.6.2, $\bar{\pi} : A(\mathbb{C}) \rightarrow B(\mathbb{C})$ la famille topologique de tores réels $(2g)$ -dimensionnels sous-jacente, x une section de torsion et $l \geq 0$ et $r \gg 0$. On esquisse l'approche de Kings pour calculer $Res_{pointe}([x^* Pol]^l)$. On fixe \mathbb{Q} comme

anneau de coefficients et on ne considère que la pointe ∞ pour simplifier (bien que Kings détermine le résidu en toutes les pointes et ait un résultat d'intégralité).

- Réduction à un calcul topologique.
- Par définition, $For(\mathcal{P}ol) = \mathcal{P}ol_{A(\mathbb{C})}$.
- Construction¹ d'une famille topologique de tores g -dimensionnels $q : T \rightarrow \overline{D}_r$ et d'un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} A(\mathbb{C})_{|\overline{V}_r} & \xrightarrow{g} & T \\ \downarrow \pi & & \downarrow q \\ \overline{V}_r & \xrightarrow{f} & \overline{D}_r \end{array}$$

et de deux morphismes f_* et g_* de source un Ext^{2g-1} -groupe topologique et de but un Ext^{g-1} -groupe topologique et d'une section topologique $g(x)$ de q associée à x tels que :

- $g_* \mathcal{P}ol_{A(\mathbb{C})_{|\overline{V}_r}} = \mathcal{P}ol_T$
- $f_* [x^* \mathcal{P}ol_{A(\mathbb{C})_{|\overline{V}_r}}]^l = [g(x)^* \mathcal{P}ol_T]^l$
- $For([x^* \mathcal{P}ol]^l) = \int_{\overline{D}_r} [g(x)^* \mathcal{P}ol_T]^l$.

On peut interpréter i) comme une dégénérescence topologique du polylogarithme . La construction de $[x^* \mathcal{P}ol_{A(\mathbb{C})_{|\overline{V}_r}}]^l$ et de $[g(x)^* \mathcal{P}ol_T]^l$ est analogue à la construction de $[x^* \mathcal{P}ol]^l$.

- Description du polylogarithme de T au moyen des courants de Nori (cf [N]).
- Calcul de l'intégrale de iii) et expression du résultat en termes de fonction L de F .

Kings redémontre ainsi le théorème de Klingen-Siegel et obtient un résultat de non-annulation pour les résidus des classes d'Eisenstein.

¹En fait, Kings remplace D_r et V_r par des espaces qui leur sont homotopes.

Chapitre 2

Rappels sur les modules de Hodge

On rappelle la définition de variation de structures de Hodge mixtes et on redonne l'énoncé d'un théorème de prolongement pour les variations admissibles dû à Kashiwara. On donne ensuite des résultats généraux sur la théorie des modules de Hodge mixtes de M. Saito. On fixe ainsi les notations qui seront utilisées dans la suite. La dernière partie de ce chapitre traite du lien qui existe entre les variations de structures de Hodge mixtes et les modules de Hodge mixtes dans le cas où la variété est lisse. De plus, on explique comment les foncteurs standard définis pour la catégorie dérivée des modules de Hodge mixtes et appliqués à des variations sont liés aux foncteurs existant au niveau des variations. L'essentiel de cette partie repose sur la comparaison des pullbacks, résultat dont la preuve utilise la construction de M. Saito (cf [Sa2]). Les autres résultats découlent alors formellement de [Sa3] et de [HW-Cor A.1.7].

2.1 Variations de structures de Hodge

Soient $A \in \{\mathbb{Z}, \mathbb{Q}\}$, N un A -module, $n \in \mathbb{Z}$ et X une variété algébrique complexe lisse.

Notations 2.1.1 –

- SHM_A la catégorie des A -structures de Hodge mixtes polarisables,
 $A(n)$ la A -structure de Hodge mixte (V, F^\bullet) définie par :
- $$\begin{aligned} V &:= (2\pi i)^n A \subset \mathbb{C}, \\ F^{-n} V_{\mathbb{C}} &:= V_{\mathbb{C}}, \\ F^{-n+1} V_{\mathbb{C}} &:= 0, \end{aligned}$$
- X^{an} la variété analytique complexe associée à X ,
 $\mathcal{O}_{X^{an}}$ le faisceau des fonctions holomorphes sur X^{an} ,
 $\Omega_{X^{an}}^1$ le faisceau des 1-formes différentielles holomorphes sur X^{an} ,
 \overline{X} $X(\mathbb{C})$ muni de la topologie transcendante,
 N_X le faisceau constant sur \overline{X} associé à N ,
 $A(n)_X^V$ le couple $((2\pi i)^n A)_X, \mathcal{F}^\bullet$ où \mathcal{F}^\bullet est la filtration décroissante du fibré vectoriel $((2\pi i)^n A)_X \otimes_{A_X} \mathcal{O}_{X^{an}}$ définie par :
- $$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-n} ((2\pi i)^n A)_X \otimes_{A_X} \mathcal{O}_{X^{an}} &:= ((2\pi i)^n A)_X \otimes_{A_X} \mathcal{O}_{X^{an}}, \\ \mathcal{F}^{-n+1} ((2\pi i)^n A)_X \otimes_{A_X} \mathcal{O}_{X^{an}} &:= 0. \end{aligned}$$

Définition 2.1.2 – Soit $n \in \mathbb{Z}$. Une A -variation de structures de Hodge pures¹ de poids n sur X est la donnée d'un couple (V, \mathcal{F}^\bullet) où :

- . V est un système local de A -modules de rangs finis sur \overline{X} . On note \mathcal{V} le fibré vectoriel complexe $V_{\mathbb{C}} \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{X^{an}}$ et ∇ la connexion de Gauss-Manin de \mathcal{V} ,
- . \mathcal{F}^\bullet est une filtration décroissante de \mathcal{V} par des sous-fibrés $(\mathcal{F}^k \mathcal{V})_{k \in \mathbb{Z}}$ (qui ne sont pas forcément intégrables),

tel que :

- i) Toutes les fibres de (V, \mathcal{F}^\bullet) sont des A -structures de Hodge pures de poids n ,
- ii) Transversalité de Griffiths : $\forall k \in \mathbb{Z}, \quad \nabla(\mathcal{F}^k \mathcal{V}) \subset \mathcal{F}^{k-1} \mathcal{V} \otimes \Omega_{X^{an}}^1$,
- iii) Polarisabilité : il existe un morphisme ψ de systèmes locaux sur \overline{X} :

$$\psi : V \otimes V \rightarrow ((2\pi i)^{-n} A)_X$$

compatible avec la filtration $\mathcal{F}^\bullet \otimes \mathcal{F}^\bullet$ de $\mathcal{V} \otimes \mathcal{V}$ et avec celle de $A(-n)_X^V$ et qui induit des polarisations sur toutes les fibres de (V, \mathcal{F}^\bullet) . Un tel morphisme ψ est appelé polarisation de (V, \mathcal{F}^\bullet) .

Exemples 2.1.3 –

- i) $A(n)_X^V$ est une A -variation de structures de Hodge pures de poids $-2n$ sur X ,
- ii) Soient $f : X \rightarrow Y$ un morphisme projectif, lisse, de dimension relative pure d entre variété algébriques complexes lisses et $k \in \mathbb{Z}$. On note $\overline{f} : \overline{X} \rightarrow \overline{Y}$ l'application continue induite par f . En appliquant le théorème d'Ehresmann (cf [V-Thm 9.3]), on voit que $R^k \overline{f}_* A$ est un système local sur \overline{Y} . D'après la théorie de Hodge, les fibres de $R^k \overline{f}_* A$ sont munies de A -structures de Hodge pures polarisables de poids k . Ces données définissent une variation de A -structures de Hodge pures de poids k sur Y que l'on note $R^k f_* A$. Les variations ainsi construites sont appelées variations géométriques.

Définition 2.1.4 – Un morphisme entre A -variations de structures de Hodge pures de poids n sur X est un morphisme entre les systèmes locaux de A -modules sous-jacents qui respecte les filtrations.

Notation 2.1.5 –

$VSH_A^n(X)$ la catégorie des variations de structures de Hodge pures de poids n sur X .

Définition 2.1.6 – Une A -variation de structures de Hodge mixtes² sur X est un triplet $(V, W_\bullet, \mathcal{F}^\bullet)$ où :

- . V est un système local de A -modules de rangs finis sur \overline{X} . On note \mathcal{V} le fibré vectoriel complexe $V_{\mathbb{C}} \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{X^{an}}$,

¹Les variations pures seront toujours supposées polarisables.

²Les variations de structures de Hodge mixtes seront toujours supposées avoir des gradués polarisables.

- . W_\bullet est une filtration croissante de $V_{\mathbb{Q}}$ par des sous-systèmes locaux de \mathbb{Q} -vectoriels,
- . \mathcal{F}^\bullet est une filtration décroissante de \mathcal{V} par des sous-fibrés $(\mathcal{F}^k \mathcal{V})_{k \in \mathbb{Z}}$ (qui ne sont pas forcément intégrables),

tel que :

- i) Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $(Gr_n^W V_{\mathbb{Q}}, Gr_n^W \mathcal{F}^\bullet)$ est une \mathbb{Q} -variation de structures de Hodge pures de poids n ,
- ii) Transversalité de Griffiths : $\forall k \in \mathbb{Z}, \quad \nabla(\mathcal{F}^k \mathcal{V}) \subset \mathcal{F}^{k-1} \mathcal{V} \otimes \Omega_{X^{an}}^1$.

La filtration W_\bullet (resp. \mathcal{F}^\bullet) est appelée filtration par le poids (resp. de Hodge).

Remarque 2.1.7 – Soit $\mathbb{V} := (V, \mathcal{F}^\bullet) \in Ob(VSH_A^n(X))$. On peut voir \mathbb{V} comme une A -variation de structures de Hodge mixtes sur X en ajoutant à (V, \mathcal{F}^\bullet) la filtration par le poids W_\bullet définie par :

$$\begin{aligned} W_n V_{\mathbb{Q}} &= V_{\mathbb{Q}}, \\ W_{n-1} V_{\mathbb{Q}} &= 0. \end{aligned}$$

Désormais, on ne considère que le cas $A = \mathbb{Q}$. Les \mathbb{Q} -variations de structures de Hodge mixtes que l'on considère dans la suite sont celles qui vérifie une condition supplémentaire d'admissibilité ("bon comportement à l'infini"). Pour la notion d'admissibilité, on renvoie à l'article [Ka]. On remarque que les \mathbb{Q} -variations de structures de Hodges pures sont admissibles et que si X est propre, toute \mathbb{Q} -variation de structures de Hodge mixtes sur X est admissible. Les variations admissibles satisfont la propriété d'extension suivante (due à Kashiwara) :

Théorème 2.1.8 [Ka-Prop 1.1.11, Thm 4.5.2] – Soit Y une variété algébrique complexe lisse et $U \hookrightarrow Y$ une immersion ouverte telle que $\text{codim}_Y(Y - U) \geq 2$. Alors, pour toute \mathbb{Q} -variation de structures de Hodge mixtes admissible \mathbb{V} sur U , il existe une \mathbb{Q} -variation de structures de Hodge mixtes admissible $\tilde{\mathbb{V}}$ sur Y telle que :

$$\tilde{\mathbb{V}}|_U = \mathbb{V}.$$

Définition 2.1.9 – Un morphisme entre variations de A -structures de Hodge mixtes sur X est un morphisme entre les systèmes locaux sous-jacents qui respecte les filtrations.

Notation 2.1.10 –

$VSHM_{\mathbb{Q}}(X)$ la catégorie des \mathbb{Q} -variations de structures de Hodge mixtes admissibles sur X .

Convention 2.1.11 – À l'aide de la remarque 2.1.7, on identifie $VSH_{\mathbb{Q}}^n(X)$ à la sous-catégorie pleine de $VSHM_{\mathbb{Q}}(X)$ dont les objets sont les $(V, W_\bullet, \mathcal{F}^\bullet)$ tels que pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq n$, $Gr_k^W V_{\mathbb{Q}} = 0$.

Pour terminer cette partie, on remarque que la catégorie abélienne $VSHM_{\mathbb{Q}}(X)$ peut être munie d'opérations "linéaires" et que l'on dispose d'un pullback et d'un produit externe pour la théorie $VSHM_{\mathbb{Q}}(\cdot)$.

- Soient $\mathbb{V}_1 := (V_1, W_{1\bullet}, \mathcal{F}_1^\bullet)$, $\mathbb{V}_2 := (V_2, W_{2\bullet}, \mathcal{F}_2^\bullet) \in \text{Ob}(VSHM_{\mathbb{Q}}(X))$. On définit $\mathbb{V}_1 \otimes \mathbb{V}_2 \in \text{Ob}(VSHM_{\mathbb{Q}}(X))$ comme étant le triplet $(V_1 \otimes V_2, W_{1\bullet} \otimes W_{2\bullet}, \mathcal{F}_1^\bullet \otimes \mathcal{F}_2^\bullet)$. De même, on définit $\underline{Hom}(\mathbb{V}_1, \mathbb{V}_2)$, $\mathbb{V}_1^\vee := \underline{Hom}(\mathbb{V}_1, \mathbb{Q}(0)_X^\vee)$ et pour $k \in \mathbb{N}^*$, $\otimes^k \mathbb{V}_1$, $\text{Sym}^k \mathbb{V}_1$.
- Soit $f : Y \rightarrow Y'$ un morphisme entre variétés algébriques complexes lisses. Le pullback par f d'une \mathbb{Q} -variation de structures de Hodge mixtes sur Y' est défini à l'aide des pullbacks qui existent pour les systèmes locaux et pour les fibrés vectoriels holomorphes (dans les deux contextes, les pullbacks sont des foncteurs exacts). On a donc un foncteur $f^* : VSHM_{\mathbb{Q}}(Y') \rightarrow VSHM_{\mathbb{Q}}(Y)$.
- Soient Y, Y' deux variétés algébriques complexes lisses, $\mathbb{V} \in \text{Ob}(VSHM_{\mathbb{Q}}(Y))$ et $\mathbb{V}' \in \text{Ob}(VSHM_{\mathbb{Q}}(Y'))$. En prenant le produit externe des systèmes locaux et des filtrations de \mathbb{V} et \mathbb{V}' , on définit $\mathbb{V} \boxtimes \mathbb{V}' \in \text{Ob}(VSHM_{\mathbb{Q}}(Y \times Y'))$.

2.2 Modules de Hodge mixtes

Notations 2.2.1 – Pour tout X variété algébrique complexe, et $f : Y \rightarrow Y'$ morphisme de variétés algébriques complexes, on note :

\overline{X}	$X(\mathbb{C})$ muni de la topologie transcendante,
\mathbb{Q}_X	le faisceau constant associé à \mathbb{Q} sur \overline{X} ,
$\mathbb{Q}_X\text{-mod}$	la catégorie des \mathbb{Q}_X -modules,
$D_c^b(\mathbb{Q}_X)$	la sous-catégorie pleine de $D^b(\mathbb{Q}_X\text{-mod})$ dont les objets sont les complexes dont tous les objets de cohomologies sont des faisceaux constructibles,
$\text{Perv}_{\mathbb{Q}}(X)$	la catégorie des faisceaux pervers sur X relativement à la perversité moitié,
\overline{f}	l'application continue $\overline{Y} \rightarrow \overline{Y'}$ induite par f .

Soit X une variété algébrique complexe.

On dispose d'un foncteur *real* : $D^b \text{Perv}_{\mathbb{Q}}(X) \rightarrow D_c^b(\mathbb{Q}_X)$ (cf [BBD-Prop 3.1.10]). Ce foncteur *real* est l'identité $\text{Perv}_{\mathbb{Q}}(X)$ et définit une équivalence de catégories (cf [Be2-Thm 1.3]).

M. Saito a défini une catégorie abélienne, la catégorie des \mathbb{Q} -modules de Hodge mixtes sur X , notée $MHM_{\mathbb{Q}}(X)$, qui est, par définition, équipée d'un foncteur $MHM_{\mathbb{Q}}(X) \rightarrow \text{Perv}_{\mathbb{Q}}(X)$, noté *rat*, qui est exact et fidèle (cf [Sa1], [Sa2]).

Si X est lisse, alors la catégorie $MHM_{\mathbb{Q}}(X)$ est construite comme une sous-catégorie pleine de la catégorie $MF_h(\mathcal{D}_X, \mathbb{Q})$ (cf [Sa1-Déf 5.1.14]) dont les objets sont de la forme :

$$((M, F^\bullet, W_\bullet), (K, W_\bullet), \alpha)$$

avec (M, F^\bullet) est un objet de $MF_h(\mathcal{D}_X)$, i.e. un \mathcal{D}_X -module algébrique régulier et holonome, M , muni d'une bonne filtration F^\bullet , $K \in \text{Ob}(\text{Perv}_{\mathbb{Q}}(X))$, W_\bullet une filtration croissante localement finie de K , et α un isomorphisme $DR(M) \xrightarrow{\sim} K \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$ respectant W_\bullet où DR

est le foncteur de de Rham. Dans ce cas, le foncteur rat est défini au niveau des objets par $rat(((M, F^\bullet, W_\bullet), (K, W_\bullet), \alpha)) = K$.

Théorème 2.2.2 [Sa2-Thm 0.1] – La théorie des catégories dérivées bornées de \mathbb{Q} -modules de Hodge mixtes $D^bMHM_{\mathbb{Q}}(\cdot)$ est munie des foncteurs standard f_* , $f_!$, f^* , $f^!$, \mathbb{D} , \boxtimes , \otimes , \underline{Hom} , pour f un morphisme de variétés algébriques complexes. De plus, ce formalisme est compatible avec celui de $D_c^b(\mathbb{Q}_X)$ via le foncteur For :

$$For := rat \circ real : D^bMHM_{\mathbb{Q}}(X) \rightarrow D^bPerv_{\mathbb{Q}}(\overline{X}) \rightarrow D_c^b(\mathbb{Q}_X),$$

e.g. si f est un morphisme de variétés algébriques complexes, $For \circ f_* = R\overline{f}_* \circ For$.

Remarques 2.2.3 – De [BBD-3.1.14] et des propriétés du foncteur rat , on déduit que :

- i) pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $For \circ H^n = {}^pH^n \circ For$,
- ii) le foncteur For est conservatif.

2.3 Variations versus modules pour une variété lisse

2.3.1 $VSHM_{\mathbb{Q}}(X)$ comme sous-catégorie pleine de $MHM_{\mathbb{Q}}(X)$

Soit X une variété algébrique complexe lisse de dimension pure d .

Définition 2.3.1 – Un \mathbb{Q} -module de Hodge mixte M est dit lisse si $rat(M)[-d]$ est un système local sur \overline{X} .

Notation 2.3.2 –

$MHM_{\mathbb{Q}}(X)^s$ la sous-catégorie pleine de $MHM_{\mathbb{Q}}(X)$ dont les objets sont les \mathbb{Q} -modules de Hodge mixtes M lisses.

M. Saito définit un foncteur ι de $VSHM_{\mathbb{Q}}(X)$ vers $MHM_{\mathbb{Q}}(X) \subset MF_hW(\mathcal{D}_X)$. Au niveau des objets, ι envoie $\mathbb{V} := (V, W_\bullet, F^\bullet) \in Ob(VSHM_{\mathbb{Q}}(X))$ sur l'objet de $MF_hW(\mathcal{D}_X)$ suivant :

$$((V \otimes \mathcal{O}_X, F^\bullet) \otimes (\Omega_X^d, F^\bullet), V[d], W_\bullet[d], Id).$$

Théorème 2.3.3 [Sa2-Rem. après le Thm 3.27] – Le foncteur ι induit une équivalence de catégories :

$$VSHM_{\mathbb{Q}}(X) \xrightarrow{\sim} MHM_{\mathbb{Q}}(X)^s.$$

Corollaire 2.3.4 – $MHM_{\mathbb{Q}}(Spec(\mathbb{C})) = SHM_{\mathbb{Q}}$.

2.3.2 Foncteurs standard de $D^bMHM_{\mathbb{Q}}(\cdot)$ appliqués aux objets lisses

Notations 2.3.5 – Pour tout X variété algébrique complexe lisse et $\mathbb{V} \in \text{Ob}(VSHM_{\mathbb{Q}}(X))$, on pose :

$\overline{\mathbb{V}}$ le système local sous-jacent à \mathbb{V} ,

$\mathbb{V}^\iota := \iota(\mathbb{V}) \in \text{Ob}(MHM_{\mathbb{Q}}(X))$.

Proposition 2.3.6 (Formules de projection) – Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme propre.

i) Pour tout $M \in \text{Ob}(D^bMHM_{\mathbb{Q}}(X))$ et $N \in \text{Ob}(D^bMHM_{\mathbb{Q}}(Y))$:

$$(f_*M) \otimes N = f_*(M \otimes f^*N),$$

ii) Si de plus Y est lisse et de dimension pure d_Y , alors pour tout $\mathbb{V} \in \text{Ob}(VSHM_{\mathbb{Q}}(Y))$:

$$(H^k f_* \mathbb{Q}(0)_X^M) \otimes \mathbb{V}^\iota[-d_Y] = H^{k-d_Y} f_* f^* \mathbb{V}^\iota.$$

Preuve :

i) On note Δ_X (resp. Δ_Y) l'immersion diagonale de X (resp. Y). On applique la proposition [Sa3-Prop 3.10] au carré cartésien :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{(Id \times f) \circ \Delta_X} & X \times Y \\ f \downarrow & & \downarrow f \times Id_Y \\ Y & \xrightarrow{\Delta_Y} & Y \times Y \end{array}$$

pour obtenir $f_!((Id \times f) \circ \Delta_X)^* = \Delta_Y^*(f \times Id_Y)_!$. Puisque f est propre, on a l'identité suivante :

$$(*) \quad f_*((Id \times f) \circ \Delta_X)^* = \Delta_Y^*(f \times Id_Y)_*.$$

Soient $M \in \text{Ob}(D^bMHM_{\mathbb{Q}}(X))$ et $N \in \text{Ob}(D^bMHM_{\mathbb{Q}}(Y))$. On a :

$$\begin{aligned} (f_*M) \otimes N &:= \Delta_Y^*(f_*M \boxtimes N) \\ &= \Delta_Y^*(f \times Id_Y)_*(M \boxtimes N) \quad (\text{cf [Sa3-3.1.9]}) \\ &= f_* \Delta_X^*(Id \times f)^*(M \boxtimes N) \quad (\text{cf } (*)) \\ &= f_* \Delta_X^*(M \boxtimes f^*N) \quad (\text{cf [Sa3-3.1.9]}) \\ &= f_*(M \otimes f^*N). \end{aligned}$$

ii) On applique le résultat i) avec $M = \mathbb{Q}(0)_X^M$ et $N = \mathbb{V}^\iota[-d_Y]$ et on trouve :

$$(f_* \mathbb{Q}(0)_X^M) \otimes \mathbb{V}^\iota[-d_Y] = f_* f^* \mathbb{V}^\iota[-d_Y].$$

On conclut en utilisant le fait que $\cdot \otimes \mathbb{V}^\iota[-d_Y]$ définit un endofoncteur de la catégorie $MHM_{\mathbb{Q}}(Y)$ qui est exact (cf [Sa3-Prop 4.6]).

□

On établit à présent cinq lemmes afin de prouver une propriété de compatibilité pour les pullbacks (cf prop 2.3.12).

Lemme 2.3.7 (*Dualité*) – Soit X une variété algébrique complexe lisse de dimension pure d . Alors, pour tout $\mathbb{V} \in \text{Ob}(VSHM_{\mathbb{Q}}(X))$:

$$\mathbb{D}(\mathbb{V}^\vee) = (\mathbb{V}^\vee)^\vee(d),$$

où \mathbb{V}^\vee est le dual de \mathbb{V} dans $VSHM_{\mathbb{Q}}(X)$, i.e. $\mathbb{V}^\vee = \underline{\text{Hom}}(\mathbb{V}, \mathbb{Q}(0)_X^\vee)$.

Preuve : Il suffit de calculer chacun des deux membres de l'égalité à démontrer (cf [Sa2-2.6] pour la définition de \mathbb{D}). \square

Lemme 2.3.8 (*Dualité et pullback sous un morphisme propre*) – Soit X (resp. Y) une variété algébrique complexe lisse de dimension pure d_X (resp. d_Y) et $f : X \rightarrow Y$ un morphisme propre. On pose $d := d_X - d_Y$. Alors, pour tout $\mathbb{V} \in \text{Ob}(VSHM_{\mathbb{Q}}(Y))$:

- i) $f^*(\mathbb{V}^\vee)[d] \in \text{Ob}(MHM_{\mathbb{Q}}(X)^s)$,
- ii) $(\mathbb{W}^\vee)^\vee = f^*(\mathbb{V}^\vee)^\vee[d]$, où $\mathbb{W} \in \text{Ob}(VSHM_{\mathbb{Q}}(X))$ est tel que $\mathbb{W}^\vee = f^*(\mathbb{V}^\vee)[d]$.

Preuve :

- i) Évident.
- ii) On pose :

$$\begin{aligned} L &:= \mathbb{V}^\vee[-d_Y], \\ L^* &:= (\mathbb{D}L)(-d_Y)[-2d_Y], \\ (f^*L)^* &:= (\mathbb{D}(f^*L))(-d_X)[-2d_X]. \end{aligned}$$

Pour tout $M \in \text{Ob}(D^b(MHM_{\mathbb{Q}}(X)))$, on a :

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{D^b(MHM_{\mathbb{Q}}(X))}(f^*L^*, M) &= \text{Hom}_{D^b(MHM_{\mathbb{Q}}(Y))}(L^*, f_*M) && \text{(adjonction)} \\ &= \text{Hom}_{D^b(MHM_{\mathbb{Q}}(Y))}(\mathbb{Q}(0)_Y^M, f_*M \otimes L) && \text{(cf [Sa3-4.6.1])} \\ &= \text{Hom}_{D^b(MHM_{\mathbb{Q}}(Y))}(\mathbb{Q}(0)_Y^M, f_*(M \otimes f^*L)) && \text{(cf prop 2.3.6)} \\ &= \text{Hom}_{D^b(MHM_{\mathbb{Q}}(X))}(\mathbb{Q}(0)_X^M, M \otimes f^*L) && \text{(adjonction)} \\ &= \text{Hom}_{D^b(MHM_{\mathbb{Q}}(X))}((f^*L)^*, M) && \text{(cf [Sa3-4.6.1])}. \end{aligned}$$

Donc $f^*L^* = (f^*L)^*$. Ensuite, à l'aide du lemme 2.3.7, on obtient :

$$\begin{aligned} f^*L^* &= f^*(\mathbb{V}^\vee)^\vee[-d_Y], \\ (f^*L)^* &= (\mathbb{W}^\vee)^\vee[-d_X]. \end{aligned}$$

\square

Lemme 2.3.9 (*Pureté pour les morphismes propres*) – Dans le contexte du lemme précédent, pour tout $\mathbb{V} \in \text{Ob}(VSHM_{\mathbb{Q}}(Y))$:

$$f^!\mathbb{V}^\vee = f^*\mathbb{V}^\vee(d)[2d].$$

Preuve : On introduit $\mathbb{W} \in \text{Ob}(VSHM_{\mathbb{Q}}(X))$ tel que $f^*(\mathbb{V}^\vee)^\vee[d] = \mathbb{W}^\vee$.

$$\begin{aligned} f^!\mathbb{V}^\vee &= \mathbb{D}f^*\mathbb{D}\mathbb{V}^\vee && \text{(cf [Sa3-3.1.3])} \\ &= \mathbb{D}f^*(\mathbb{V}^\vee)^\vee(d_Y) && \text{(cf lemme 2.3.7)} \\ &= (\mathbb{D}f^*(\mathbb{V}^\vee)^\vee[d])(-d_Y)[d] \\ &= (\mathbb{W}^\vee)^\vee(d)[d] && \text{(cf lemme 2.3.7)} \\ &= f^*\mathbb{V}^\vee(d)[2d] && \text{(cf lemme 2.3.8)}. \end{aligned}$$

\square

Lemme 2.3.10 (*Cas particulier de pullback*) – Soient X une variété algébrique complexe lisse, affine, de dimension pure d ($d \geq 1$) et Z une hypersurface lisse de X définie par $g = 0$ pour g une fonction régulière de X . On note $i : Z \hookrightarrow X$ l'immersion fermée. Alors, pour tout $\mathbb{V} \in \text{Ob}(VSHM_{\mathbb{Q}}(X))$ munie d'une filtration par le poids de longueur finie, on a l'identité :

$$(i^*\mathbb{V})^\iota = i^*\mathbb{V}^\iota[-1]$$

dans laquelle le i^* du membre de gauche (resp. droite) est le pullback pour $VSHM_{\mathbb{Q}}(\cdot)$ (resp. pour $D^bMHM_{\mathbb{Q}}(\cdot)$).

Preuve :

i) Au niveau pervers, on a l'identité :

$$(*) \quad \text{rat}((i^*\mathbb{V})^\iota) = \text{rat}(i^*\mathbb{V}^\iota[-1]).$$

Il reste à voir que cette identification respecte les filtrations.

- ii) En faisant une récurrence sur la longueur de la filtration par le poids et en utilisant l'hypothèse de finitude sur la filtration par le poids, il suffit de considérer le cas où \mathbb{V} est pure. On se place désormais dans ce cas et on note n le poids de \mathbb{V} .
- iii) D'après [Sa2-4.5.1], $H^{-1}(i^*\mathbb{V}^\iota)$ (resp. $H^1(i^!\mathbb{V}^\iota)(1)$) est de poids $\leq (n + d - 1)$ (resp. $\geq (n + d - 1)$). Du lemme 2.3.9, on déduit :

$$H^{-1}(i^*\mathbb{V}^\iota) = H^1(i^!\mathbb{V}^\iota)(1).$$

Et donc $H^{-1}(i^*\mathbb{V}^\iota)$ est pur de poids $(n + d - 1)$. Comme $(i^*\mathbb{V})^\iota$ est également pur de poids $(n + d - 1)$, la compatibilité avec la filtration par le poids est prouvée.

iv) Soit $j : U \hookrightarrow X$ l'immersion ouverte complémentaire de i . Par définition, $H^{-1}(i^*\mathbb{V}^\iota)$ est défini (cf [Sa2-4.2.7], [Sa3-3.3.3]) par la suite exacte (dans $MHM_{\mathbb{Q}}(X)$) suivante :

$$0 \rightarrow i_*H^{-1}(i^*\mathbb{V}^\iota) \rightarrow j_!(\mathbb{V}_U)^\iota \rightarrow \mathbb{V}^\iota \rightarrow 0.$$

On a, au niveau pervers, la suite exacte suivante :

$$0 \rightarrow \text{rat}(i_*(i^*\mathbb{V})^\iota) \xrightarrow{\varphi} \text{rat}(j_!(\mathbb{V}_U)^\iota) \rightarrow \text{rat}(\mathbb{V}^\iota) \rightarrow 0.$$

On vérifie alors que $\varphi \otimes_{\mathbb{Q}} Id_{\mathbb{C}}$ induit un morphisme au niveau des \mathcal{D}_X -modules filtrés à l'aide de la définition du \mathcal{D}_X -module filtré sous-jacent à $j_!(\mathbb{V}_U)^\iota$ (cf [Sa2-3.27, 3.10.8]).

□

Lemme 2.3.11 (*Fibres d'un modules lisse*) – Soient X une variété algébrique complexe lisse de dimension pure d et $x \in X(\mathbb{C})$. Pour tout $\mathbb{V} \in \text{Ob}(VSHM_{\mathbb{Q}}(X))$, on a :

$$\mathbb{V}_x = x^*(\mathbb{V})^\iota[-d]$$

où \mathbb{V}_x désigne la fibre de \mathbb{V} en x .

Preuve : Il s'agit d'un énoncé de nature locale. On peut donc supposer que X est affine, lisse et connexe. Alors, la filtration par le poids de \mathbb{V} est de longueur finie (par connexité de X^{an}). On applique alors d fois le lemme 2.3.10 pour prouver l'assertion.

□

Proposition 2.3.12 (*Pullback*) – Soient X (resp. Y) une variété algébrique complexe lisse de dimension pure d_X (resp. d_Y) et $f : X \rightarrow Y$ un morphisme. On pose $d := d_X - d_Y$. Pour tout $\mathbb{V} \in \text{Ob}(VSHM_{\mathbb{Q}}(Y))$, on a l'identité :

$$(f^*\mathbb{V})^\iota = f^*\mathbb{V}^\iota[d]$$

dans laquelle le f^* du membre de gauche (resp. droite) est le pullback pour $VSHM_{\mathbb{Q}}(\cdot)$ (resp. pour $D^bMHM_{\mathbb{Q}}(\cdot)$). En particulier,

$$(\mathbb{Q}(0)_X^V)^\iota = \mathbb{Q}(0)_X^M[d_X].$$

Preuve : Au niveau pervers, on a l'identité :

$$\text{rat}((f^*\mathbb{V})^\iota) = \text{rat}(f^*\mathbb{V}^\iota[d]).$$

Il reste à montrer que les filtrations de ces deux modules lisses coïncident, ce qu'il suffit de vérifier sur les fibres. Soient donc $x \in X(\mathbb{C})$ et $y := f(x)$. En appliquant le lemme 2.3.11, on trouve :

$$\begin{aligned} x^*(f^*\mathbb{V})^\iota &= \mathbb{V}_y[d_X], \\ x^*f^*\mathbb{V}^\iota[d] &= y^*\mathbb{V}^\iota[d] = \mathbb{V}_y[d_X]. \end{aligned}$$

□

Lemme 2.3.13 (*Produit externe*) – Soient X, Y des variétés algébriques complexes lisses. Pour tout $\mathbb{V} \in \text{Ob}(VSHM_{\mathbb{Q}}(X))$, $\mathbb{W} \in \text{Ob}(VSHM_{\mathbb{Q}}(Y))$, on a :

$$(\mathbb{V} \boxtimes \mathbb{W})^\iota = \mathbb{V}^\iota \boxtimes \mathbb{W}^\iota$$

où le \boxtimes du membre de gauche (resp. droite) est le produit externe pour $VSHM_{\mathbb{Q}}(\cdot)$ (resp. pour $MHM_{\mathbb{Q}}(\cdot)$).

Preuve : On déduit directement ce résultat de la définition de \boxtimes pour $VSHM_{\mathbb{Q}}(\cdot)$ et pour $MHM_{\mathbb{Q}}(\cdot)$ (cf [Sa2-2.17.4]). □

Proposition 2.3.14 (*Produit tensoriel*) – Soit X une variété algébrique complexe lisse de dimension pure d . Alors pour tout $\mathbb{V}, \mathbb{W} \in \text{Ob}(VSHM_{\mathbb{Q}}(X))$, on a :

$$(\mathbb{V} \otimes \mathbb{W})^\iota[d] = \mathbb{V}^\iota \otimes \mathbb{W}^\iota$$

où le \otimes du membre de gauche (resp. droite) est le produit tensoriel pour $VSHM_{\mathbb{Q}}(X)$ (resp. pour $D^bMHM_{\mathbb{Q}}(X)$).

Preuve : Soit $\Delta_X : X \rightarrow X \times X$ l'immersion diagonale. On a les deux identités suivantes :

$$\begin{aligned} \mathbb{V} \otimes \mathbb{W} &= \Delta_X^*(\mathbb{V} \boxtimes \mathbb{W}), \\ \mathbb{V}^\iota \otimes \mathbb{W}^\iota &:= \Delta_X^*(\mathbb{V}^\iota \boxtimes \mathbb{W}^\iota). \end{aligned}$$

On applique alors la proposition 2.3.12 et le lemme 2.3.13 pour conclure. □

Lemme 2.3.15 (Complément sur la dualité) – Soit X une variété algébrique complexe lisse de dimension pure d . Alors, pour tout $\mathbb{V} \in \text{Ob}(VSHM_{\mathbb{Q}}(X))$, $M, N \in \text{Ob}(D^bMHM_{\mathbb{Q}}(X))$, on a :

$$\text{Hom}_{D^bMHM_{\mathbb{Q}}(X)}(M \otimes \mathbb{V}^\vee, N) = \text{Hom}_{D^bMHM_{\mathbb{Q}}(X)}(M, N \otimes (\mathbb{V}^\vee)^\vee[-2d]).$$

Preuve : Soient $L := \mathbb{V}^\vee[-d]$ et $L^* := \mathbb{D}(\mathbb{V}^\vee)(-d)[-d]$. D'après [Sa3-4.6.1], on a la propriété suivante, notée $(*)$:

$$\forall M, N \in \text{Ob}(D^bMHM_{\mathbb{Q}}(X)), \quad \text{Hom}_{D^bMHM_{\mathbb{Q}}(X)}(M \otimes L, N) = \text{Hom}_{D^bMHM_{\mathbb{Q}}(X)}(M, N \otimes L^*).$$

De plus, du lemme 2.3.7, on déduit $L^* = (\mathbb{V}^\vee)^\vee[-d]$. \square

Proposition 2.3.16 (Pureté) – Soient $f : X \rightarrow Y$ un morphisme de dimension relative pure d entre variétés algébriques complexes lisses. Alors, pour tout $\mathbb{V} \in \text{Ob}(VSHM_{\mathbb{Q}}(Y))$,

$$f^!\mathbb{V}^\vee = f^*\mathbb{V}^\vee(d)[2d].$$

Preuve : On a $f^!\mathbb{V}^\vee = \mathbb{D}f^*\mathbb{D}\mathbb{V}^\vee$ (cf [Sa3-3.1.3]). On applique alors la proposition 2.3.12 et le lemme 2.3.7 pour démontrer l'identité voulue. \square

Lemme 2.3.17 – Soit X une variété algébrique complexe lisse de dimension pure d . Alors, pour tout $K \in \text{Ob}(D_c^b(\mathbb{Q}_X))$ tel que :

$$\forall i \in \mathbb{Z}, \quad H^i K \text{ est un système local}$$

on a :

$$\forall i \in \mathbb{Z}, \quad {}^p H^{i+d} K = H^i K[d].$$

Preuve : On procède par récurrence sur la "longueur" de K .

i) Supposons que pour tout $i \neq 0$, $H^i K = 0$. Alors, dans $D_c^b(\mathbb{Q}_X)$, $K \simeq H^0 K[0]$. Comme $K[d]$ est un faisceau pervers, on a :

$$\begin{aligned} {}^p H^{i+d} K &= 0 & \text{si } i \neq 0, \\ {}^p H^d K &= H^0 K[d]. \end{aligned}$$

ii) On fixe $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que pour tout $L \in \text{Ob}(D_c^b(\mathbb{Q}_X))$ tel que :

$$(*) \quad \forall i \notin [0, n], \quad H^i L = 0$$

le lemme soit prouvé. Soit $K \in \text{Ob}(D_c^b(\mathbb{Q}_X))$ tel que

$$\forall i \notin [0, n+1], \quad H^i K = 0.$$

À l'aide des foncteurs de troncation pour la t -structure classique de $D_c^b(\mathbb{Q}_X)$, on obtient un triangle distingué :

$$L \rightarrow K \rightarrow L \rightarrow H^{n+1} K[-(n+1)] \rightarrow L[1]$$

avec $L \in \text{Ob}(D_c^b(\mathbb{Q}_X))$ vérifiant la condition $(*)$. On obtient la conclusion du lemme pour K en considérant la suite exacte longue de cohomologie perverse associée à ce triangle, en utilisant l'hypothèse faite pour L et en appliquant i) à $H^{n+1} K[0]$.

iii) Par récurrence, le résultat est prouvé pour tout $K \in \text{Ob}(D_c^b(\mathbb{Q}_X))$. □

Proposition 2.3.18 (*Variations géométriques et formalisme de M. Saito*) – Soient $f : X \rightarrow Y$ un morphisme projectif, lisse, entre variétés algébriques complexes lisses de dimensions pures. On note d_X la dimension de X , d_Y celle de Y et on pose $d := d_X - d_Y$. Au moyen du foncteur image directe $f_* : D^b\text{MHM}_{\mathbb{Q}}(X) \rightarrow D^b\text{MHM}_{\mathbb{Q}}(Y)$, on construit une collection d'objets de $\text{MHM}_{\mathbb{Q}}(Y)$:

$$(H^k f_*(\mathbb{Q}(0)_X^V)^\iota)_{k \in \mathbb{Z}}$$

qui est reliée à la famille de variations géométriques :

$$(R^k f_* \mathbb{Q})_{k \in \mathbb{Z}}$$

par le résultat de comparaison :

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad H^k f_*(\mathbb{Q}(0)_X^V)^\iota = (R^{k+d} f_* \mathbb{Q})^\iota.$$

Preuve :

i) On applique le lemme 2.3.17 pour obtenir, au niveau pervers, l'identification suivante :

$$\text{rat}(H^k f_*(\mathbb{Q}(0)_X^V)^\iota) = \text{rat}((R^{k+d} f_* \mathbb{Q})^\iota).$$

En particulier, $H^k f_*(\mathbb{Q}(0)_X^V)^\iota$ est un module de Hodge lisse sur Y . On introduit $\mathbb{V}^k \in \text{Ob}(VSHM_{\mathbb{Q}}(Y))$ tel que $(\mathbb{V}^k)^\iota = H^k f_*(\mathbb{Q}(0)_X^V)^\iota$. Il suffit alors de voir que pour tout $y \in Y(\mathbb{C})$,

$$\mathbb{V}_y^k = (R^{k+d} f_* \mathbb{Q})_y.$$

Soit $y \in Y(\mathbb{C})$. On note X_y la fibre de f en y .

- ii) $(R^{k+d} f_* \mathbb{Q})_y$ est la structure de Hodge "classique" $H^{k+d}(X_y, \mathbb{Q})$ définie sur la cohomologie de Betti de la variété algébrique complexe projective lisse X_y .
- iii) D'après le lemme 2.3.11, la suite spectrale pour la composition $y^* \circ f_*$ appliquée à $(\mathbb{Q}(0)_X^V)^\iota$ a ses termes E_2^i non nuls concentrés sur la ligne $(-d_Y)$, d'où un isomorphisme :

$$\mathbb{V}_y^k = H^{-d_Y} y^* H^k f_*(\mathbb{Q}(0)_X^V)^\iota \xrightarrow{\sim} H^{k-d_Y} y^* f_*(\mathbb{Q}(0)_X^V)^\iota.$$

On applique le théorème de changement de base propre au carré cartésien (cf [Sa2-4.3.3], [Sa3-Prop 3.10])

$$\begin{array}{ccc} X_y & \xrightarrow{g} & X \\ f_y \downarrow & & \downarrow f \\ \text{Spec}(\mathbb{C}) & \xrightarrow{y} & Y \end{array}$$

pour obtenir $y^* f_*(\mathbb{Q}(0)_X^V)^\iota = (f_y)_* g^*(\mathbb{Q}(0)_X^V)^\iota = (f_y)_*(\mathbb{Q}(0)_{X_y}^V)^\iota[d_Y]$. On a donc

$$\mathbb{V}_y^k = H^k (f_y)_*(\mathbb{Q}(0)_{X_y}^V)^\iota = H^{k+d} (f_y)_* \mathbb{Q}(0)_{X_y}^M$$

et ainsi on s'est ramené au cas où $Y = \text{Spec}(\mathbb{C})$.

- iv) Il s'agit alors d'identifier les structures de Hodge $H^{k+d}(X_y, \mathbb{Q})$ et $H^{k+d} (f_y)_* \mathbb{Q}(0)_{X_y}^M$. Mais ceci est déjà connu (cf [HW-Cor A.1.7]). □

Lemme 2.3.19 (*Groupes Ext^1*) – Soient X une variété algébrique complexe lisse de dimension pure et $\mathbb{V}, \mathbb{W} \in Ob(VSHM_{\mathbb{Q}}(X))$. Le foncteur ι est exact et donc induit un morphisme :

$$\iota^1 : Ext_{VSHM_{\mathbb{Q}}(X)}^1(\mathbb{V}, \mathbb{W}) \rightarrow Ext_{MHM_{\mathbb{Q}}(X)}^1(\mathbb{V}^\iota, \mathbb{W}^\iota).$$

ι^1 est un isomorphisme.

Preuve : Soit d la dimension de X . Il suffit de prouver que si $M \in Ob MHM_{\mathbb{Q}}(X)$ s'insère dans une suite exacte dans $MHM_{\mathbb{Q}}(X)$

$$(S) \quad 0 \rightarrow W \rightarrow M \rightarrow V \rightarrow 0,$$

alors M est une \mathbb{Q} -variation de structures de Hodge mixtes, i.e. $For(M)$ est un système local décalé concentré en degré $(-d)$. On applique le foncteur rat à (S) pour obtenir la suite exacte de faisceaux pervers

$$0 \rightarrow \overline{W}[d] \rightarrow rat(M) \rightarrow \overline{V}[d] \rightarrow 0.$$

Cette suite donne lieu à un triangle exact dans $D^bPerv_{\mathbb{Q}}(\overline{X})$. On applique $real$ à ce dernier pour obtenir le triangle exacte suivant :

$$(T) \quad \overline{W}[d] \rightarrow For(M) \rightarrow \overline{V}[d] \rightarrow \overline{W}[d+1].$$

On considère la suite exacte longue de cohomologie pour le foncteur H^0 (t -structure classique). On constate que dans $D_c^b(\mathbb{Q}_X)$, on a un isomorphisme $For(M) \simeq (H^{-d}For(M))[d]$ et qu'on a une suite exacte de faisceaux de \mathbb{Q} -vectoriels :

$$0 \rightarrow \overline{W} \rightarrow H^{-d}For(M) \rightarrow \overline{V} \rightarrow 0.$$

On conclut que $H^{-d}For(M)$ est un système local à l'aide de la remarque suivante. □

Remarque 2.3.20 – Si L_1 et L_2 sont deux faisceaux constants de \mathbb{Q} -vectoriels sur un espace topologique connexe, simplement connexe, localement contractile Y , et si

$$0 \rightarrow L_1 \rightarrow L \rightarrow L_2 \rightarrow 0$$

est une suite exacte de faisceaux de \mathbb{Q} -vectoriels sur Y , alors L est un faisceau constant.

Chapitre 3

Courants

Après avoir rappelé les définitions de base de la théorie des courants (cf [D]), on précise la notion de courants à valeurs dans un fibré vectoriel. Ensuite, on explique comment l'espace des courants à valeurs dans un fibré vectoriel peut-être muni d'une topologie et on donne alors des critères de convergence. La fin de ce chapitre est consacrée au calcul d'un morphisme de bord dans la suite exacte longue de cohomologie locale. Ce dernier résultat est très important pour la suite.

Convention 3.0.21 – Dans ce chapitre, on écrit "variété différentielle" pour "variété différentielle de dimension pure".

Notation 3.0.22 – Si X est une variété différentielle, on note :

\mathcal{O}_X le faisceau des fonctions différentielles sur X à valeurs dans \mathbb{C} .

3.1 Courants sur une variété différentielle

On se donne X une variété différentielle de dimension pure n . L'espace des sections d'un fibré vectoriel complexe sur X est muni d'une topologie canonique. En effet, on a la proposition :

Proposition 3.1.1 [D-17.2] – Soit $p : E \rightarrow X$ un fibré vectoriel complexe N -dimensionnel au dessus de X . Il existe sur $\Gamma(X, E)$ une unique topologie d'espace localement convexe séparé définie par une suite de semi-normes et ayant la propriété suivante :

Pour qu'une suite $(u_k)_{k \geq 0}$ de sections de $\Gamma(X, E)$ converge vers 0, il faut et il suffit que pour toute carte (V, φ) de X telle que E soit trivialisable au-dessus de V , tout difféomorphisme

$$x \mapsto (\varphi(p(x)), v_1(x), \dots, v_N(x))$$

de $p^{-1}(V)$ sur $\varphi(V) \times \mathbb{C}^N$, où les v_j sont linéaires sur chaque fibre $p^{-1}(x)$, pour tout compact $K \subset \varphi(V)$, et tout multi-indice ν , la suite des restriction à K des $D^\nu w_{jk}$ converge uniformément vers 0 pour $1 \leq j \leq N$, avec $w_{jk}(t) = v_j(u_k(\varphi^{-1}(t)))$ pour $t \in \varphi(V)$.

Notations 3.1.2 – Soit $p \in \mathbb{N}$, $0 \leq p \leq n$. On note :

Ω_X^p le faisceaux p -formes différentielles complexes de X ,

$\Omega_{X,c}^p$ le faisceaux p -formes différentielles complexes à supports compacts de X .

On munit $\Omega_X^p(X)$ de la topologie donnée par la proposition 3.1.1. Pour $K \subset X$ compact, l'espace des p -formes différentielles complexes sur X à support dans K , noté $\Omega_X^p(X, K)$, hérite de la topologie induite qui en fait un espace de Fréchet.

Définition 3.1.3 [D-17.3.1] – *Un p -courant sur X est une forme linéaire*

$$T : \Omega_{X,c}^{n-p}(X) \rightarrow \mathbb{C}$$

dont la restriction à chacun des $\Omega_X^p(X, K)$ ($K \subset X$ compact) est continue. On note $\mathcal{A}_X^p(X)$ l'espace des p -courants sur X .

Remarques 3.1.4 –

- i) Les n -courants sont les distributions sur X .
- ii) Si X est un ouvert de \mathbb{R}^n , l'étude des p -courants sur X se ramène à celle des distributions [D-17.5.4].

On munit $\mathcal{A}_X^p(X)$ de la topologie faible qui est induite par par les semi-normes

$$T \in \mathcal{A}_X^p(X) \mapsto |T(\alpha)|$$

pour $\alpha \in \Omega_{X,c}^{n-p}(X)$ (cf [D-17.8]).

Remarque 3.1.5 – *Dans toute la suite, on ne considérera que cette topologie sur $\mathcal{A}_X^p(X)$.*

Grâce à cette structure topologique, on établit le critère suivant qui peut être vu comme un moyen de contruire des courants.

Proposition 3.1.6 [D-17.8.3] – *Soit $(T_k)_{k \geq 0}$ une suite d'éléments de $\mathcal{A}_X^p(X)$. Si pour tout $\omega \in \Omega_{X,c}^{n-p}(X)$, la suite $T_k(\omega)$ converge dans \mathbb{C} alors, la suite $(T_k)_{k \geq 0}$ converge dans $\mathcal{A}_X^p(X)$. De plus, si on note T la limite de $(T_k)_{k \geq 0}$, et si $\omega \in \Omega_{X,c}^{n-p}(X)$*

$$T(\alpha) = \lim_{k \rightarrow \infty} T_k(\omega).$$

Soient U un ouvert de \mathbb{R}^n et $(T_k)_{k \geq 0}$ une suite d'éléments de $\mathcal{A}_U^n(U)$ (i.e. une suite de distributions) qui converge vers $T \in \mathcal{A}_U^n(U)$. La proposition suivante fournit une information sur la convergence.

Proposition 3.1.7 [D-17.8.5] – *Soit $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction lisse à support compact. Alors, il existe une constante C , un nombre entier r tel que ;*

$$\forall k \geq 0, \quad |T_k(f)| \leq CM(f)$$

où $M(f)$ est le maximum des normes infinies sur K des dérivées de f d'ordre plus petit que r .

Soient U, V deux ouverts de X , $U \subset V$, et $K \subset U$ un compact de K . On a une application naturelle $\Omega_X^{n-p}(U, K) \rightarrow \Omega_X^{n-p}(V, K)$ (prolongement par 0 sur $V - U$). On en déduit une application de restriction

$$res_U^V : \mathcal{A}_X^p(V) := \mathcal{A}_V^p(V) \rightarrow \mathcal{A}_U^p(U) =: \mathcal{A}_X^p(U).$$

On définit ainsi un préfaisceau sur X noté \mathcal{A}_X^p .

Proposition 3.1.8 [D-17.4.2]– *Le préfaisceau \mathcal{A}_X^p est un faisceau.*

Soient $p, q \in \mathbb{N}$ tels que $p + q \leq n$. On a un accouplement canonique :

$$\begin{aligned} \psi_{p,q} : \mathcal{A}_X^p \otimes \Omega_X^q &\rightarrow \mathcal{A}_X^{p+q} \\ T \otimes \omega &\mapsto T(\omega \wedge \cdot) \end{aligned} .$$

En particulier, $\psi_{p,0}$ définit une structure de \mathcal{O}_X -module sur \mathcal{A}_X^p .

3.2 Courants sur une variété orientée

Soit X une variété différentielle orientée. Soient $U \subset X$ ouvert et $p \in \mathbb{N}$, $0 \leq p \leq n$. On dispose alors de l'intégrale

$$\int_U : \Omega_{X,c}^n(U) \rightarrow \mathbb{C}$$

grâce à laquelle, à $\omega \in \Omega_X^p(U)$, on associe un p -courant sur U noté T_ω défini par :

$$\begin{aligned} T_\omega : \Omega_{X,c}^{n-p}(U) &\rightarrow \mathbb{C} \\ \nu &\mapsto \int_U \omega \wedge \nu \end{aligned} .$$

L'association $\omega \in \Omega_X^p(U) \mapsto T_\omega \in \mathcal{A}_X^p(U)$ donne un morphisme de faisceaux noté Int_p :

$$Int_p : \Omega_X^p \rightarrow \mathcal{A}_X^p, \quad \omega \mapsto T_\omega.$$

Définition 3.2.1 – *Les p -courants sur X qui viennent d'une p -forme différentielle sur X via $Int_p(X)$ sont appelés courants lisses.*

S'il est faux que tout courant est dans l'image de $Int_p(X)$, on peut toujours (localement) approcher un courant par une suite de formes différentielles :

Proposition 3.2.2 [D-17.12.3] – *Si X est un ouvert de \mathbb{R}^n , l'image de $Int_p(X)$ est dense dans $\mathcal{A}_X^p(X)$.*

Soit $i : Y \hookrightarrow X$ une immersion fermée. On suppose que Y est orientée et on note m sa dimension. La proposition suivante se vérifie aisément.

Proposition 3.2.3 – *L'application*

$$\begin{aligned} \Omega_{X,c}^m(X) &\rightarrow \mathbb{C} \\ \omega &\mapsto \int_Y i^* \omega \end{aligned}$$

définit un $(n - m)$ -courant qu'on note δ_Y .

3.3 Functorialité

Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme de variétés différentielles. Soit n la dimension de X et m celle de Y .

3.3.1 Images directes

Si f est propre, alors pour tout $p \in \mathbb{N}$, $n - m \leq p \leq n$, le pullback des formes différentielles induit :

$$f^* : \Omega_{Y,c}^p(Y) \rightarrow \Omega_{X,c}^p(X).$$

Si $T \in \mathcal{A}_X^p(X)$, on définit l'image de T par f , $(m - n + p)$ -courant sur Y notée f_*T comme étant l'application

$$\begin{aligned} \Omega_{Y,c}^{n-p}(Y) &\rightarrow \mathbb{C} \\ \omega &\mapsto T(f^*\omega). \end{aligned}$$

Dans le cas où f est une immersion fermée et X est orientée, on a donc $\delta_X = f_* \int_X(\cdot)$.

3.3.2 Images inverses

Soit $p \in \mathbb{N}$, $n - m \leq p \leq n$. On fait l'hypothèse (H) suivante :

$$(H) \quad \forall \omega \in \Omega_{X,c}^p(X), \text{ il existe } \omega^f \in \Omega_{X,c}^{m-n+p}(Y) \text{ (nécessairement unique) tel que } f_*T_\omega = T_{\omega^f}.$$

Soit T un p -courant sur Y . On définit alors le pullback de T par f , p -courant sur X noté f^*T par :

$$\begin{aligned} f^*T : \Omega_{X,c}^{n-p}(X) &\rightarrow \mathbb{C} \\ \omega &\mapsto T(\omega^f). \end{aligned}$$

Si f est un difféomorphisme, alors la condition (H) est bien sûr vérifiée. On dispose donc d'un pullback et celui-ci est continu. En outre, si $\omega \in \Omega_X^p(X)$, alors

$$f^*T_\omega = T_{f^*\omega}.$$

On mentionne le résultat suivant (qui n'est pas utilisé dans la suite).

Si $f : X_1 \rightarrow X_2$ est une submersion entre variétés différentielles orientées, la propriété (H) est satisfaite (cf intégration sur les fibres) [D-17.5-Exercice 9].

Remarques 3.3.1 –

- i) Si $f : \{0\} \hookrightarrow \mathbb{R}$ est l'inclusion canonique, alors f ne satisfait pas la propriété (H). En effet, la masse de Dirac en 0 n'admet pas de densité.
- ii) Soit $(\omega_k)_{k \geq 0}$ une suite de p -formes différentielles telle qu'il existe ω une p -forme différentielle telle que

$$T_{\omega_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} T_\omega$$

alors, on n'a pas nécessairement

$$T_{f^*\omega_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} T_{f^*\omega}$$

En effet, on peut trouver une suite de fonctions lisses $(f_k)_{k \geq 0}$ sur \mathbb{R} qui vérifie

$$T_{f_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

et telle que la suite $(f_k(0))_{k \geq 0}$ ne tend pas vers 0.

3.4 Courants à valeurs dans un fibré vectoriel

Soient E un fibré vectoriel complexe de dimension N au dessus de X et $p \in \mathbb{N}$, $0 \leq p \leq n$.

3.4.1 Définition

Définition 3.4.1 – Le faisceau des p -courants sur X à valeurs dans E noté $\mathcal{A}_X^p(E)$ est $\mathcal{A}_X^p \otimes_{\mathcal{O}_X} E$.

$\mathcal{A}_X^p(E)$ est un \mathcal{O}_X -module, d'où la proposition suivante :

Proposition 3.4.2 – Le faisceau $\mathcal{A}_X^p(E)$ est fin.

3.4.2 Notion de Convergence

On cherche à définir une notion de convergence pour les courants à valeurs dans un fibré vectoriel.

Cas où le fibré est trivial

Si E est le fibré trivial de rang N sur X , alors on a la décomposition

$$\mathcal{A}_X^p(E) = (\mathcal{A}_X^p)^N$$

relativement à la base canonique de \mathbb{C}^N notée (e_1, \dots, e_N) et on a une notion naturelle de convergence sur $\Gamma(X, \mathcal{A}_X^p(E))$. En effet, soit $(T_k)_{k \geq 0}$ une suite d'éléments de $\Gamma(X, \mathcal{A}_X^p(E))$ et $T \in \Gamma(X, \mathcal{A}_X^p(E))$. Pour tout $k \geq 0$, on écrit

$$T_k = \sum_{1 \leq i \leq N} T_k^i e_i$$

la décomposition de T_k relativement à la base canonique de \mathbb{C}^N . On décompose de même T ,

$$T = \sum_{1 \leq i \leq N} T^i e_i.$$

Définition 3.4.3 – Dans cette situation, on dit que $(T_k)_{k \geq 0}$ tend vers T dans $\Gamma(X, \mathcal{A}_X^p(E))$ et on écrit $T_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} T$ si pour tout $(\omega_1, \dots, \omega_N) \in (\Omega_{X,c}^{n-p}(X))^{\bar{N}}$

$$(T_k^1(\omega_1), \dots, T_k^N(\omega_N)) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} (T^1(\omega_1), \dots, T^N(\omega_N)) \text{ dans } \mathbb{C}^N.$$

Soit $\varphi : E \rightarrow E$ un automorphisme de fibré vectoriel donné relativement à la base canonique de \mathbb{C}^N , par

$$\begin{aligned} X &\rightarrow GL_N(\mathbb{C}) \\ x &\mapsto (\varphi_{ij}(x))_{1 \leq i, j \leq N} \end{aligned}$$

où $\varphi_{ij} \in \mathcal{O}_X(X)$. Alors, φ induit un isomorphisme

$$Id \otimes \varphi^* : \Gamma(X, \mathcal{A}_X^p(E)) \xrightarrow{\sim} \Gamma(X, \mathcal{A}_X^p(E))$$

qu'on explicite. Si $T = \sum_{1 \leq i \leq N} T^i e_i$, alors

$$\begin{aligned} Id \otimes \varphi^*(T) &= \sum_{1 \leq i \leq N} \sum_{1 \leq j \leq N} T^i \otimes \varphi_{ji} e_j \\ &= \sum_{1 \leq i \leq N} \sum_{1 \leq j \leq N} \varphi_{ji} T^i \otimes e_j \\ &= \sum_{1 \leq j \leq N} \left(\sum_{1 \leq i \leq N} \varphi_{ji} T^i \right) \otimes e_j. \end{aligned}$$

De cette formule, on déduit le lemme :

Lemme 3.4.4 – *Etant donnés $(T_k)_{k \geq 0}$ une suite d'éléments de $\Gamma(X, \mathcal{A}_X^p(E))$ et $T \in \Gamma(X, \mathcal{A}_X^p(E))$, on a l'équivalence :*

$$T_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} T \iff Id \otimes \varphi^*(T_k) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} Id \otimes \varphi^*(T).$$

Cas général

On étend la définition 3.4.3 comme suit.

Définition 3.4.5 – *Si E est un fibré vectoriel complexe de rang N sur X , si $(T_k)_{k \geq 0}$ est une suite d'éléments de $\Gamma(X, \mathcal{A}_X^p(E))$ et $T \in \Gamma(X, \mathcal{A}_X^p(E))$, on dit que*

$$(T_k)_{k \geq 0} \text{ tend vers } T \text{ dans } \Gamma(X, \mathcal{A}_X^p(E))$$

et on note $T_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} T$ si et seulement si, pour tout (V, φ) où V est un ouvert de X et φ est un isomorphisme de fibrés vectoriels,

$$\begin{array}{ccc} V \times \mathbb{C}^N & \xrightarrow{\varphi} & E_V \\ & \searrow & \downarrow pr_1 \\ & & V \end{array}$$

$$(Id \otimes \varphi^*(T_{k|_V})) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} Id \otimes \varphi^*(T|_V) \text{ dans } \Gamma(V, \mathcal{A}_V^p(V \times \mathbb{C}^N))$$

eu sens de la définition 3.4.3.

Remarque 3.4.6 – *Le lemme 3.4.4 assure que cette définition est compatible avec la définition 3.4.3.*

3.4.3 Critères de Convergence

Proposition 3.4.7 – *Si E est un fibré vectoriel complexe de rang N sur X et si $(T_k)_{k \geq 0}$ est une suite d'éléments de $\Gamma(X, \mathcal{A}_X^p(E))$ telle que pour tout (V, φ) où V est un ouvert de X et φ est un isomorphisme de fibrés vectoriels,*

$$\begin{array}{ccc} V \times \mathbb{C}^N & \xrightarrow{\varphi} & E_V \\ & \searrow & \downarrow pr_1 \\ & & V \end{array}$$

tout $(\omega_1, \dots, \omega_N) \in (\Omega_{V,c}^{n-p}(V))^N$, la suite $(\overline{T}_k^1(\omega_1), \dots, \overline{T}_k^N(\omega_N))_{k \geq 0}$ converge dans \mathbb{C}^N , où pour tout $k \geq 0$,

$$Id \otimes \varphi^*(T_k) = \sum_{1 \leq i \leq N} \overline{T}_k^i e_i$$

est la décomposition de $Id \otimes \varphi^*(T_k)$ relativement à la base canonique de \mathbb{C}^N , alors, il existe un unique $T \in \Gamma(X, \mathcal{A}_X^p(E))$ tel que $T_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} T$.

Preuve : Cette assertion résulte de la proposition 3.1.6, du lemme 3.4.4 et de la définition de la notion de convergence. \square

Remarque 3.4.8 – Dans la définition 3.4.5 et dans la proposition précédente, on peut remplacer les couples (V, ϕ) par les triplets (U, f, φ) où U est un ouvert de \mathbb{R}^N , $f : U \rightarrow X$ est un difféomorphisme sur son image et φ est un isomorphisme de fibrés vectoriels

$$\begin{array}{ccc} U \times \mathbb{C}^N & \xrightarrow{\varphi} & E_{\varphi(U)} \\ \downarrow pr_1 & & \downarrow \\ U & \xrightarrow{f} & \varphi(U) \end{array}$$

et $Id \otimes \varphi^*$ par $f^* \otimes \varphi^*$ et ne pas considérer tous les triplets (U, f, φ) de cette forme, mais seulement une famille $\{(U_i, f_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ de tels satisfaisant

$$\bigcup_{i \in I} f_i(U_i) = X$$

sans modifier ni la notion de convergence ni le critère précédent. Pour le voir, on utilise des partitions de l'unité. La preuve est analogue à celle de [D-17.4.2].

Soient U un ouvert de \mathbb{R}^N , $(\omega_k)_{k \geq 0}$ une suite d'éléments de $\Gamma(U, \Omega_U^p(U \times \mathbb{C}^N))$, $\omega \in \Gamma(U, \Omega_U^p(U \times \mathbb{C}^N))$. Pour tout p -uplet $I = (i_1, \dots, i_p)$, $i_1 < \dots < i_p$, on pose

$$dx_I := dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}.$$

Ainsi, $(dx_I)_I$ forme une base de $\Omega_U^p(U)$. Pour tout $k \geq 0$, soit

$$\omega_k = \sum_I f_k^I dx_I$$

où $f_k^I \in \mathcal{O}_U(I)$ la décomposition de ω_k relativement à $(dx_I)_I$. De même, on écrit

$$\omega = \sum_I f^I dx_I.$$

Définition 3.4.9 – On dit que $(\omega_k)_{k \geq 0}$ converge uniformément vers ω sur les compacts si et seulement si pour tout compact K de U , pour tout I , la suite de fonctions à valeurs complexes $(f_k^I)_{k \geq 0}$ converge uniformément vers f^I sur K .

Proposition 3.4.10 – On suppose que X est orientée. Soit $(\omega_k)_{k \geq 0}$ une suite d'éléments de $\Gamma(X, \Omega_X^p(E))$ et $\omega \in \Gamma(X, \Omega_X^p(E))$ tels que la condition (C) suivante soit satisfaite :

Il existe une famille $\{(U_i, f_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ comme dans la remarque 3.4.8 telle que

i) $\bigcup_{i \in I} f_i(U_i) = X,$

ii) Pour tout $i \in I$, $(f_i^* \otimes \varphi_i^*(\omega_k))_{k \geq 0}$ converge uniformément vers $(f_i^* \otimes \varphi_i^*(\omega))$ sur les compacts de U_i .

Alors $(Int_p \otimes Id(\omega_k))_{k \geq 0} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} Int_p \otimes Id(\omega).$

Preuve : L'assertion est conséquence de la proposition 3.4.7 et de la remarque 3.4.8. □

3.5 Complexe des courants associé à un fibré vectoriel plat

Soit E un fibré vectoriel complexe de dimension N au dessus de X muni d'une connexion plate $\nabla : E \rightarrow \Omega_X^1 \otimes E$. On note $(\Omega_X^\bullet \otimes E, \nabla^\bullet)$ le complexe de de Rham de (E, ∇) .

On note ∇'^p la composition :

$$\mathcal{A}_X^p \otimes E \xrightarrow{Id \otimes \nabla} \mathcal{A}_X^p \otimes \Omega_X^1 \otimes E \xrightarrow{\psi_{p,1} \otimes Id} \mathcal{A}_X^{p+1} \otimes E \xrightarrow{\times (-1)^p} \mathcal{A}_X^{p+1} \otimes E.$$

Remarque 3.5.1 – Dans le cas où E est le fibré trivial de rang 1 et où ∇ est la connexion de Gauss-Manin, on obtient la notion de dérivée de courants. Cette dérivée est continue.

Lemme 3.5.2 – Pour $p \in \mathbb{N}$, $0 \leq p \leq n-1$, $\nabla'^{p+1} \circ \nabla'^p = 0$.

Preuve : Le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccccccc}
 \mathcal{A}_X^p \otimes E & \xrightarrow{Id \otimes \nabla} & \mathcal{A}_X^p \otimes \Omega_X^1 \otimes E & \xrightarrow{(-1)^p \psi_{p,1} \otimes Id} & \mathcal{A}_X^{p+1} \otimes E & \xrightarrow{Id \otimes \nabla} & \mathcal{A}_X^{p+1} \otimes \Omega_X^1 \otimes E & \xrightarrow{(-1)^{p+1} \psi_{p+1,1} \otimes Id} & \mathcal{A}_X^{p+2} \otimes E \\
 \parallel & & & \searrow & & & & & \parallel \\
 \mathcal{A}_X^p \otimes E & \xrightarrow{Id \otimes \nabla} & \mathcal{A}_X^p \otimes \Omega_X^1 \otimes E & \xrightarrow{Id \otimes \nabla} & \mathcal{A}_X^p \otimes \Omega_X^1 \otimes \Omega_X^1 \otimes E & \xrightarrow{\wedge \otimes Id} & \mathcal{A}_X^p \otimes \Omega_X^2 \otimes E & \xrightarrow{\psi_{p,2} \otimes Id} & \mathcal{A}_X^{p+2} \otimes E \\
 & & & \searrow & & & & & \\
 & & & & & & & & \nabla'^{p+1} \circ \nabla'^p
 \end{array}$$

et ∇ est plate. □

Proposition 3.5.3 – Soit $\omega \in \Gamma(X, \mathcal{A}_X^p(E))$, et $\nu \in \Gamma(X, \mathcal{A}_X^{p+1}(E))$ tels que :

$$\nabla'^p(\omega) = \nu.$$

Alors, ν est dans l'image de $Int_p \otimes Id_E$.

Preuve : Il s'agit d'une propriété locale. On peut donc supposer que :

- i) X est un ouvert de \mathbb{R}^n ,
- ii) E est le fibré vectoriel trivial de rang N au dessus de X ,
- iii) ∇ est la connexion de Gauss-Manin.

On se ramène alors au cas où $N = 1$ et où $p = 0$ (cf remarque 3.1.4 ii). Après ces réductions, l'assertion à démontrer est que tout courant dont la dérivée est une fonction lisse est lisse, ce qui est un résultat classique de la théorie des distributions. \square

Définition 3.5.4 *Le complexe des courants sur X à valeurs dans E est le complexe*

$$[.. \rightarrow 0 \rightarrow \mathcal{A}_X^0(E) \xrightarrow{\nabla^0} \mathcal{A}_X^1(E) \xrightarrow{\nabla^1} \mathcal{A}_X^2(E) \xrightarrow{\nabla^2} .. \xrightarrow{\nabla^{n-1}} \mathcal{A}_X^n(E) \rightarrow 0 \rightarrow ..].$$

$\text{deg. } 0 \qquad \text{deg. } 1 \qquad \text{deg. } 2 \qquad \text{deg. } n$

Proposition 3.5.5 – *Le morphisme de complexes*

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 [.. \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \Omega_X^0(E) & \xrightarrow{\nabla^0} & \Omega_X^1(E) & \xrightarrow{\nabla^1} & .. & \xrightarrow{\nabla^{n-1}} & \Omega_X^n(E) & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & ..] \\
 & \parallel & & \downarrow \text{Int}_0 \otimes Id & & \downarrow \text{Int}_1 \otimes Id & & & & \downarrow \text{Int}_n \otimes Id & & \parallel & & \\
 [.. \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \mathcal{A}_X^0(E) & \xrightarrow{\nabla^0} & \mathcal{A}_X^1(E) & \xrightarrow{\nabla^1} & .. & \xrightarrow{\nabla^{n-1}} & \mathcal{A}_X^n(E) & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & ..]
 \end{array}$$

est un quasi-isomorphisme.

Preuve : L'assertion est de nature locale. Il suffit de prouver le résultat pour X une boule ouverte de \mathbb{R}^n et $E = X \times \mathbb{C}^N \xrightarrow{pr_1} X$ le fibré trivial au dessus de X muni de la connexion de Gauss-Manin ∇_{GM} . On se ramène alors au cas $N = 1$. Pour la preuve du résultat dans cette situation, on renvoie à [GH-p. 382]. \square

Corollaire 3.5.6 – *La suite*

$$0 \longrightarrow Ker(\nabla) \xrightarrow{\text{Int}_0 \otimes Id} \mathcal{A}_X^0(E) \xrightarrow{\nabla^0} \mathcal{A}_X^1(E) \xrightarrow{\nabla^1} .. \xrightarrow{\nabla^{n-1}} \mathcal{A}_X^n(E) \longrightarrow 0$$

est une suite exacte longue.

3.6 Courants et morphisme de bord en cohomologie locale

3.6.1 Exemples de morphismes de bord

Cas 1

Soient \bar{B} la boule unité centrée en 0 de \mathbb{C}^d , $S := \partial\bar{B}$ la sphère unité et B' une boule ouverte de \mathbb{C}^d centrée en 0 contenant \bar{B} .

Soit $i : \{0\} \hookrightarrow B'$ et $j : U := B' - \{0\} \hookrightarrow B'$ les inclusions canoniques. La variété différentielle B' est munie d'une orientation canonique. On rappelle comment on peut expliciter l'isomorphisme

$$\beta : H^{2d-1}(U, \mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}$$

qui est la composition du morphisme de bord de la suite exacte longue de cohomologie locale

$$\partial : H^{2d-1}(U, \mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} H_{\{0\}}^{2d}(B', \mathbb{C})$$

et de l'isomorphisme induit par la pureté ($i^! \mathbb{C} \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}(-d)[-2d]$, complexifié de l'isomorphisme rationnel) au niveau cohomologique

$$p : H_{\{0\}}^{2d}(B', \mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}.$$

On introduit l'isomorphisme canonique

$$Tr : H_c^{2d}(B', \mathbb{C}^d) \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}$$

qui est donné par $[\omega] \mapsto (2\pi i)^{-d} \int_{B'} \omega$, où $\omega \in Z^{2d}(\Omega_{B' \infty})$. p est alors décrit par :

$$c \in H_{\{0\}}^{2d}(B', \mathbb{C}) \mapsto Tr(c \cup 1_0)$$

où $1_0 \in H_c^0(\{0\}, \mathbb{C})$ est la fonction constante 1 et \cup est la dualité d'Alexander :

$$\cup : H_{\{0\}}^{2d}(B', \mathbb{C}) \times H_c^0(\{0\}, \mathbb{C}) \rightarrow H_c^{2d}(B', \mathbb{C}^d)$$

On sait alors (cf [I- V.7]) que :

$$\beta([\omega]) = (2\pi i)^{-d} \int_S \omega|_S, \quad \omega \in Z^{2d-1}(\Omega_{U \infty}(U))$$

où l'orientation de S est induite par l'orientation de B .

Cas 2

On garde les notations du cas 1. On se donne de plus B'' , une boule centrée en 0 de \mathbb{C}^d et on considère les immersions complémentaires :

$$\begin{aligned} i' : B'' &\hookrightarrow B'' \times B', b'' \mapsto (b'', 0) \quad \text{et} \\ j' : U' := (B'' \times B') - i'(B'') &\hookrightarrow B'' \times B' \end{aligned}$$

On veut, comme dans le cas 1, expliciter l'isomorphisme :

$$\beta' : H^{2d-1}(U', \mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}$$

composé du morphisme de bord de la suite exacte longue de cohomologie locale et de l'isomorphisme de pureté. Le morphisme ι défini par :

$$\iota : U \hookrightarrow U', \quad b' \mapsto (0, b')$$

induit isomorphisme :

$$\iota^* : H^{2d-1}(U', \mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} H^{2d-1}(U, \mathbb{C})$$

car B'' est contractile. Par functorialité, on a le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} H^{2d-1}(U', \mathbb{C}) & \xrightarrow{\beta'} & \mathbb{C} \\ \simeq \downarrow \iota^* & & \parallel \\ H^{2d-1}(U, \mathbb{C}) & \xrightarrow{\beta} & \mathbb{C}. \end{array}$$

D'après l'étude du cas 1, β' s'explique comme suit :

$$\beta'([\omega]) = (2\pi i)^{-d} \int_{\{0\} \times S} \omega|_{\{0\} \times S}, \quad \omega \in Z^{2d-1}(\Omega_{U' \infty}(U')).$$

3.6.2 Un calcul avec les courants

On considère la situation du cas 2. Soit $c \in \mathcal{A}_{B'' \times B'}^{2d-1}(B'' \times B')$ un courant qui satisfait l'équation :

$$(*) \quad dc = (2\pi i)^d \delta_{B'' \times \{0\}}.$$

On cherche à calculer l'image sous β' de la classe $[c|_{U'}]$.

Comme on ne dispose pas, a priori, de pullback pour les immersions fermées dans le contexte des courants, on ne peut pas directement utiliser la conclusion de l'étude du cas 2. Soient $\xi \in \mathbb{Z}^{2d-1}(\Omega_{U',\infty}(U'))$ et $c' \in \mathcal{A}_{U'}^{2d-2}(U')$ tels que :

$$c|_{U'} = T_\xi + dc'.$$

Alors on a $[c|_{U'}] = [T_\xi]$ et donc $\beta'([c|_{U'}]) = \beta'(\xi)$.

D'après la dualité de Poincaré, il existe $\nu \in \mathbb{Z}^{2d'+1}(\Omega_{U',c}(U'))$ tel que :

$$\forall \omega \in \mathbb{Z}^{2d-1}(\Omega_{U',\infty}(U')), \quad \int_{\{0\} \times S} \omega|_{\{0\} \times S} = \int_{U'} \omega \wedge \nu.$$

Lemme 3.6.1 – $\beta'([c|_{U'}]) = (2\pi i)^{-d} c|_{U'}(\nu)$.

Preuve : $c|_{U'}(\eta) = T_\omega(\nu) + dc'(\nu) = \int_{U'} \omega \wedge \nu = \beta'([\omega]) = \beta'([c|_{U'}])$. \square

Soient $(\omega_k)_{k \geq 0}$ une suite d'éléments de $\Omega_{B'' \times B'}^{2d-1}(B'' \times B')$ telle que

$$T_{\omega_k} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} c$$

et $\varphi : \{0\} \times B' \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction lisse à support compact qui vaut 1 sur $\{0\} \times \overline{B}$.

Lemme 3.6.2 – La suite $\left(\int_{\{0\} \times B'} \varphi \times d\omega_k|_{\{0\} \times B'} \right)_{k \geq 0}$ converge et :

$$c|_{U'}(\eta) = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\{0\} \times B'} \varphi \times d\omega_k|_{\{0\} \times B'}.$$

Preuve : On a $c|_{U'}(\eta) = \lim_{k \rightarrow \infty} T_{\omega_k}(\eta) = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\{0\} \times S} \omega_k|_{\{0\} \times S}$. D'après le théorème de Stokes,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\{0\} \times S} \omega_k|_{\{0\} \times S} = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\{0\} \times \overline{B}} d\omega_k|_{\{0\} \times \overline{B}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\{0\} \times \overline{B}} \varphi|_{\{0\} \times \overline{B}} \times d\omega_k|_{\{0\} \times \overline{B}}.$$

Soit B''' une boule ouverte de \mathbb{C}^d centrée en 0, telle que $\text{supp}(\varphi) \subset B'''$ et dont l'adhérence dans \mathbb{C}^d notée \overline{B}''' est incluse dans B' . Pour tout pour tout $k \geq 0$, on a :

$$\int_{\{0\} \times B'} \varphi \times d\omega_k|_{\{0\} \times B'} = \int_{\{0\} \times (\overline{B}''' - B)} \varphi|_{\{0\} \times (\overline{B}''' - B)} \times d\omega_k|_{\{0\} \times (\overline{B}''' - B)} + \int_{\{0\} \times \overline{B}} \varphi|_{\{0\} \times \overline{B}} \times d\omega_k|_{\{0\} \times \overline{B}}.$$

On applique à nouveau le théorème de Stokes pour voir que

$$\int_{\{0\} \times (\overline{B^m} - B)} \varphi|_{\{0\} \times (\overline{B^m} - B)} \times d\omega_{k|_{\{0\} \times (\overline{B^m} - B)}} = A_k - B_k$$

avec $A_k = \int_{\{0\} \times \partial \overline{B^m}} \varphi|_{\{0\} \times \partial \overline{B^m}} \times \omega_{k|_{\{0\} \times \partial \overline{B^m}}} - \int_{\{0\} \times S} \varphi|_{\{0\} \times S} \times \omega_{k|_{\{0\} \times S}}$

et $B_k = \int_{\{0\} \times (\overline{B^m} - B)} d\varphi|_{\{0\} \times (\overline{B^m} - B)} \omega_{k|_{\{0\} \times (\overline{B^m} - B)}}.$

i) Par dualité de Poincaré, il existe $\eta', \eta_0 \in Z^{2d'+1}(\Omega_{U',c}(U'))$ tel que :

$$\forall \omega \in \mathbb{Z}^{2d-1}(\Omega_{U',\infty}(U')), \quad \int_{\{0\} \times \partial \overline{B^m}} \omega|_{\{0\} \times \partial \overline{B^m}} \times \varphi|_{\{0\} \times \partial \overline{B^m}} = \int_{U'} \omega \wedge \eta' \quad \text{et}$$

$$\int_{\{0\} \times S} \omega|_{\{0\} \times S} \times \varphi|_{\{0\} \times S} = \int_{U'} \omega \wedge \eta_0.$$

On a ainsi :

$$A_k = \int_{U'} \omega_{k|_{U'}} \wedge (\eta' - \eta_0).$$

La suite $(A_k)_{k \geq 0}$ converge donc et :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A_k = c_{U'}(\eta' - \eta_0).$$

Des calculs suivants, on déduit que $\lim_{k \rightarrow \infty} A_k = 0$:

$$\begin{aligned} c_{U'}(\eta' - \eta_0) &= T_\omega(\eta' - \eta_0) + dc(\eta' - \eta_0) \\ &= \int_{U'} \omega \wedge \eta' - \int_{U'} \omega \wedge \eta_0 \\ &= \int_{\{0\} \times \partial \overline{B^m}} \omega|_{\{0\} \times \partial \overline{B^m}} \times \varphi|_{\{0\} \times \partial \overline{B^m}} - \int_{\{0\} \times S} \omega|_{\{0\} \times S} \times \varphi|_{\{0\} \times S} \\ &= \int_{\{0\} \times (\overline{B^m} - B)} \varphi|_{\{0\} \times (\overline{B^m} - B)} \times d\omega_{\{0\} \times (\overline{B^m} - B)} \quad (\text{Thm de Stokes}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

ii) Par dualité de Poincaré, il existe $\eta'' \in Z^{2d'+1}(\Omega_{U',c}(U'))$ tel que :

$$\forall \omega \in \mathbb{Z}^{2d-1}(\Omega_{U',\infty}(U')), \quad \int_{\{0\} \times (\overline{B^m} - B)} d\varphi|_{\{0\} \times (\overline{B^m} - B)} \omega_{k|_{\{0\} \times (\overline{B^m} - B)}} = \int_{U'} \omega \wedge \eta''.$$

Donc, $B_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} c_{U'}(\eta'')$. On a :

$$\begin{aligned} c_{U'}(\eta'') &= T_\omega(\eta'') + dc(\eta'') \\ &= \int_{U'} \omega \wedge \eta'' \\ &= \int_{\{0\} \times (\overline{B^m} - B)} d\varphi|_{\{0\} \times (\overline{B^m} - B)} \omega_{k|_{\{0\} \times (\overline{B^m} - B)}} \\ &= 0. \end{aligned}$$

La dernière égalité est obtenue en appliquant le théorème de Stokes (ω est fermée) et en observant de $d\varphi$ est nulle sur $\{0\} \times \partial \overline{B^m}$ et sur $\{0\} \times S$.

De i) et ii), on déduit que :

$$\int_{\{0\} \times (\overline{B^m} - B)} \varphi_{|\{0\} \times (\overline{B^m} - B)} \times d\omega_{k_{|\{0\} \times (\overline{B^m} - B)}} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0.$$

□

On étend la fonction φ à $B'' \times B$ en posant : $\varphi(b'', b') = \varphi(0, b')$ pour $(b'', b') \in B'' \times B'$.

Lemme 3.6.3 – Pour tout $b'' \in B''$, la suite $\left(\int_{\{b''\} \times B'} \varphi_{k_{|\{b''\} \times B}} \times d\omega_{k_{|\{b''\} \times B}} \right)_{k \geq 0}$ converge et :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\{0\} \times B'} \varphi_{k_{|\{0\} \times B}} \times d\omega_{k_{|\{0\} \times B}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\{b''\} \times B'} \varphi_{k_{|\{b''\} \times B}} \times d\omega_{k_{|\{b''\} \times B}}.$$

Preuve : On commence par montrer que :

$$(**) \quad \int_{\{b''\} \times \overline{B}} d\omega_{k_{|\{b''\} \times \overline{B}}} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\{0\} \times \overline{B}} d\omega_{k_{|\{0\} \times \overline{B}}}.$$

On note $[0, b'']$ le segment fermé qui joint 0 et b'' dans B'' et $]0, b''[:= [0, b''] - \{0, b''\}$. Alors le bord de $]0, b''[\times B$ dans $B'' \times B'$ est

$$(\{0\} \times \overline{B}) \cup (\{b''\} \times \overline{B}) \cup ([0, b''] \times S).$$

On applique le théorème de Stokes une première fois pour établir :

$$\int_{[0, b''] \times S} d\omega_{k_{|[0, b''] \times S}} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

et une deuxième fois pour en déduire (**). En imitant la preuve du lemme 3.6.2, on établit :

$$\int_{\{b''\} \times (\overline{B^m} - B)} \varphi_{|\{b''\} \times (\overline{B^m} - B)} \times d\omega_{k_{|\{b''\} \times (\overline{B^m} - B)}} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0.$$

Il suffit d'observer que $\{b''\} \times (\overline{B^m} - B) \subset U'$. □

Proposition 3.6.4 – Si $B'' = \mathbb{C}^{d'}$, alors $\beta'([c_{|U'}]) = 1$.

Preuve : On suppose que $B'' = \mathbb{C}^{d'}$.

i) On commence par étudier la convergence établie dans le lemme 3.6.3. On a introduit précédemment $\eta_0 \in Z^{2d'+1}(\Omega_{U',c}(U'))$ tel que :

$$\forall \omega \in \mathbb{Z}^{2d'-1}(\Omega_{U',\infty}(U')) \int_{\{0\} \times S} \omega_{|\{0\} \times S} \times \varphi_{|\{0\} \times S} = \int_{U'} \omega \wedge \eta_0.$$

Pour $b \in B''$, on définit l'application $\tau_b : B'' \times B \rightarrow B'' \times B'$ par :

$$\tau_b(b'', b') = (b'' + b, b')$$

et on calcule :

$$\begin{aligned}
\int_{\{b\} \times B'} \varphi|_{\{b\} \times B'} \times d\omega_{k|_{\{b\} \times B'}} &= \int_{\{b\} \times B'} \varphi|_{\{0\} \times B'} \times d\omega_{k|_{\{b\} \times B'}} \\
&\stackrel{(*)}{=} \int_{\{0\} \times B'} \varphi|_{\{0\} \times B'} \times d(\tau_b^* \omega_k)|_{\{0\} \times B'} \\
&= \int_{U'} (\tau_b^* \omega_{k|_{U'}}) \wedge \eta_0 \\
&= \int_{U'} \omega_{k|_{U'}} \wedge (\tau_{-b}^* \eta_0) \\
&= T_{\omega_{k|_{U'}}}(\tau_{-b}^* \eta_0).
\end{aligned}$$

C'est en (*) que sert l'hypothèse $B'' = \mathbb{C}^d$. Elle permet de justifier l'écriture de $\tau_b^* \omega_k$. On travaille localement et donc η_0 "se décompose" à l'aide de distributions. On peut donc appliquer la proposition 3.1.7 et obtenir qu'il existe une constante M telle que :

$$\forall b \in B'', k \geq 0, |T_{\omega_{k|_{U'}}}(\tau_{-b}^* \eta_0)| \leq M.$$

- ii) Soit $\psi : B'' \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction lisse positive, non identiquement nulle, à support compact. On note v une forme volume sur B'' et $vol(\psi) := \int_{B''} \psi \times v > 0$. On va calculer de deux façons la limite de la suite $(C_k)_{k \geq 0}$ où

$$C_k := \int_{B'' \times B'} vol(\psi)^{-1} \times \psi \times \varphi \times v \times d\omega_k$$

et la preuve sera achevée.

- . La forme $vol(\psi)^{-1} \psi \times \varphi \times v$ est à support compact. Donc

$$C_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} dc(vol(\psi)^{-1} \times \psi \times \varphi \times v)$$

et

$$\begin{aligned}
dc(vol(\psi)^{-1} \times \psi \times \varphi \times v) &= (2\pi i)^d \int_{B' \times \{0\}} (vol(\psi)^{-1} \times \psi \times \varphi \times v)|_{B' \times \{0\}} \\
&= (2\pi i)^d \int_{B'} (vol(\psi)^{-1} \times \psi \times v) \\
&= (2\pi i)^d.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_k &= \int_{B''} \left(\int_{\{b''\} \times B'} \psi|_{\{b''\} \times B'} \times \varphi|_{k|_{\{b''\} \times B'}} \right) vol(\psi)^{-1} \times \psi \times v \\
&= \int_{B''} T_{\omega_{k|_{U'}}}(\tau_{-b''}^* \eta_0) \times vol(\psi)^{-1} \times \psi \times v \quad (\text{ cf i }).
\end{aligned}$$

De la majoration obtenue en i), du lemme 3.6.3 et du théorème de convergence dominée de Lebesgue, on déduit que :

$$\int_{B''} T_{\omega_{k|_{U'}}}(\tau_{-b''}^* \eta_0) \times vol(\psi)^{-1} \times \psi \times v \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\{0\} \times B'} \varphi \times d\omega_{k|_{\{0\} \times B'}}.$$

On utilise alors les lemmes 3.6.1 et 3.6.2 pour voir que cette limite est

$$(2\pi i)^d \times \beta'([c|_{U'}]).$$

□

Corollaire 3.6.5 – Si B'' est une boule ouverte de \mathbb{C}^d centrée en 0, alors

$$\beta'([c|_{U'}]) = 1.$$

Preuve : D'après la théorie des courants de Green, il existe $c' \in \mathcal{A}_{\mathbb{C}^{d'} \times B'}^{2d-1}(\mathbb{C}^{d'} \times B')$ tel que

$$dc' = \delta_{\mathbb{C}^{d'} \times \{0\}}.$$

Si on note \bar{c}' la restriction de c' à $B'' \times B'$, on a :

$$d\bar{c}' = (2\pi i)^d \delta_{B'' \times \{0\}}.$$

Le courant $\bar{c}' - c$ (sur $B'' \times B'$) est donc fermé. D'après la suite exacte longue de cohomologie locale, l'image de la classe de sa restriction à U' sous β' est nulle. Le résultat se déduit alors de la proposition 3.6.4 et de la functorialité du morphisme β' . □

Chapitre 4

Familles de tores réels

Soit B une variété différentielle. On définit la notion de famille de tores réels au dessus de B , appelée B -tore. La définition est calquée sur celle de schéma en groupes sauf que, travaillant dans le cadre des variétés différentielles, il est commode de supposer en plus que le morphisme structural est une fibration. Si $p : G \rightarrow B$ est une telle famille, on établit les résultats suivants :

1. À $\Gamma := (R^1 p_* \mathbb{Z})^\vee$, on associe un B -tore noté $\Gamma \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} / \Gamma$ et on a une décomposition canonique du fibré tangent :

$$T(\Gamma \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} / \Gamma) = p^*TB \oplus p^*E(\Gamma)$$

où $E(\Gamma)$ est le fibré vectoriel (plat) associé à $\Gamma \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$.

2. Il existe un isomorphisme canonique de B -tores induit par l'exponentielle fibre à fibre :
 $\Gamma \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} / \Gamma \xrightarrow{\sim} G$.
3. Le fibré tangent TG se décompose en partie verticale et horizontale, i.e. :

$$TG = p^*TB \oplus p^*E(\Gamma).$$

Pour cela, on rappelle la construction de l'exponentielle relative et on étudie la structure locale d'un B -tore.

Notations 4.0.6 –

- Var^∞ la catégorie des variétés différentielles (C^∞ -réelles),
- Var^∞_B la catégorie des variétés différentielles au dessus de B , pour $B \in Ob(Var^\infty)$,
- X^∞ la variété différentielle associée à X variété algébrique complexe lisse,
- f^∞ le morphisme lisse de X^∞ vers Y^∞ associé à $f : X \rightarrow Y$ morphisme entre variétés algébriques complexes lisses.

4.1 B -groupes

Remarque 4.1.1 – Dans Var^∞ , l'existence de pullback pose problème.

Toutefois, si $f : X \rightarrow B$ et $g : Y \rightarrow B$ sont transverses alors le produit fibré dans Var^∞ est bien défini. Dans le contexte des fibrations, on a le résultat suivant :

Proposition 4.1.2 – Soit $X \rightarrow B$ une fibration lisse et $B' \rightarrow B$ un morphisme lisse. Alors, le produit fibré $X \times_B B'$ dans Var^∞ existe et

$$X \times_B B' \rightarrow B'$$

est une fibration lisse dont la fibre en b' est canoniquement isomorphe à $X_{f(b')}$.

Preuve : cf [D-16.12.8].

Cette proposition justifie le sens de la définition suivante :

Définition 4.1.3 – Un B -groupe (abélien) consiste en la donnée de $p : G \rightarrow B$ fibration lisse, $e : B \rightarrow G$ section lisse de p (section unité), $m : G \times_B G \rightarrow G$ morphisme lisse au dessus de B (multiplication), $i : G \rightarrow G$ morphisme lisse au dessus de B (inverse).

de sorte que (p, e, m, i) définit un objet en groupes abéliens dans Var_B^∞ .

Soit (F, e_F, m_F, i_F) un groupe de Lie. Sur la fibration triviale $pr_1 : B \times F \rightarrow B$ on définit une structure de B -groupe en posant :

$$\begin{aligned} e : B &\rightarrow B \times F, & b &\mapsto (b, e_F) \\ m : B \times F \times F &\rightarrow B \times F, & (b, x, y) &\mapsto (b, m_F(x, y)) \\ i : B \times F &\rightarrow B \times F, & (b, x) &\mapsto (b, i_F(x)) \end{aligned}$$

Définition 4.1.4 – On appelle B -groupe trivial associé au groupe de Lie F le B -groupe ainsi obtenu.

Convention 4.1.5 – Un B -groupe $(p : G \rightarrow B, e, m, i)$ sera parfois simplement noté $p : G \rightarrow B$.

Définition 4.1.6 – Soient $p : G \rightarrow B, p' : G' \rightarrow B$ deux B -groupes. Un morphisme de B -groupes de $p : G \rightarrow B$ vers $p' : G' \rightarrow B$ est un morphisme $G \rightarrow G'$ de Var_B^∞ qui respecte les sections unités, multiplications et inverses.

Remarque 4.1.7 – Soient $p : G \rightarrow B$ est un B -groupe et $f : B' \rightarrow B$ un morphisme lisse. D'après la proposition 4.1.2, on peut définir le pullback de $p : G \rightarrow B$ par f .

Définition 4.1.8 – Soient $b \in B$. Deux B -groupes $p : G \rightarrow B$ et $p' : G' \rightarrow B$ sont dits localement isomorphes en b s'il existe U voisinage ouvert de b et un isomorphisme de B -groupes $G_U \xrightarrow{\sim} G'_U$.

Proposition 4.1.9 – Soit $f : G \rightarrow G'$ un morphisme de B -groupes. Alors, f est un isomorphisme si et seulement si pour tout $b \in B, f_b : G_b \rightarrow G'_b$ est isomorphisme de groupes de Lie où f_b est le morphisme induit par f sur les fibres.

Preuve : Il s'agit d'un résultat classique sur les fibrations (cf [D-16.12.2]).

Notation 4.1.10 – Si $p : G \rightarrow B$ est un B -groupe, on note :

$S(G)$ le faisceau des sections lisses de G au dessus de B .

Définition 4.1.11 – Un B -tore est un B -groupe dont les fibres sont des tores.

Remarque 4.1.12 – Étant donné un schéma abélien $\pi : A \rightarrow B$, le théorème d'Ehresmann ([V-Thm 9.3]), permet de montrer que $\pi^\infty : A^\infty \rightarrow B^\infty$ est un B^∞ -tore.

4.2 L'exponentielle

4.2.1 Construction de l'exponentielle

Soit $p : G \rightarrow B$ un B -groupe. On note $T_{G/B}$ le fibré tangent vertical défini par

$$T_{G/B} := \ker(Tp : TG \rightarrow TB).$$

Le résultat principal de cette partie est :

Proposition 4.2.1 – Il existe un unique morphisme de B -groupes appelé exponentielle relative de G

$$\exp_G : e^*T_{G/B} \rightarrow G$$

tel que pour tout $b \in B$, la restriction de \exp_G à G_b est l'exponentielle du groupe de Lie G_b . De plus, \exp_G est étale.

Remarque 4.2.2 – En tant qu'application, la définition de \exp_G est claire. Il s'agit de reprendre la construction de l'exponentielle d'un groupe de Lie pour vérifier que l'exponentielle fibre à fibre donne un morphisme lisse. On s'inspire pour cela de [La-IV].

L'assertion que l'on souhaite démontrer étant de nature locale, il suffit de considérer le cas d'un B -groupe dont la fibration sous-jacente est triviale. Soit donc G un B -groupe de la forme :

$$(pr_B : B \times F \rightarrow B, e : B \rightarrow F, m : B \times F \times F \rightarrow F, i : B \times F \rightarrow F)$$

où F est une variété différentielle de dimension n .

Soit $b \in B$. Quitte à appliquer l'isomorphisme de Var_B^∞

$$\begin{aligned} B \times F &\xrightarrow{\sim} B \times F \\ (b', x) &\mapsto (b', m(b', e(b), x)) \end{aligned}$$

on peut supposer que e est la section constante

$$e : B \rightarrow B \times F, \quad b' \mapsto (b', e(b)).$$

Un champ de vecteurs X de $B \times F$ est dit vertical si

$$Tpr_B \cdot X = 0.$$

Convention 4.2.3 – Si X est un champ de vecteur défini au voisinage de $(b', x) \in B \times F$, alors $X(b', x)$ est par définition un élément de

$$T_{(b', x)}B \times F = T_{b'}B \oplus T_xF$$

Si X est vertical, la projection de $X(b', x)$ sur $T_{b'}B$ est nulle. Dans ce cas, on s'autorise à considérer $X(b', x)$ également comme un élément de T_xF .

Soit $x \in F$. On note L_x la translation à gauche par x :

$$L_x : B \times F \rightarrow B \times F \\ (b', y) \mapsto (b', m(b', x, y)).$$

Soit X est un champ de vecteurs vertical global de $B \times F$. Alors, $(L_x)_*(X)$ est aussi un champ de vecteurs vertical (L_x est un morphisme de Var_B^∞). On dit que X est invariant (par translation à gauche) si et seulement si pour tout $x \in F$,

$$(L_x)_*(X) = X.$$

L'ensemble des champs de vecteurs verticaux globaux invariants est noté T_{vert}^{inv} .

Proposition 4.2.4 – *L'application*

$$\theta : T_{vert}^{inv} \rightarrow Hom(B, T_{e(b)}F) \\ X \mapsto (b' \mapsto X(b', e(b)))$$

est une bijection.

Preuve : Soient $X \in T_{vert}^{inv}$ et $(b', x) \in B \times F$. Puisque X est invariant, on a

$$X(b', x) = (L_x)_*X(b', x) \\ = T_{L_x^{-1}(b', x)}L_x \cdot X(L_x^{-1}(b', x)) \\ = T_{(b', e(b))}L_x \cdot X(b', e(b)).$$

On en déduit l'injectivité de θ .

Soit $\varphi : B \rightarrow T_{e(b)}F$. Pour tout $(b', x) \in B \times F$, on pose

$$X(b', x) := T_{(b', e(b))}L_x \cdot \varphi(b')$$

où $\varphi(b') \in T_{e(b)}F$ est vu comme élément de $T_{(b', e(b))}B \times F$ via

$$T_{(b', e(b))}B \times F = T_{b'}B \oplus T_{e(b)}F.$$

On définit ainsi une application $X : B \times F \rightarrow T(B \times F)$. Il reste alors à prouver que X est lisse.

Soit $f : B \times F \rightarrow \mathbb{R}$ un morphisme lisse. On définit l'application $L_\varphi f$ en posant :

$$L_\varphi f : B \times F \rightarrow \mathbb{R} \\ (b', x) \mapsto T_{(b', x)}f \cdot (T_{(b', e(b))}L_x \cdot \varphi(b')).$$

On prouve d'abord la lissité de $L_\varphi f$. Soit $c : V \rightarrow F$ un morphisme lisse défini sur V voisinage ouvert de 0 tel que

$$c(0) = e(b) \text{ et } c'(0) = \varphi(b').$$

De l'identité

$$L_\varphi f(b', x) = \frac{d}{dt} f(L_x(b', c(t)))|_{t=0}$$

et de la lissité de la fonction

$$\begin{aligned} V \times B \times F &\rightarrow \mathbb{R} \\ (t, b', x) &\mapsto f((b', m(b', x, c(t)))) \end{aligned}$$

on déduit que $L_\varphi f \in \mathcal{O}_{B \times F}(B \times F)$. Ensuite, on vérifie que L_φ est une dérivation de $\mathcal{O}_{B \times F}(B \times F)$, ce qui prouve que X est un champ de vecteurs global de $B \times F$. Par construction, il est invariant, vertical et satisfait l'identité

$$\theta(X) = \varphi.$$

□

Preuve de la proposition 4.2.1 :

Soit $X \in T_{vert}^{inv}$. Son flot $\phi_X : \Omega \rightarrow B \times F$ est un morphisme lisse défini sur Ω ouvert de $\mathbb{R} \times B \times F$ contenant $\{0\} \times B \times F$. Comme X est vertical, pour tout $(b', x) \in B \times F$ et tout $t \in \mathbb{R}$ tel que $(t, b', x) \in \Omega$,

$$p_B(\phi_X(t, b', x)) = b'.$$

Soit $x \in F$. Le flot de $(L_x)_* X$, $\phi_{(L_x)_* X}$, est donné par :

$$\begin{aligned} \phi_{(L_x)_* X} : \quad \Omega &\rightarrow B \times F \\ (t, b', y) &\mapsto (b', m(b', x, p_F \circ \phi_X(t, b', m(b', i(b, x), y)))). \end{aligned}$$

Donc pour tout $(t, b', x) \in \Omega$,

$$(*) \quad \phi_X(t, b', x) = \phi_{(L_x)_* X}(t, b', x) = (b', m(b', x, p_F \circ \phi_X(t, b', e(b)))).$$

On en déduit qu'il existe U voisinage ouvert de b et $\varepsilon > 0$ tel que

$$]-\varepsilon, \varepsilon[\times U \times F \subset \Omega.$$

Le flot de X satisfait l'équation suivante : pour tout $t, t' \in]-\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}[$,

$$(**) \quad \phi_X(t + t', \cdot) = \phi_X(t', \cdot) \circ \phi_X(t, \cdot).$$

De (*) et (**), on déduit que

$$\phi_X(t + t', b', e(b)) = (b', m(b', \phi_X(t, b', e(b)), \phi_X(t', b', e(b)))).$$

On introduit alors le morphisme lisse h_X

$$\begin{aligned} h_X : \quad]-\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}[\times U &\rightarrow U \times F \\ (t, b') &\mapsto \phi_X(t, b', e(b)). \end{aligned}$$

En adoptant la même méthode que celle de la preuve de [La-III-Thm 49], on peut montrer que h_X s'étend en un morphisme (noté encore h_X) de B -groupes du B -groupe trivial associé au groupe de Lie \mathbb{R} vers la restriction de G au dessus de U :

$$h_X : \mathbb{R} \times U \rightarrow G_U.$$

Soit $\underline{e} := (e_1, \dots, e_n)$ une base de $T_{e(b)}F$. Pour tout i , $1 \leq i \leq n$, soit X_i le morphisme constant de U dans $T_{e(b)}F$ tel que $X_i(b) = e_i$ vu comme champ de vecteurs vectoriel invariant (cf prop 4.2.4). On définit le morphisme lisse $\psi_{\underline{e}}$ par :

$$\psi_{\underline{e}} : \begin{array}{c} U \times T_e F \\ \left(b', \sum_{1 \leq i \leq n} \lambda_i e_i \right) \end{array} \rightarrow U \times F = G_U \quad \mapsto \quad (b', m^{\times n}(b', p_F \circ h_{X_1}(\lambda_1, b'), \dots, p_F \circ h_{X_n}(\lambda_n, b')))$$

où $m^{\times n}$ est défini de proche en proche par :

$$\begin{cases} m^{\times 0}(b') = e(b), \text{ pour } b' \in B \\ m^{\times(i+1)}(u, x_1, \dots, x_{i+1}) = m(u, m^{\times i}(u, x_1, \dots, x_i), x_{i+1}) \text{ pour } i \geq 0, b' \in B \text{ et } x_1, \dots, x_{i+1} \in F. \end{cases}$$

On remarque que pour tout $b' \in U$, le morphisme $\psi_{\underline{e}, b'}$ induit par $\psi_{\underline{e}}$ sur les fibres au dessus de b'

$$\psi_{\underline{e}, b'} : T_{e(b)}F \rightarrow G_{b'}$$

est l'exponentielle du groupe de Lie $G_{b'}$. En particulier, $\psi_{\underline{e}}$ ne dépend pas du choix de la base \underline{e} . La lissité de \exp_G dans la proposition 4.2.1 est donc démontrée.

Soit $b' \in U$. D'après la remarque précédente, on a $T_0 \psi_{\underline{e}, b'} = Id_{T_{e(b)}F}$. La différentielle de $\psi_{\underline{e}, b'}$ en $(b', 0)$

$$T_{(b', 0)} \psi_{\underline{e}, b'} : T_{b'}B \oplus T_{e(b)}F \rightarrow T_{b'}B \oplus T_{e(b)}F$$

est donc donnée par :

$$\begin{pmatrix} Id_{T_{b'}B} & ? \\ 0 & Id_{T_{e(b)}F} \end{pmatrix}.$$

On en déduit que \exp_G est étale en $(b, 0)$ pour tout $b \in B$. On en déduit que \exp_G est étale en utilisant les translations. Ceci achève la preuve de la proposition 4.2.1. \square

Soit $f : (G_1, e_1) \rightarrow (G_2, e_2)$ un morphisme de groupes de Lie. Alors, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} T_{e_1}G_1 & \xrightarrow{T_{e_1}f} & T_{e_2}G_2 \\ \exp_{G_1} \downarrow & & \downarrow \exp_{G_2} \\ G_1 & \xrightarrow{f} & G_2 \end{array}.$$

On en déduit le résultat de functorialité suivant pour les B -groupes.

Proposition 4.2.5 – Soient $p_1 : G_1 \rightarrow B$, $p_2 : G_2 \rightarrow B$ deux B -groupes et $f : G_1 \rightarrow G_2$ un morphisme de B -groupes. Alors, le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} e_1^* T_{G_1/B} & \xrightarrow{e_1^* T f} & e_2^* T_{G_2/B} \\ \exp_{G_1} \downarrow & & \downarrow \exp_{G_2} \\ G_1 & \xrightarrow{f} & G_2 \end{array}.$$

4.2.2 Applications

4.2.2.1 Structure locale d'un B -tore

On considère maintenant le cas où $p : G \rightarrow B$ est un B -tore. On établit ici la proposition suivante.

Proposition 4.2.6 – *Pour tout $b \in B$, le B -tore $p : G \rightarrow B$ et le B -tore trivial associé au groupe de Lie G_b sont localement isomorphe en b .*

Preuve : On se place dans la situation locale précédente en prenant pour F une variété différentielle difféomorphe au tore réel de dimension n .

Le morphisme $\psi_{\underline{e}}$ est surjectif, de noyau Γ_b sous-groupe discret de $T_{e(b)}F$. Soit $(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ une \mathbb{Z} -base de Γ_b . Comme $\psi_{\underline{e}}$ est étale, il existe

- i) U_b voisinage ouvert de b dans U
- ii) $W_{e(b)}$ voisinage ouvert de $e(b)$ dans F
- iii) V_i voisinage ouvert de (b, γ_i) dans $U \times T_{e(b)}F$, pour $1 \leq i \leq n$

tels que pour tout i , $1 \leq i \leq n$:

$$\psi_{\underline{e}|_{V_i}} : V_i \rightarrow U_b \times W_{e(b)}$$

est un difféomorphisme. Soit i , $1 \leq i \leq n$. On définit $s_i : U_b \rightarrow T_{e(b)}F$ par :

$$s_i(b') := p_{T_{e(b)}F} \circ \psi_{\underline{e}|_{V_i}}^{-1}(b', e(b)).$$

Alors, $s_i(b) = \gamma$ et pour tout $b' \in U_b$, $\psi_{\underline{e}}(b', s_i(b')) = (b', e(b))$. L'application $\Psi_{\underline{e}}$ suivante est donc bien définie :

$$\begin{aligned} U_b \times (T_{e(b)}F/\Gamma_b) &\rightarrow U_b \times F \\ \left(b', \left[\sum_{1 \leq i \leq n} \lambda_i \gamma_i \right] \right) &\mapsto \psi_{\underline{e}} \left(b', \sum_{1 \leq i \leq n} \lambda_i s_i(b') \right). \end{aligned}$$

C'est un morphisme de U_b -tores qui induit un isomorphisme sur les fibres en b . Par suite, $\Psi_{\underline{e}}$ est étale en $(b, 0)$. Le lemme suivant termine la preuve de la proposition 4.2.6. \square

Lemme 4.2.7 – *Il existe U'_b voisinage ouvert de b inclus dans U_b tel que*

$$\Psi_{\underline{e}|_{U'_b \times (T_{e(b)}F/\Gamma_b)}} : U'_b \times (T_{e(b)}F/\Gamma_b) \rightarrow U'_b \times F$$

est un isomorphisme.

Preuve : Seule l'injectivité pose problème. Supposons l'assertion à démontrer fausse. Alors, il existe une suite $(b_k, x_k)_{k \geq 0}$ de $U_b \times (T_{e(b)}F/\Gamma_b)$ telle que :

- i) $(b_k)_{k \geq 0}$ tend vers b ,
- ii) $\forall k \geq 0$ $x_k \neq 0$ et $\Psi_{\underline{e}}(b_k, x_k) = (b_k, e(b))$.

En raison de la compacité de $(T_{e(b)}F/\Gamma_b)$, quitte à prendre une sous-suite, on peut supposer que $(x_k)_{k \geq 0}$ converge. Soit x la limite de cette suite. De ii), on déduit que :

$$\Psi_{\underline{e}}(b, x) = (b, e(b))$$

et donc que $x = 0$. L'existence d'une telle suite contredit donc le fait que $\Psi_{\underline{e}}$ est localement injective en $(b, 0)$. \square

4.2.2.2 Le noyau de l'exponentielle d'un B -tore

Notation 4.2.8 – Pour X un espace topologique et G un groupe abélien, on note :

\underline{G} le faisceau constant sur B associé à G .

On rappelle que pour X et G comme ci-dessus, \underline{G} est défini par :

- i) $\underline{G}(U) := \text{Hom}_{\text{cont}}(U, G)$, pour U ouvert de B , G étant muni de la topologie discrète (si U est connexe, on a donc une identification naturelle $\underline{G}(U) = G$),
- ii) $\text{res}_V^U : \underline{G}(U) \rightarrow \underline{G}(V)$, $f \mapsto f|_V$, pour U et V ouverts de B , $U \subset V$.

Remarque 4.2.9 – Soient G et H deux groupes abéliens, X un espace topologique et $f : \underline{G} \rightarrow \underline{H}$. Alors, si U et V sont des ouverts connexes de B tels que $U \subset V$, alors les morphismes

$$f(U) : G = \underline{G}(U) \rightarrow \underline{H}(U) = H \text{ et } f(V) : G = \underline{G}(V) \rightarrow \underline{H}(V) = H$$

sont égaux.

On conserve les notations de la section précédente. On déduit de l'étude qui vient d'être faite que le noyau de \exp_G noté $q : K \rightarrow B$ est en tout point de B localement isomorphe au B -groupe trivial associé au groupe de Lie \mathbb{Z}^n . En particulier, $q : K \rightarrow B$ est un revêtement de B et $\mathcal{S}(K)$ est un système local de groupes abéliens libres de rang n .

Si $(H, 0)$ est un tore réel, alors \exp_H est le revêtement universel de H et le noyau de l'exponentielle noté s'identifie à $H_1(H, \mathbb{Z}) = \pi_1(H, 0)$ au moyen de l'isomorphisme κ_H :

$$\begin{aligned} \kappa_H : \quad \pi_1(H, 0) &\rightarrow \text{Ker}(\exp_H) \\ [s : [0, 1] \rightarrow H] &\mapsto \tilde{s}(1) \end{aligned}$$

où $\tilde{s} : [0, 1] \rightarrow T_0H$ est le relèvement de s . On étend ce résultat au cas des B -tores.

Proposition 4.2.10 – On a un isomorphisme canonique de systèmes locaux de groupes abéliens :

$$\kappa_G : (R^1 p_* \mathbb{Z})^\vee \xrightarrow{\sim} \mathcal{S}(K)$$

qui pour tout $b \in B$ coïncide avec κ_{G_b} au niveau des fibres en b .

Preuve : Soit $\{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$ le recouvrement ouvert de B formé des ouverts U tels que :

- i) U est connexe et simplement connexe,
- ii) $p : G_U \rightarrow U$ est isomorphe au U -groupe trivial associé à $\mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$.

Le faisceau $R^1 p_* \mathbb{Z}$ est le faisceau associé au préfaisceau

$$U \text{ ouvert de } B \mapsto H^1(G_U, \mathbb{Z}).$$

Soient $\alpha, \beta \in A$ tels que $V_\beta \subset V_\alpha$. Alors, la restriction de V_α à V_β induit un isomorphisme

$$H^1(G_{V_\alpha}, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} H^1(G_{V_\beta}, \mathbb{Z}).$$

Et donc, pour $\alpha \in A$, on a un isomorphisme canonique :

$$R^1 p_* \mathbb{Z}|_{V_\alpha} \simeq \underline{H^1(G_{V_\alpha}, \mathbb{Z})}|_{V_\alpha}.$$

On a donc des identifications naturelles :

$$\begin{aligned} \Gamma(V_\alpha) &= \text{Hom}(R^1 p_* \mathbb{Z}|_{V_\alpha}, \mathbb{Z}|_{V_\alpha}) \\ &\simeq \text{Hom}(\underline{H^1(G_{V_\alpha}, \mathbb{Z})}|_{V_\alpha}, \mathbb{Z}|_{V_\alpha}) \\ &= \text{Hom}(H^1(G_{V_\alpha}, \mathbb{Z}), \mathbb{Z}) \\ &= H_1(G_{V_\alpha}, \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

On remarque que

$$\exp_{G_{V_\alpha}} : (e^* TG/B)|_{G_{V_\alpha}} \rightarrow G_{V_\alpha}$$

est le recouvrement universel de G_{V_α} . Soit $b_\alpha \in V_\alpha$. Alors, on a un isomorphisme canonique :

$$\pi_1(G_{V_\alpha}, e(b_\alpha)) \simeq H_1(G_{V_\alpha}, \mathbb{Z}).$$

Si $s : [0, 1] \rightarrow G_{V_\alpha}$ est un lacet, son relèvement à $(e^* TG/B)|_{G_{V_\alpha}}$ est noté \tilde{s} . Soit κ_α le morphisme défini par :

$$\begin{aligned} \kappa_\alpha : \quad \pi_1(G_{V_\alpha}, e(b_\alpha)) &\rightarrow \mathcal{S}(K)(V_\alpha) \\ [s : [0, 1] \rightarrow G_{V_\alpha}] &\mapsto (b \mapsto \tilde{s}(1)_b) \end{aligned}$$

On vérifie que κ_α est un isomorphisme et que la famille $\{\kappa_\alpha\}_{\alpha \in A}$ définit un isomorphisme

$$\kappa_G : (R^1 p_* \mathbb{Z})^\vee \xrightarrow{\sim} \mathcal{S}(K).$$

□

4.3 Construction de B -tores

Soit B une variété différentielle. Étant donné Γ un système local de groupes abéliens libres de rang n ($n \in \mathbb{N}^*$) sur B , on construit un B -tore. On pose $\mathcal{H} := \Gamma \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$.

Pour tout $b \in B$, soient V_b un voisinage ouvert de b connexe et simplement connexe et un isomorphisme

$$f_b : \Gamma|_{V_b} \xrightarrow{\sim} \underline{\Gamma}_b|_{V_b}.$$

Pour tout $b, b' \in B$, on pose

$$V_{b,b'} := V_b \cap V_{b'}$$

et on définit $f_{b,b'}$ par :

$$f_{b,b'} := f_b|_{V_{b,b'}} \circ (f_{b'}|_{V_{b,b'}})^{-1} : \underline{\Gamma}_{b'}|_{V_{b,b'}} \xrightarrow{\sim} \underline{\Gamma}_b|_{V_{b,b'}}.$$

Alors, on a la relation de cocycle :

$$(*) \quad \forall b, b', b'' \in B \quad f_{b,b'} \circ f_{b',b''} = f_{b,b''} \text{ sur } V_b \cap V_{b'} \cap V_{b''}.$$

On pose $G_{V_b} := V_b \times \mathcal{H}_b / \Gamma_b$. Soient $b, b' \in B$. On écrit la décomposition de $V_{b,b'}$ en composantes connexes :

$$V_{b,b'} = \bigcup_{\lambda \in \Lambda_{b,b'}} W_\lambda.$$

Soit $\lambda \in \Lambda_{b,b'}$. Alors, on définit g_λ par :

$$g_\lambda := Id \times \overline{f_{b,b'}(W_\lambda)} : W_\lambda \times \mathcal{H}_{b'} / \Gamma_{b'} \xrightarrow{\sim} W_\lambda \times \mathcal{H}_b / \Gamma_b$$

où $\overline{f_{b,b'}(W_\lambda)}$ est le morphisme obtenu en étendant $f_{b,b'}(W_\lambda)$ par linéarité et en passant au quotient. On introduit la fonction de transition suivante :

$$g_{b,b'} := \bigcup_{\lambda \in \Lambda_{b,b'}} g_\lambda : V_{b,b'} \times \mathcal{H}_{b'} / \Gamma_{b'} \xrightarrow{\sim} V_{b,b'} \times \mathcal{H}_b / \Gamma_b.$$

À l'aide de (*) et de la remarque 4.2.9, on peut voir que la famille $\{g_{b,b'}\}_{b,b' \in B}$ vérifie la condition de cocycle. Ainsi (cf [D-16.13.3]), on peut recoller les fibrations $p_{V_b} : G_{V_b} \rightarrow V_b$ au moyen de $\{g_{b,b'}\}_{b,b' \in B}$ pour obtenir une fibration au dessus de B . Cette fibration est munie d'une structure de B -groupe évidente. De plus, le classe d'isomorphisme du B -tore ainsi construit ne dépend pas des choix effectués.

Définition 4.3.1 – On appelle B -tore associé à Γ l'objet construit ci-dessus et on le note $p : \Gamma \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} / \Gamma \rightarrow B$.

Remarque 4.3.2 – Pour tout $b \in B$, on a un isomorphisme canonique ι_b qui s'insère dans le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} V_b \times \mathcal{H}_b / \Gamma_b & \xrightarrow{\iota_b} & p^{-1}(V_b) \\ \text{pr}_{V_b} \downarrow & \swarrow p|_{V_b} & \\ V_b & & \end{array}$$

De plus pour $b, b' \in B$, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} V_{b,b'} \times \mathcal{H}_b & \xrightarrow{\iota_b} & p^{-1}(V_{b,b'}) \\ g_{b',b} \downarrow & \swarrow \iota_{b'} & \\ V_{b,b'} \times \mathcal{H}_{b'} & & \end{array}$$

4.4 Trivialisation d'un B -tore

Soit $(H, 0)$ un tore réel. L'inclusion

$$\text{Ker}(\exp_H) \hookrightarrow T_0 H$$

s'étend par linéarité pour donné un isomorphisme

$$\text{Ker}(\exp_H) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \xrightarrow{\sim} T_0 H$$

d'où un isomorphisme induit par l'exponentielle :

$$\iota_H : Ker(\exp_H) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} / Ker(\exp_H) \xrightarrow{\sim} H.$$

D'autre part, au moyen de κ_H , on construit un isomorphisme :

$$\overline{\kappa}_H : H_1(H, \mathbb{R}) / H_1(H, \mathbb{Z}) \rightarrow Ker(\exp_H) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} / Ker(\exp_H).$$

Alors on a un isomorphisme de groupes de Lie :

$$\overline{\exp}_H := \iota_H \circ \overline{\kappa}_H : H_1(H, \mathbb{R}) / H_1(H, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} H.$$

Soit $p : G \rightarrow B$ un B -tore. On a une version relative de l'isomorphisme précédent.

Proposition 4.4.1 – Soit $\Gamma := (R^1 p_* \mathbb{Z})^\vee$. Alors, il existe un isomorphisme canonique de B -tores :

$$\overline{\exp}_G : \Gamma \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} / \Gamma \xrightarrow{\sim} G$$

tel que pour tout $b \in B$, le morphisme induit par $\overline{\exp}_G$ coïncide avec $\overline{\exp}_{G_b}$.

De l'étude de l'exponentielle d'un B -tore, on déduit le lemme suivant :

Lemme 4.4.2 L'exponentielle induit un isomorphisme

$$\iota_G : \mathcal{S}(K) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} / \mathcal{S}(K) \xrightarrow{\sim} G$$

qui pour tout $b \in B$ coïncide avec ι_{G_b} sur les fibres en b .

Preuve de la proposition 4.4.1 : L'isomorphisme κ_G de la proposition 4.2.10 induit un isomorphisme de B -tores :

$$\overline{\kappa}_G : \Gamma \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} / \Gamma \xrightarrow{\sim} \mathcal{S}(K) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} / \mathcal{S}(K)$$

On conclut en posant $\overline{\exp}_G := \iota_G \circ \overline{\kappa}_G$. □

4.5 Le fibré tangent d'un B -tore

Si $(H, 0)$ est un groupe de Lie, alors On a une trivialisatoin canonique du fibré tangent TH . En effet, si pour tout $h \in H$, on désigne la translation à gauche par L_h , alors le morphisme de fibrés vectoriels au dessus de H :

$$\begin{aligned} \theta : H \times T_0 H &\rightarrow TH \\ (h, \xi) &\mapsto (h, L_h \cdot \xi) \end{aligned}$$

est un isomorphisme.

Soient B une variété différentielle et Γ un système local de groupes abéliens libres de rang n ($n \in \mathbb{N}^*$) sur B . On va utiliser cette propriété des groupes de Lie pour décomposer le fibré tangent du B -tore $p : \mathcal{H} / \Gamma \rightarrow B$ (où $\mathcal{H} := \Gamma \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$).

Proposition 4.5.1 On a $T_e\mathcal{H}/\Gamma = p^*E$ où E le fibré vectoriel réel (plat) associé à \mathcal{H} et un isomorphisme canonique :

$$T(\mathcal{H}/\Gamma) \simeq p^*TB \oplus p^*E.$$

Preuve : On reprend les données de recollement précédentes au moyen desquelles on a construit \mathcal{H}/Γ . Soit $b \in B$. Le fibré tangent de $G_b = V_b \times \mathcal{H}_b/\Gamma_b$ se décompose :

$$TG_b = pr_{V_b}^*TV_b \oplus pr_{\mathcal{H}_b/\Gamma_b}T\mathcal{H}_b/\Gamma_b.$$

D'après ce qui vient d'être rappelé pour les groupes de Lie, on un isomorphisme canonique :

$$TG_b \simeq pr_{V_b}^*TV_b \oplus pr_{V_b}^*(V_b \times \mathcal{H}_b)$$

On recolle ces fibrés vectoriels au moyen de la famille

$$\{Tg_{b,b'} : pr_{V_{b,b'}}^*TV_{b,b'} \oplus pr_{V_{b,b'}}^*(V_{b,b'} \times \mathcal{H}_{b'}) \rightarrow pr_{V_{b,b'}}^*TV_{b,b'} \oplus pr_{V_{b,b'}}^*(V_{b,b'} \times \mathcal{H}_b)\}_{b,b' \in B}$$

et on obtient un isomorphisme :

$$T(\mathcal{H}/\Gamma) \simeq p^*TB \oplus T^*E$$

où E est le fibré vectoriel associé à \mathcal{H} obtenu à partir des données de recollement :

$$\left\{ \begin{array}{l} V_b \times \mathcal{H}_b \\ \{h_{b,b'} := \bigcup_{\lambda \in \Lambda_{b,b'}} h_\lambda : V_{b,b'} \times \mathcal{H}_{b'} \rightarrow V_{b,b'} \times \mathcal{H}_b\}_{b,b' \in B} \end{array} \right.$$

où les morphismes h_λ sont définis par

$$h_\lambda := Id \times f_{b,b'}(W_\lambda)_\mathbb{R} : W_\lambda \times \mathcal{H}_{b'} \xrightarrow{\sim} W_\lambda \times \mathcal{H}_b.$$

□

On en déduit la proposition suivante.

Proposition 4.5.2 – Soit $p : G \rightarrow B$ un B -tore. Si on note E le fibré vectoriel plat associé à $(R^1p_*\mathbb{Z})^\vee$, l'exponentielle induit une décomposition canonique de fibrés vectoriels :

$$TG = p^*TB \oplus p^*E.$$

Chapitre 5

Le logarithme d'un schéma abélien

Après avoir donné la définition du logarithme à l'aide de la version relative du théorème de Hain-Zucker (cf [Wi1]), on établit le lien avec deux autres approches pour définir le polylogarithme d'un schéma abélien : celles de Kings (cf [Ki2]) et de Levin (cf [Le]). Les deux résultats principaux de ce chapitre sont :

1. la construction, en suivant la méthode de Levin (cf [Le]), d'une résolution explicite du pro-système local sous-jacent à la pro-variation logarithmique (après extension des scalaires de \mathbb{Q} à \mathbb{R}).
2. le calcul des images directes supérieures du logarithme.

Notations 5.0.3 – Pour X une variété algébrique complexe lisse de morphisme structural $a : X \rightarrow \text{Spec}(\mathbb{C})$, $f : Y \rightarrow Z$ un morphisme de variétés algébriques lisses et $\mathbb{K} \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}\}$, on note :

\overline{X}	<i>l'espace topologique $X(\mathbb{C})$ muni de la topologie transcendante,</i>
\overline{f}	<i>l'application continue de \overline{Y} vers \overline{Z} déduite de f,</i>
X^∞	<i>la variété différentielle C^∞-réelle associée à X,</i>
\mathcal{O}_{X^∞}	<i>le faisceau des fonctions lisses sur X^∞,</i>
f^∞	<i>le morphisme lisse de Y^∞ vers Z^∞ induit par f,</i>
$\mathbb{K}_X\text{-mod}$	<i>la catégorie des faisceaux de \mathbb{K}-vectoriels sur \overline{X},</i>
$\text{SystLoc}_{\mathbb{K}}(X)$	<i>la catégorie des systèmes locaux de \mathbb{K}-vectoriels sur \overline{X},</i>
$\text{SystLocU}_{\mathbb{K}}(Y, f)$	<i>la sous-catégorie pleine de $\text{SystLoc}_{\mathbb{K}}(Y)$ dont les objets sont unipotents relativement à f, i.e. admettent une filtration dont les gradués sont dans l'image de $\overline{f}^* : \text{SystLoc}_{\mathbb{K}}(Z) \rightarrow \text{SystLoc}_{\mathbb{K}}(Y)$,</i>
$\text{SystLocU}_{\mathbb{K}}(X)$	<i>$:= \text{SystLocU}_{\mathbb{K}}(X, a)$,</i>
$\text{SHM}_{\mathbb{Q}}$	<i>la catégorie des \mathbb{Q}-structures de Hodge mixtes polarisables,</i>
$\text{VSHM}_{\mathbb{Q}}(X)$	<i>la catégorie des \mathbb{Q}-variations de structures de Hodge mixtes admissibles,</i>
$\mathbb{Q}(n)_X^{\vee}$	<i>$:= a^*\mathbb{Q}(n) \in \text{Ob}(\text{SHM}_{\mathbb{Q}}(X))$, $n \in \mathbb{Z}$,</i>
$\mathbb{V}(n)$	<i>$:= \mathbb{V} \otimes \mathbb{Q}(n)_X^{\vee}$, $n \in \mathbb{Z}$,</i>
$\overline{\mathbb{V}}$	<i>le système local sous-jacent à $\mathbb{V} \in \text{Ob}(\text{VSHM}_{\mathbb{Q}}(X))$,</i>
$\text{VSHMU}_{\mathbb{Q}}(Y, f)$	<i>la sous-catégorie pleine de $\text{VSHM}_{\mathbb{Q}}(Y)$ dont les objets sont unipotents relativement à f, i.e. admettent une filtration dont les gradués sont dans l'image de $f^* : \text{VSHM}_{\mathbb{Q}}(Z) \rightarrow \text{VSHM}_{\mathbb{Q}}(Y)$,</i>
$\text{VSHMU}_{\mathbb{Q}}(X)$	<i>$:= \text{VSHMU}_{\mathbb{Q}}(X, a)$,</i>

$MHM_{\mathbb{Q}}(X)$ la catégorie des \mathbb{Q} -modules de Hodge mixtes sur X ,
 \mathbb{V}^{ι} := $\iota(\mathbb{V})$ module de Hodge associé à $\mathbb{V} \in \text{Ob}(VSHM_{\mathbb{Q}}(X))$ (cf partie 2.3.1 pour la définition de ι),
 $\mathbb{Q}(n)_X^M$:= $a^*\mathbb{Q}(n)^{\iota} \in \text{Ob}(D^bMHM_{\mathbb{Q}}(X))$, $n \in \mathbb{Z}$.

5.1 Cas absolu

Soit X une variété algébrique complexe, et $x \in X(\mathbb{C})$. On considère $\mathbb{Q}[\pi_1(\overline{X}, x)]$, l'algèbre du groupe $\pi_1(\overline{X}, x)$. Celle-ci est munie d'une augmentation $\varepsilon : \mathbb{Q}[\pi_1(\overline{X}, x)] \rightarrow \mathbb{Q}$ et on pose $\mathfrak{a} := \ker(\varepsilon)$. À l'aide de la théorie des intégrales itérées de Chen, on munit chacun des $\mathbb{Q}[\pi_1(\overline{X}, x)]/\mathfrak{a}^n$, $n \geq 0$, d'une \mathbb{Q} -structure de Hodge mixte naturelle.

Les morphismes de projection $\mathbb{Q}[\pi_1(\overline{X}, x)]/\mathfrak{a}^n \rightarrow \mathbb{Q}[\pi_1(\overline{X}, x)]/\mathfrak{a}^m$, $m \leq n$, sont des morphismes de structures de Hodge, d'où une pro- \mathbb{Q} -structure de Hodge sur $\lim_{n \geq 0} \mathbb{Q}[\pi_1(\overline{X}, x)]/\mathfrak{a}^n$

notée $\mathbb{Q}[\pi_1(\overline{X}, x)]^{\wedge}$. De plus, le morphisme de structure de \mathbb{Q} -algèbres, $\mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}[\pi_1(\overline{X}, x)]^{\wedge}$ est sous-jacent à un morphisme de pro-structures de Hodge mixtes $1 : \mathbb{Q}(0) \rightarrow \mathbb{Q}[\pi_1(\overline{X}, x)]^{\wedge}$ et la multiplication dans $\mathbb{Q}[\pi_1(\overline{X}, x)]^{\wedge}$ est un morphisme de pro- $SHM_{\mathbb{Q}}$.

Soit $\mathbb{V} \in \text{Ob}(VSHMU_{\mathbb{Q}}(X))$. La représentation de monodromie $\pi_1(\overline{X}, x) \rightarrow \text{End}(\overline{\mathbb{V}}_x)$ induit un morphisme de pro- \mathbb{Q} -structures de Hodge $\rho_x : \mathbb{Q}[\pi_1(\overline{X}, x)]^{\wedge} \rightarrow \underline{\text{End}}(\mathbb{V}_x)$. On énonce le théorème de Hain-Zucker qui va permettre de définir le logarithme.

Théorème 5.1.1 [HZ-Thm 1.6] *Le foncteur*

$$\begin{array}{ccc}
 VSHMU_{\mathbb{Q}}(X) & \rightarrow & \left(\begin{array}{l} V \in \text{Ob}(SHM_{\mathbb{Q}}) \text{ muni d'un morphisme de pro-}SHM_{\mathbb{Q}} \\ \mathbb{Q}[\pi_1(\overline{X}, x)]^{\wedge} \rightarrow \underline{\text{End}}(V) \end{array} \right) \\
 \mathbb{V} & \mapsto & (\mathbb{V}_x, \rho_x)
 \end{array}$$

est une équivalence de catégories.

Définition 5.1.2 On applique ce théorème à $\mathbb{Q}[\pi_1(\overline{X}, x)]^{\wedge}$ muni de la représentation donnée par la multiplication par la gauche. On obtient un objet de pro- $VSHMU_{\mathbb{Q}}(X)$, le logarithme de X noté $\mathcal{L}og_{X,x}$.

Le logarithme est caractérisé par la propriété universelle suivante.

Théorème 5.1.3 *Le foncteur*

$$\begin{array}{ccc}
 VSHMU_{\mathbb{Q}}(X) & \rightarrow & Ab \\
 \mathbb{V} & \mapsto & \text{Hom}_{SHM_{\mathbb{Q}}}(\mathbb{Q}(0), \mathbb{V}_x)
 \end{array}$$

est pro-représenté par $\mathcal{L}og_{X,x}$, i.e. on a une bijection naturelle :

$$\text{Hom}_{\text{pro-}VSHMU_{\mathbb{Q}}(X)}(\mathcal{L}og_{X,x}, \mathbb{V}) \rightarrow \text{Hom}_{SHM_{\mathbb{Q}}}(\mathbb{Q}(0), \mathbb{V}_x) \quad , \quad \varphi \mapsto \varphi_x \circ 1.$$

Cet énoncé est équivalent au théorème de Hain-Zucker. Le pro-système local sous-jacent à $\mathcal{L}og_{X,x}$ est lui aussi caractérisé par une propriété universelle.

Théorème 5.1.4 *Le foncteur*

$$\begin{array}{ccc} \text{SystLoc}U_{\mathbb{Q}}(X) & \rightarrow & \mathbb{Q}\text{-vect} \\ \mathbb{V} & \mapsto & \mathbb{V}_x \end{array}$$

est pro-représenté par $\overline{\mathcal{L}og_{X,x}}$, i.e. on a un bijection naturelle :

$$\text{Hom}_{\text{pro-SystLoc}U_{\mathbb{Q}}(X)}(\overline{\mathcal{L}og_{X,x}}, \mathbb{V}) \rightarrow \mathbb{V}_x \quad , \quad \varphi \mapsto \varphi_x(1).$$

5.2 Cas d'une variété abélienne

Soit $a : A \rightarrow \text{Spec}(\mathbb{C})$ une variété abélienne complexe de section unité $e : \text{Spec}(\mathbb{C}) \rightarrow A$, de dimension d .

Notations 5.2.1 – On pose $\mathcal{L}og_A := \mathcal{L}og_{A,e}$ et $\pi_1 := \pi_1(\overline{A}, e)$.

5.2.1 Autre description du logarithme

On considère la \mathbb{Q} -structure de Hodge pure $\mathbb{Q}[\pi_1]/\mathfrak{a}^2$. Celle-ci s'insère dans une suite exacte scindée dans $SHM_{\mathbb{Q}}$:

$$(S) \quad 0 \longrightarrow \mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2 \longrightarrow \mathbb{Q}[\pi_1]/\mathfrak{a}^2 \xrightleftharpoons[\overline{\Gamma}]{\overline{\varepsilon}} \mathbb{Q}(0) \longrightarrow 0 ,$$

où $\overline{\varepsilon}$ est le morphisme déduit de ε par passage au quotient, $\overline{\Gamma}$ est la composée de 1 suivi de la projection $\mathbb{Q}[\pi_1]^{\wedge} \rightarrow \mathbb{Q}[\pi_1]/\mathfrak{a}^2$.

On décrit la \mathbb{Q} -structure de Hodge $\mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2$. En topologie, on a l'isomorphisme classique $\pi_1 = \pi_1/[\pi_1, \pi_1] \xrightarrow{\sim} H_1(\overline{A}, \mathbb{Z})$ qui induit $i : \mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2 = \pi_1 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \xrightarrow{\sim} H_1(\overline{A}, \mathbb{Q})$. Au moyen de l'accouplement :

$$\begin{array}{ccc} H_{DR}^1(A^{\infty}, \mathbb{C}) \times H_1(\overline{A}, \mathbb{C}) & \rightarrow & \mathbb{R} \\ ([\omega], \gamma) & \mapsto & \int_{\gamma} \omega \end{array}$$

et de la décomposition de Hodge $H_{DR}^1(A^{\infty}, \mathbb{C})$, $H_{DR}^1(A^{\infty}, \mathbb{C}) = H^{1,0} \oplus H^{0,1}$, on munit $H_1(\overline{A}, \mathbb{C})$ d'une décomposition, $H_1(\overline{A}, \mathbb{C}) = H^{-1,0} \oplus H^{0,-1}$, où $H^{-1,0} = (H^{0,1})^{\perp}$ et $H^{0,-1} = (H^{1,0})^{\perp}$. Cette décomposition et i explicite la \mathbb{Q} -structure de Hodge de poids (-1) $\mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2$. On dispose donc isomorphisme de \mathbb{Q} -structures de Hodge naturel $i : \mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2 \xrightarrow{\sim} H^1(A, \mathbb{Q})^{\vee}$.

La multiplication dans $\mathbb{Q}[\pi_1]^{\wedge}$ induit un morphisme de pro- \mathbb{Q} -structures de Hodge mixtes

$$\rho : \mathbb{Q}[\pi_1]^{\wedge} \rightarrow \underline{\text{End}}(\mathbb{Q}[\pi_1]/\mathfrak{a}^2).$$

À l'aide du théorème de Hain-Zucker, on associe à $(\mathbb{Q}[\pi_1]/\mathfrak{a}^2, \rho)$ un objet de $VSHMU_{\mathbb{Q}}(A)$ noté $\mathcal{L}og_A^{(1)}$. Si on munit $\mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2$ et $\mathbb{Q}(0)$ de l'action triviale de π_1 , la suite exacte (S) est équivariante pour l'action de $\mathbb{Q}[\pi_1]^{\wedge}$. Si $d > 0$, le morphisme $\overline{\Gamma}$ n'est pas $\mathbb{Q}[\pi_1]^{\wedge}$ -équivariant. D'où une suite exacte (non scindée en général) dans $VSHMU_{\mathbb{Q}}(A)$:

$$0 \longrightarrow \mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2 \longrightarrow \mathcal{L}og_A^{(1)} \xrightarrow{\overline{\varepsilon}} \mathbb{Q}(0) \longrightarrow 0 .$$

On note $[\mathcal{L}og_A^{(1)}]$ la classe de cette suite exacte dans $\text{Ext}_{VSHMU_{\mathbb{Q}}(A)}^1(\mathbb{Q}(0), \mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2)$ et on cherche à la caractériser dans ce groupe d'extension. Pour cela, on étudie ce dernier.

La suite exacte des bas termes pour la suite spectrale de Leray de la composition

$$\text{RHom}_{SHM_{\mathbb{Q}}}(\mathbb{Q}(0), \cdot) \circ a_*$$

appliquée à $a^*(\mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2)$ donne la suite exacte courte scindée (S') :

$$0 \longrightarrow \text{Ext}_{SHM_{\mathbb{Q}}}^1(\mathbb{Q}(0), \mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2) \begin{matrix} \xleftarrow{e^*} \\ \xrightarrow{a^*} \end{matrix} H^1 \text{RHom}_{MHM_{\mathbb{Q}}(A)}(a^*\mathbb{Q}(0), a^*\mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2) \longrightarrow \text{Hom}_{SHM_{\mathbb{Q}}}(\mathbb{Q}(0), H^1 a_* a^* \mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2) \longrightarrow 0.$$

À l'aide des résultats de la partie 2.3.2, cette suite exacte s'écrit sous la forme :

$$0 \longrightarrow \text{Ext}_{SHM_{\mathbb{Q}}}^1(\mathbb{Q}(0), \mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2) \begin{matrix} \xleftarrow{e^*} \\ \xrightarrow{a^*} \end{matrix} \text{Ext}_{VSHMU_{\mathbb{Q}}(A)}^1(a^*\mathbb{Q}(0), a^*\mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2) \xrightarrow{\delta} \text{Hom}_{SHM_{\mathbb{Q}}}(\mathbb{Q}(0), H^1(A, \mathbb{Q}) \otimes \mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2) \longrightarrow 0.$$

Puisqu'on dispose de l'isomorphisme i , on a l'identification :

$$\text{Hom}_{SHM_{\mathbb{Q}}}(\mathbb{Q}(0), H^1(A, \mathbb{Q}) \otimes \mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2) = \text{Hom}_{SHM_{\mathbb{Q}}}(\mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2, \mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2).$$

On introduit Can l'élément de $\text{Hom}_{SHM_{\mathbb{Q}}}(\mathbb{Q}(0), H^1(A, \mathbb{Q}) \otimes \mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2)$ qui correspond à $Id_{\mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2}$. et on énonce une caractérisation de $[\mathcal{L}og_A^{(1)}]$.

Proposition 5.2.2 – L'extension $[\mathcal{L}og_A^{(1)}]$ est l'unique élément $x \in \text{Ext}_{VSHMU_{\mathbb{Q}}(A)}^1(\mathbb{Q}(0), \mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2)$ tel que :

$$e^*(x) = 0 \quad \text{et} \quad \delta(x) = Can.$$

Preuve :

1. La classe de la suite exacte (S) dans $\text{Ext}_{SHM_{\mathbb{Q}}}^1(\mathbb{Q}(0), \mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2)$ coïncide avec $e^*([\mathcal{L}og_A^{(1)}])$. Or (S) est une suite exacte de $SHM_{\mathbb{Q}}$ qui est scindée.
2. Le morphisme δ est déduit d'un morphisme de bord $\tilde{\delta}$ défini comme suit. Soit s la suite exacte courte $0 \rightarrow \mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2 \rightarrow E \rightarrow \mathbb{Q}(0) \rightarrow 0$ dans $VSHMU_{\mathbb{Q}}(A)$. Le morphisme $\tilde{\delta}(s)$ apparaît dans la suite exacte longue de cohomologie associée au triangle distingué :

$$a_* a^* \mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2 \rightarrow a_* E \rightarrow a_* \mathbb{Q}(0) \rightarrow a_* a^* \mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2[1] \quad :$$

$$0 \rightarrow H^0 a_* a^* \mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2 \rightarrow H^0 a_* E \rightarrow H^0 \circ a_* a^* \mathbb{Q}(0) \xrightarrow{\tilde{\delta}(s)} H^1 a_* a^* \mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2 \rightarrow \dots$$

Il suffit de prouver le résultat au niveau topologique, i.e. après avoir appliqué le foncteur For à la suite exacte longue précédente. La compatibilité entre les formalismes des six foncteurs implique que $For(\tilde{\delta}(s))$ apparaît dans la suite exacte longue de cohomologie associée au triangle distingué

$$R\bar{a}_*(\mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2) \rightarrow R\bar{a}_*(\bar{E}) \rightarrow R\bar{a}_*(\mathbb{Q}) \rightarrow R\bar{a}_*(\mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2)[1] \quad :$$

$$0 \rightarrow H^0 R\bar{a}_*(\mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2) \rightarrow H^0 R\bar{a}_*(\bar{E}) \rightarrow H^0 R\bar{a}_*(\mathbb{Q}) \xrightarrow{For(\tilde{\delta}(s))} H^1 R\bar{a}_*(\mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2) \rightarrow \dots$$

Comme \bar{A} est un tore, c'est un $K(\Gamma, 1)$. On peut donc utiliser la cohomologie du groupe π_1 pour calculer pour calculer $For(\tilde{\delta}(s))$. Ce dernier est présent dans la suite exacte longue de cohomologie associée à la suite exacte courte de représentations de π_1

$$0 \rightarrow \mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2 \rightarrow \bar{E}_x \rightarrow \mathbb{Q} \rightarrow 0 \quad :$$

$$0 \rightarrow \mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2 \rightarrow (\bar{E}_e)^{\pi_1} \rightarrow \mathbb{Q} \xrightarrow{For(\tilde{\delta}(s))} H^1(\pi_1, \mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2) \rightarrow \dots$$

Pour calculer $For(\delta([\mathcal{L}og_A^{(1)}]))$, on introduit le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} \mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2 & \longrightarrow & \mathbb{Q}[\pi_1]/\mathfrak{a}^2 & \longrightarrow & \mathbb{Q} & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow j & & \\ L_1(\mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2) & \longrightarrow & L_1(\mathbb{Q}[\pi_1]/\mathfrak{a}^2) & \xrightarrow{[\varepsilon]_*} & L_1(\mathbb{Q}) & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow d^0 & & \downarrow d^0 & & \downarrow & & \\ 0 \longrightarrow & L_2(\mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2) & \xrightarrow{k} & L_2(\mathbb{Q}[\pi_1]/\mathfrak{a}^2) & \longrightarrow & L_2(\mathbb{Q}) & \\ \downarrow d^1 & & \downarrow & & \downarrow & & \\ L_3(\mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2) & \longrightarrow & L_3(\mathbb{Q}[\pi_1]/\mathfrak{a}^2) & \longrightarrow & L_3(\mathbb{Q}) & & \end{array}$$

où $L_i(?)$, $i \in \mathbb{N}$, désigne le \mathbb{Q} -vectoriel ayant pour base les applications de $(\pi_1)^i$ dans ?. On a $H^1(\pi_1, \mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2) = \text{Ker}(d^1)/\text{Im}(d^0)$ et Can est l'élément de $L_2(\mathbb{Q}[\pi_1]/\mathfrak{a}^2)$ qui s'envoie sur $Id_{\mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2}$ via la composée :

$$\begin{array}{ccc} L_2(\mathbb{Q}[\pi_1]/\mathfrak{a}^2) & \rightarrow & \text{Hom}_{gr}(\pi_1/[\pi_1, \pi_1], \mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}(\mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2, \mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2) \\ f & \mapsto & [\bar{g} \mapsto f(g, 1)] \quad \mapsto \quad [g - 1 \mapsto f(g, 1)] \end{array}$$

De plus $k^{-1} d^0 [\varepsilon]_*^{-1} j(1)$ appartient à $\text{Ker}(d^1)$ et sa classe dans $H^1(\pi_1, \mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2)$ coïncide avec $For(\delta([\mathcal{L}og_A^{(1)}]))(1)$. Un calcul élémentaire montre que $For(\delta([\mathcal{L}og_A^{(1)}]))(1) = Can$.

□

On va maintenant montrer que $\mathcal{L}og_A^{(1)}$ caractérise complètement $\mathcal{L}og_A$. Soit $\mathcal{L}og_A^{(n)} := \text{Sym}^n(\mathcal{L}og_A^{(1)})$, $n \geq 0$. La fibre en x de $\mathcal{L}og_A^{(n)}$ est $\text{Sym}^n(\mathbb{Q}[\pi_1]/\mathfrak{a}^2)$. On note $1^{(n)}$ l'élément $[1 \otimes \dots \otimes 1]$ de $\text{Sym}^n(\mathbb{Q}[\pi_1]/\mathfrak{a}^2)$. Le morphisme de structures de Hodge de $\mathbb{Q}(0)$ vers $\text{Sym}^n(\mathbb{Q}[\pi_1]/\mathfrak{a}^2)$ qui à 1 associe $1^{(n)}$ fournit (propriété universelle de $\mathcal{L}og_A$) un morphisme de pro-variations $\varphi^{(n)} : \mathcal{L}og_A \rightarrow \mathcal{L}og_A^{(n)}$.

Notation 5.2.3 – Soit V un \mathbb{Q} -vectoriel et $\chi : V \rightarrow \mathbb{Q}$ une forme linéaire. On définit la contraction $c_n(\chi)$, $n \in \mathbb{N}^*$, par :

$$c_n(\chi) : \text{Sym}^n V \rightarrow \text{Sym}^{n-1} V \quad , \quad [v_1 \otimes \dots \otimes v_n] \mapsto \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \chi(v_{\sigma(1)}) [v_{\sigma(2)} \otimes \dots \otimes v_{\sigma(n)}].$$

La contraction a été normalisée pour que $c_{n+1}(\bar{\varepsilon})(1^{(n+1)}) = c_n(\bar{\varepsilon})(1^{(n)})$. On a donc un morphisme de pro-variations :

$$\varphi := (\varphi^{(n)})_{n \geq 0} : \mathcal{L}og_A \rightarrow \varprojlim_{n \geq 0} \mathcal{L}og_A^{(n)},$$

les morphismes de transition dans la limite de droite étant les contractions.

Proposition 5.2.4 – φ est un isomorphisme.

Preuve : Il suffit de prouver que $\bar{\varphi} : \mathbb{Q}[\pi_1]^\wedge \rightarrow \varprojlim_{n \geq 0} \text{Sym}^n(\mathbb{Q}[\pi_1]/\mathfrak{a}^2)$ est un isomorphisme de \mathbb{Q} -vectoriels. On fixe un isomorphisme $\pi_1 \simeq \mathbb{Z}^{2d}$. Celui-ci détermine un isomorphisme $\mathbb{Q}[\pi_1] \simeq \mathbb{Q}[X_1, X_1^{-1}, \dots, X_{2d}, X_{2d}^{-1}]$. La variation $\mathcal{L}og_A^{(n)}$ est unipotente d'indice n . Soit $n \in \mathbb{N}$. Le morphisme $\varphi^{(n)}$ se factorise donc à travers la projection $\mathbb{Q}[\pi_1]^\wedge \rightarrow \mathbb{Q}[\pi_1]/\mathfrak{a}^{n+1}$. L'action de π_1 sur $\mathbb{Q}[\pi_1]/\mathfrak{a}^2$ étant donnée par la multiplication, on en déduit l'expression de $\varphi^{(n)}$:

$$\mathbb{Q}[\pi_1]^\wedge \rightarrow \mathbb{Q}[\pi_1]/\mathfrak{a}^{n+1} \xrightarrow{\psi^{(n)}} \text{Sym}^n(\mathbb{Q}[\pi_1]/\mathfrak{a}^2) \\ X_1^{i_1} \dots X_{2d}^{i_{2d}} \mapsto [[X_1^{i_1} \dots X_{2d}^{i_{2d}}] \otimes \dots \otimes [[X_1^{i_1} \dots X_{2d}^{i_{2d}}]] .$$

On a $\psi^{(0)} = Id$. On considère le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathfrak{a}^{n+1}/\mathfrak{a}^{n+2} & \longrightarrow & \mathbb{Q}[\pi_1]/\mathfrak{a}^{n+2} & \longrightarrow & \mathbb{Q}[\pi_1]/\mathfrak{a}^{n+1} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \psi_1^{(n+1)} & & \downarrow \psi^{(n+1)} & & \downarrow \psi^{(n)} \\ 0 & \longrightarrow & \text{Sym}^{n+1}(\mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2) & \xrightarrow{i_{n+1}} & \text{Sym}^{n+1}(\mathbb{Q}[\pi_1]/\mathfrak{a}^2) & \xrightarrow{c_{n+1}(\bar{\varepsilon})} & \text{Sym}^n(\mathbb{Q}[\pi_1]/\mathfrak{a}^2) \longrightarrow 0 \end{array}$$

où le morphisme i_{n+1} est induit par l'inclusion $\mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2 \subset \mathbb{Q}[\pi_1]/\mathfrak{a}^2$. On prouve maintenant que $\psi_1^{(n+1)}$ est un isomorphisme. La famille

$$([(X_1 - 1)^{i_1} \dots (X_{2d} - 1)^{i_{2d}}])_{\{(i_1, \dots, i_{2d}) \in \mathbb{N}^{2d} / i_1 + \dots + i_{2d} = n+1\}}$$

est une base de $\mathfrak{a}^{n+1}/\mathfrak{a}^{n+2}$. Pour tout $(i_1, \dots, i_{2d}) \in \mathbb{N}^{2d} / i_1 + \dots + i_{2d} = n+1$, on a

$$\psi^{(n+1)}([(X_1 - 1)^{i_1} \dots (X_{2d} - 1)^{i_{2d}}]) = [\otimes^{i_1} [X_1 - 1] \otimes \dots \otimes \otimes^{i_{2d}} [X_{2d} - 1]].$$

Or $\{[X_1 - 1], \dots, [X_{2d} - 1]\}$ est une famille libre de $\mathbb{Q}[\pi_1]/\mathfrak{a}^2$. Donc $\psi_1^{(n+1)}$ est injective. On conclut à la bijectivité à l'aide des dimensions. À l'aide d'une récurrence, on déduit donc que les ψ^n sont des isomorphismes. \square

5.2.2 Le pro-système local sous-jacent au logarithme

On cherche à décrire le pro-système local sous-jacent à $\mathcal{L}og_A^{(1)}$, au niveau réel, comme fibré vectoriel à connexion intégrable (cf [Le]). Soit $\mathcal{L}og_{A,\mathbb{R}}^{(1)}$ le système local de \mathbb{R} -vectoriels déduit de $\mathcal{L}og_A^{(1)}$ par extension des scalaires.

On note \mathcal{H} la \mathbb{R} -structure de Hodge pure de poids (-1) $H^1(A, \mathbb{R})^\vee$. On a $\overline{\mathcal{H}} = H_1(\overline{A}, \mathbb{R})$ et on identifie $(\mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ et \mathcal{H} à l'aide de $i \otimes_{\mathbb{Q}} Id_{\mathbb{R}}$.

Soit $\overline{\delta}$ l'isomorphisme défini ci-dessous, analogue topologique réel de δ :

$$Ext_{\mathbb{R}A\text{-mod}}^1(\mathbb{R}, \overline{\mathfrak{a}^* \mathcal{H}}) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\mathbb{R}\text{-vect}}(\mathbb{R}, H^1 R\overline{\mathfrak{a}}_* \overline{\mathfrak{a}^* \mathcal{H}})$$

Il est clair que la classe de $\overline{\mathcal{L}og_{A,\mathbb{R}}^{(1)}}$ dans $Ext_{\mathbb{R}A\text{-mod}}^1(\mathbb{R}, \overline{\mathfrak{a}^* \mathcal{H}})$ est l'unique extension de systèmes locaux de \mathbb{R} par $\overline{\mathfrak{a}^* \mathcal{H}}$ dont l'image par $\overline{\delta}$ est $Can \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$.

Du point de vue des fibrés \mathcal{C}^∞ -réels, l'extension $\overline{\mathcal{L}og_{A,\mathbb{R}}^{(1)}}$ est triviale. On va dans ce qui suit préciser la connexion intégrable. Il s'agit de la connexion triviale (i.e. qui donne l'extension de systèmes locaux triviale) tordue par une 1-forme différentielle à valeurs dans $\overline{\mathcal{H}}$ qu'on définit ci-dessous.

L'exponentielle du groupe de Lie \mathcal{C}^∞ -réel A^∞ , $\exp : T_e A^\infty \rightarrow A^\infty$, est un morphisme de groupes surjectif dont le noyau est un sous-groupe discret de $T_e A^\infty$ qui s'identifie naturellement à $H_1(\overline{A}, \mathbb{Z})$. On a donc un isomorphisme $\psi : H_1(\overline{A}, \mathbb{R}) \xrightarrow{\sim} T_e A^\infty$. De plus, on a une trivialisaton canonique de TA^∞ :

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \psi' & & \\
 & & \curvearrowright & & \\
 A^\infty \times H_1(\overline{A}, \mathbb{R}) & \xrightarrow[\sim]{Id \times \psi} & A^\infty \times T_e A^\infty & \xrightarrow[\sim]{} & TA^\infty \\
 & \searrow & \downarrow & \swarrow & \\
 & & A^\infty & &
 \end{array}$$

Au moyen des identifications suivantes :

$$\begin{aligned}
 \text{End}(TA^\infty) &= \text{Hom}(A^\infty \times \mathbb{R}, TA^\infty \otimes \Omega_{A^\infty}^1) \quad (\text{morphisms de fibrés vectoriels}) \\
 &= \Gamma(A^\infty, TA^\infty \otimes \Omega_{A^\infty}^1) \\
 &\xrightarrow{\sim} \Gamma(A^\infty, \Omega_{A^\infty}^1) \otimes H_1(\overline{A}, \mathbb{R}) \quad (\text{via } \psi'),
 \end{aligned}$$

on associe à $Id \in \text{End}(TA^\infty)$, $\nu \in \Gamma(A^\infty, \Omega_{A^\infty}^1) \otimes H_1(\overline{A}, \mathbb{R})$.

Lemme 5.2.5 – La forme ν possède les deux propriétés suivantes.

- 1 La 1-forme différentielle ν à valeurs dans $H_1(\overline{A}, \mathbb{R})$ est fermée.
- 2 Soit $[\nu]$ la classe de ν dans $H_{DR}^1(A^\infty) \otimes H_1(\overline{A}, \mathbb{R})$. On a l'identité $[\nu] = Can \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$.

Preuve :

1. Pour prouver le résultat, on fixe un isomorphisme de groupes de Lie \mathcal{C}^∞ entre A^∞ et $\mathbb{R}^{2d}/\mathbb{Z}^{2d}$ compatible avec le choix de la base de $T_e A^\infty$. Les relations de Schwarz sur les dérivées partielles (relation de commutativité des dérivées partielles secondes) impliquent que ν est fermée.
2. Tout d'abord, l'élément $Can \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \in H^1 R\bar{a}_*(\bar{a}^* \bar{\mathcal{H}})$ correspond, via

$$H^1 R\bar{a}_*(\bar{a}^* \bar{\mathcal{H}}) \xrightarrow{\sim} H^1_{sing}(\bar{A}, \mathbb{R}) \otimes \bar{\mathcal{H}} \xrightarrow{\sim} H^1_{DR}(A^\infty) \otimes H_1(\bar{A}, \mathbb{R}),$$

à l'élément canonique de $H^1_{DR}(A^\infty) \otimes H_1(\bar{A}, \mathbb{R})$. On regarde alors l'identification entre $H_1(\bar{A}, \mathbb{R})$ et $T_e A^\infty$ (cf [Gr]) pour achever la preuve. \square

On considère le fibré vectoriel $E := \mathcal{O}_{A^\infty} \oplus (\mathcal{O}_{A^\infty} \otimes \bar{\mathcal{H}})$ muni de la connexion ∇^1 :

$$\begin{aligned} \nabla^1 : \quad \mathcal{O}_{A^\infty} \oplus (\mathcal{O}_{A^\infty} \otimes \bar{\mathcal{H}}) &\longrightarrow \Omega^1_{A^\infty} \oplus (\Omega^1_{A^\infty} \otimes \bar{\mathcal{H}}) \\ (f, g \otimes h) &\longmapsto (df, dg \otimes h + f\nu) \end{aligned}$$

La connexion ∇^1 est plate (ν est fermée). Le faisceau $\mathbb{E} := \text{Ker}(\nabla^1)$ est donc un système local. On a une suite exacte de fibrés vectoriels munis de connexions :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & (\mathcal{O}_{A^\infty} \otimes \bar{\mathcal{H}}, \nabla_{GM}) & \rightarrow & (\mathcal{O}_{A^\infty} \oplus (\mathcal{O}_{A^\infty} \otimes \bar{\mathcal{H}}), \nabla^1) & \rightarrow & (\mathcal{O}_{A^\infty}, d) \rightarrow 0, \\ & & g \otimes h & \mapsto & (0, g \otimes h) & & \\ & & & & (f, g \otimes h) & \mapsto & f \end{array}$$

où ∇_{GM} désigne la connexion de Gauss-Manin. Celle-ci correspond à une suite exacte de systèmes locaux $0 \rightarrow \bar{a}^* \bar{\mathcal{H}} \rightarrow \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow 0$ dont la classe dans $\text{Ext}^1_{\mathbb{R}_{A^\infty}\text{-mod}}(\mathbb{R}, \bar{a}^* \bar{\mathcal{H}})$ est notée $[\mathbb{E}]$.

Proposition 5.2.6 – On a $\bar{\delta}([\mathbb{E}]) = Can \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$, i.e. $\mathbb{E} \simeq \overline{\mathcal{L}og_{A, \mathbb{R}}^{(1)}}$.

Preuve : On utilise la résolution de \mathbb{E} construite à partir de (E, ∇^1) pour expliciter $\bar{\delta}$:

$$\begin{array}{ccccccc} \bar{a}^* \bar{\mathcal{H}} & \longrightarrow & \mathbb{E} & \longrightarrow & \mathbb{R} & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow j & & \\ \mathcal{O}_{A^\infty} \otimes \bar{\mathcal{H}} & \longrightarrow & \mathcal{O}_{A^\infty} \oplus (\mathcal{O}_{A^\infty} \otimes \bar{\mathcal{H}}) & \xrightarrow{p} & \mathcal{O}_{A^\infty} & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow \nabla^1 & & \downarrow & & \\ 0 \longrightarrow & \Omega^1_{A^\infty} \otimes \bar{\mathcal{H}} & \xrightarrow{k} & \Omega^1_{A^\infty} \oplus (\Omega^1_{A^\infty} \otimes \bar{\mathcal{H}}) & \longrightarrow & \Omega^1_{A^\infty} & \\ \downarrow d^1 & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \Omega^2_{A^\infty} \otimes \bar{\mathcal{H}} & \longrightarrow & \Omega^2_{A^\infty} \oplus (\Omega^2_{A^\infty} \otimes \bar{\mathcal{H}}) & \longrightarrow & \Omega^2_{A^\infty} & & \end{array}$$

Alors $k^{-1} \nabla^1 p^{-1} j(1)$ est dans $\text{Ker}(d^1)$ et sa classe dans $H^1_{DR}(A^\infty) \otimes H_1(\bar{A}, \mathbb{R})$ coïncide avec $\bar{\delta}([\mathbb{E}])$. Or $k^{-1} \nabla^1 p^{-1} j(1) = \nu$ et $[\nu] = Can \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ par le lemme 5.2.5. \square

Soit $\overline{\mathcal{L}og_{A,\mathbb{R}}}$ l'extension de \mathbb{Q} à \mathbb{R} du pro-système local sous-jacent à $\mathcal{L}og_A$. On a :

$$\overline{\mathcal{L}og_{A,\mathbb{R}}} = \varprojlim_{n \geq 0} \text{Sym}^n \overline{\mathcal{L}og_{A,\mathbb{R}}^{(1)}}$$

À l'aide du résultat précédent, on peut décrire $\overline{\mathcal{L}og_{A,\mathbb{R}}}$ comme pro-fibré vectoriel muni d'une connexion plate.

Notation 5.2.7 – Soient V, W deux vectoriels. On définit la multiplication \times_n , $n \geq 0$, par :

$$\times_n : \text{Sym}^n V \otimes V \otimes W \rightarrow \text{Sym}^{n+1} V \otimes W \quad , \quad [v_1 \otimes \dots \otimes v_n] \otimes v \otimes w \mapsto [v_1 \otimes \dots \otimes v_n \otimes v] \otimes w.$$

La connexion ∇^1 sur E induit une connexion ∇^n sur $\text{Sym}^n E$, $n \geq 1$, donnée par :

$$\begin{aligned} \nabla : \quad \text{Sym}^n E &\rightarrow \text{Sym}^n E \otimes \Omega_{A^\infty}^1 \\ [e_1 \otimes \dots \otimes e_n] &\mapsto \sum_{i=1}^n [e_1 \otimes \dots \otimes \hat{e}_i \otimes \dots \otimes e_n] \times_{n-1} \nabla^1(e_i) \end{aligned}$$

Soit $[\nu]_n : \text{Sym}^n(\overline{\mathcal{H}} \otimes \mathcal{O}_{A^\infty}) \rightarrow \text{Sym}^{n+1}(\overline{\mathcal{H}} \otimes \mathcal{O}_{A^\infty}) \otimes \Omega_{A^\infty}^1$, $n \geq 0$, définie comme étant la composée :

$$\text{Sym}^n(\overline{\mathcal{H}} \otimes \mathcal{O}_{A^\infty}) \xrightarrow{\text{Id} \otimes \nu} \text{Sym}^n(\overline{\mathcal{H}} \otimes \mathcal{O}_{A^\infty}) \otimes (\overline{\mathcal{H}} \otimes \Omega_{A^\infty}^1) \xrightarrow{\times_n \otimes \text{Id}} \text{Sym}^{n+1}(\overline{\mathcal{H}} \otimes \mathcal{O}_{A^\infty}) \otimes \Omega_{A^\infty}^1.$$

On note ∇_{GM}^n la connexion de Gauss-Manin sur $\text{Sym}^n(\mathcal{H} \otimes \mathcal{O}_{A^\infty})$. On introduit le pro-fibré à connexion

$$(\mathcal{G}, \nabla) := (\varprojlim_{n \geq 0} \text{Sym}^n(\overline{\mathcal{H}} \otimes \mathcal{O}_{A^\infty}), \varprojlim_{n \geq 0} (\nabla_{GM}^n + [\nu]_n)).$$

Pour tout $n \geq 0$, on pose

$$(\mathcal{G}^n, \nabla^n) := (\mathcal{G}, \nabla) / W_n \quad \text{où} \quad W_n := \varprojlim_{k \geq n+1} \text{Sym}^k(\overline{\mathcal{H}} \otimes \mathcal{O}_{A^\infty})$$

Alors $(\mathcal{G}^1, \nabla^1) = (E, \nabla^1)$ et $(\mathcal{G}, \nabla) = \varprojlim_{n \geq 0} \mathcal{G}^n$, les morphismes de transition étant les projections.

Proposition 5.2.8 – Il existe des isomorphismes de fibrés à connexions $(\varphi^n : \mathcal{G}^n \rightarrow \text{Sym}^n \mathcal{G}^1)_{n \geq 0}$ qui induisent un isomorphisme de pro-systèmes locaux

$$\varphi : \mathcal{G} = \varprojlim_{n \geq 0} \mathcal{G}^n \rightarrow \varprojlim_{n \geq 0} \text{Sym}^n \mathcal{G}^1 = \overline{\mathcal{L}og_{A,\mathbb{R}}},$$

où les morphismes de transition du terme de droite sont les contractions $(c_n(\overline{\varepsilon}))_{n \in \mathbb{N}}$.

Preuve : D'une part, $\mathcal{G}^n = \bigoplus_{0 \leq k \leq n} \text{Sym}^k(\mathcal{H} \otimes \mathcal{O}_{A^\infty})$ et d'autre part, on a un isomorphisme naturel :

$$\begin{aligned} \psi_n : \quad \bigoplus_{0 \leq k \leq n} \text{Sym}^k(\overline{\mathcal{H}} \otimes \mathcal{O}_{A^\infty}) &\rightarrow \text{Sym}^k(\mathcal{O}_{A^\infty} \oplus (\overline{\mathcal{H}} \otimes \mathcal{O}_{A^\infty})). \\ [h_1 \otimes \dots \otimes h_k] &\mapsto [1 \otimes \dots \otimes 1 \otimes h_1 \otimes \dots \otimes h_k] \end{aligned}$$

Pour $n \geq 2$, ψ_n n'est ni compatible avec les morphismes de transition, ni compatible avec les connexions. On corrige ce défaut à l'aide d'un automorphisme α_n de $\bigoplus_{0 \leq k \leq n} \text{Sym}^k(\overline{\mathcal{H}} \otimes \mathcal{O}_{A^\infty})$ défini facteur par facteur par une homothétie de rapport α_n^k non nul. On fixe $\alpha_0^0 = 1$. La compatibilité des $\psi^n \circ \alpha_n$, $n \geq 0$, avec les morphismes de transition est satisfaite ssi les relations suivantes sont vérifiées :

$$(R_1) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall k, 0 \leq k \leq n-1, \quad \alpha_n^k = \frac{n!}{N_n^k} \alpha_{n-1}^k,$$

où N_n^k est le cardinal de $\{\sigma \in \mathfrak{S}_n / \sigma(1) \in \{1, \dots, n-k\}\}$, i.e. $N_n^k = (n-k)[(n-1)!]$. La condition (R_1) s'écrit donc :

$$(R_1) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall k, 0 \leq k \leq n-1, \quad \alpha_n^k = \frac{n}{n-k} \alpha_{n-1}^k.$$

Les morphismes $\psi^n \circ \alpha_n$, $n \geq 0$, sont compatibles avec les connexions ssi

$$(R_2) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall k, 0 \leq k \leq n-1, \quad \alpha_n^{k+1} = (n-k) \alpha_n^k.$$

On pose

$$\alpha_n^k := \frac{n!}{(n-k)!}, \quad n \in \mathbb{N}, 0 \leq k \leq n,$$

et on s'assure les relations (R_1) et (R_2) ont lieu.

Si on pose pour tout $n \geq 0$, $\varphi^n := \psi^n \circ \alpha_n$, la famille $(\varphi^n)_{n \geq 0}$ convient. \square

On déduit de ce résultat que $(\overline{\mathcal{L}og_{A, \mathbb{R}}})_e$ est isomorphe à $\prod_{k \geq 0} \text{Sym}^k \overline{\mathcal{H}}$. Ce résultat est en fait vrai au niveau des structures de Hodge (principe de scindage) pour le corps de base \mathbb{Q} .

Proposition 5.2.9 – *Il existe des isomorphismes de structures de Hodge $(\theta_n : \text{Sym}^n \mathbb{Q}[\pi_1]/\mathfrak{a}^2 \rightarrow \bigoplus_{0 \leq k \leq n} \text{Sym}^k \mathcal{H})_{n \geq 0}$ qui induisent un isomorphisme de pro-structures de Hodge :*

$$(\mathcal{L}og_A)_e = \varprojlim_{n \geq 0} \text{Sym}^n \mathbb{Q}[\pi_1]/\mathfrak{a}^2 \rightarrow \varprojlim_{n \geq 0} \left(\bigoplus_{0 \leq k \leq n} \text{Sym}^k(\mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2) \right) = \prod_{k \geq 0} \text{Sym}^k(\mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2).$$

Preuve : Les morphismes $(\theta_n := \varphi_e^n)_{n \geq 0}$ respectent la structure rationnelle et les filtrations. \square

5.3 Cas relatif

Dans cette partie, qui suit fidèlement [Wi1-I-Chap 3], on rappelle la définition et les principales propriétés du logarithme dans le contexte relatif. Les résultats obtenus dans le cas absolu (théorème de Hain-Zucker, propriétés universelles du logarithme et de son pro-système local sous-jacent) s'étendent au cas relatif.

Soient $\pi : X \rightarrow Y$ un morphisme de variétés algébriques complexes lisses muni d'une section $i : Y \rightarrow X$, $y \in Y(\mathbb{C})$ et $x := i(y)$. On fait l'hypothèse suivante :

(H) $\bar{\pi} : \bar{X} \rightarrow \bar{Y}$ est une fibration localement triviale.

Alors, on a une suite exacte :

$$1 \longrightarrow \pi_1(\bar{X}_y, x) \longrightarrow \pi_1(\bar{X}, x) \xrightarrow{\bar{i}} \pi_1(\bar{Y}, y) \longrightarrow 1 .$$

On définit une action de $\pi_1(\bar{X}, x) = \pi_1(\bar{X}_y, x) \rtimes \pi_1(\bar{Y}, y)$ sur $\mathbb{Q}[\pi_1(\bar{X}_y, x)]^\wedge$ en faisant agir $\pi_1(\bar{X}_y, x)$ par multiplication à gauche et $\pi_1(\bar{Y}, y)$ par conjugaison. D'où un pro-système local de \mathbb{Q} -vectoriels sur \bar{X} noté \mathbb{V} . Soit $y' \in Y(\mathbb{C})$. Alors on a un isomorphisme canonique :

$$\mathbb{V}_{|\bar{X}_{y'}} \xrightarrow{\sim} \overline{\mathcal{L}og_{X_{y'}, i(y')}} .$$

Ainsi fibre à fibre, \mathbb{V} est muni d'une filtration par le poids et d'une filtration de Hodge.

Théorème 5.3.1 [Wi1-I-Thm 3.3] – \mathbb{V} et ses filtrations de poids et de Hodge définissent un objet de $\text{pro-VSHMU}_{\mathbb{Q}}(X, \pi)$ noté $\mathcal{L}og_{X, i, y}$.

Soit $\mathbb{W} \in \text{VSHMU}_{\mathbb{Q}}(X, \pi)$. On a une action de $\pi_1(\bar{X}_y, x)$ sur $i^*\bar{\mathbb{W}}$ (la monodromie relative) qui, puisque \mathbb{W} est unipotente relativement à π s'étend en un morphisme

$$\rho : \mathbb{Q}[\pi_1(\bar{X}_y, x)]^\wedge \rightarrow \underline{\text{End}}(i^*\bar{\mathbb{W}}) .$$

Ce morphisme respecte les filtrations de $\mathbb{Q}[\pi_1(\bar{X}_y, x)]^\wedge$ et celles de $\underline{\text{End}}(i^*\bar{\mathbb{W}})$. ρ est un morphisme de pro-variations.

Théorème 5.3.2 [Wi1-I-Cor 3.4] Le foncteur suivant :

$$\begin{array}{ccc} \text{VSHMU}_{\mathbb{Q}}(X, \pi) & \rightarrow & \left(\begin{array}{l} \mathbb{V} \in \text{VSHM}_{\mathbb{Q}}(Y) \text{ munie d'un morphisme de pro-variations} \\ i^*\mathcal{L}og_{X, i, y} \rightarrow \underline{\text{End}}(\mathbb{V}) \\ \text{qui respecte les structures d'algèbres} \end{array} \right) . \\ \mathbb{W} & \mapsto & (i^*\mathbb{W}, \rho) \end{array}$$

est une équivalence de catégories.

On a un morphisme de variations de \mathbb{Q} -structures de Hodge canonique, $1 : \mathbb{Q}(0)_Y^V \rightarrow \mathbb{Q}[\pi_1(\bar{X}_y, x)]^\wedge$ induit par la structure de \mathbb{Q} -algèbre de $\mathbb{Q}[\pi_1(\bar{X}_y, x)]^\wedge$.

Théorème 5.3.3 [Wi1-I-Thm 3.5] – La transformation naturelle entre foncteurs de $\text{VSHMU}_{\mathbb{Q}}(X, \pi)$ vers $\text{VSHM}_{\mathbb{Q}}(Y)$

$$\begin{array}{ccc} \pi_* \underline{\text{Hom}}(\mathcal{L}og_{X, i, y}, \cdot) & \rightarrow & i^* \\ \varphi & \mapsto & i^*(\varphi)(1) \end{array}$$

est un isomorphisme de foncteurs.

Théorème 5.3.4 [Wi1-I-Thm 3.5] – La transformation naturelle entre foncteurs de $\text{SystLoc}U_{\mathbb{Q}}(X, \pi)$ vers $\text{SystLoc}_{\mathbb{Q}}(Y)$:

$$\begin{array}{ccc} \overline{\pi}_* \underline{\text{Hom}}(\overline{\mathcal{L}og}_{X,i,y}, \cdot) & \rightarrow & \overline{i}^* \\ \varphi & \mapsto & (\overline{i}^* \varphi)(1) \end{array}$$

est un isomorphisme de foncteurs.

Remarque 5.3.5 – Soit $y' \in Y(\mathbb{C})$. Alors, tout chemin allant de y' à y induit un isomorphisme de pro-variations $\mathcal{L}og_{X,i,y} \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}og_{X,i,y'}$. La propriété universelle du logarithme implique que cet isomorphisme est en fait indépendant du choix de chemin. Ainsi, on note simplement $\mathcal{L}og_{X,i}$ l'objet $\mathcal{L}og_{X,i,y}$.

5.4 Cas d'un schéma abélien

On a étudié le logarithme d'une variété abélienne et obtenu deux résultats : on a décrit le logarithme comme limite projective d'un système constitué des puissances symétriques d'une variation et on a explicité le pro-système local sous-jacent au logarithme en termes de pro-fibré à connexion.

Dans un premier temps, on les généralise au cas des familles de variétés abéliennes. On obtient un principe de scindage, analogue à celui vu pour une variété abélienne, qui est un ingrédient important pour l'étude qui clôt cette partie : le calcul des images directes supérieures du logarithme.

Soit $A \xrightleftharpoons[\pi]{e} B$ un schéma abélien complexe de dimension relative d tel que B est lisse. D'après le théorème de trivialisations de Ehresmann ([V-Thm 9.3]), l'hypothèse (H) est satisfaite.

Notation 5.4.1 – On note $\mathcal{L}og_A$ la pro-variation $\mathcal{L}og_{A,e}$.

On fixe de plus un point base $b \in B(\mathbb{C})$ et on note $a := e(b)$.

5.4.1 Autre description du logarithme pour des familles de variétés abéliennes

On note \mathfrak{a}_b le noyau de l'augmentation $\varepsilon_b : \mathbb{Q}[\pi_1(\overline{A}_b, a)] \rightarrow \mathbb{Q}$. On a une suite exacte scindée de \mathbb{Q} -vectoriels :

$$0 \longrightarrow \mathfrak{a}_b/\mathfrak{a}_b^2 \longrightarrow \mathbb{Q}[\pi_1(\overline{A}_b, a)]/\mathfrak{a}_b^2 \xrightleftharpoons[\overline{1}_b]{\overline{\varepsilon}_b} \mathbb{Q} \longrightarrow 0.$$

On munit chacun des termes de cette suite d'une action de $\pi_1(\overline{A}, a) = \pi_1(\overline{A}_b, a) \rtimes \pi_1(\overline{B}, b)$. Le groupe $\pi_1(\overline{A}, a)$ agit trivialement sur \mathbb{Q} . Sur $\mathbb{Q}[\pi_1(\overline{A}_b, a)]/\mathfrak{a}_b^2$ et $\mathfrak{a}_b/\mathfrak{a}_b^2$, $\pi_1(\overline{A}_b, a)$ agit par multiplication et $\pi_1(\overline{B}, b)$ agit par conjugaison. On remarque que $\pi_1(\overline{A}_b, a)$ agit trivialement sur $\mathfrak{a}_b/\mathfrak{a}_b^2$. On vérifie alors que (S) est une suite exacte de $\pi_1(\overline{A}, a)$ -modules, d'où une suite exacte de systèmes locaux (non scindée en général) sur \overline{A} :

$$(S) \quad 0 \longrightarrow \mathfrak{a}_b/\mathfrak{a}_b^2 \longrightarrow \mathbb{Q}[\pi_1(\overline{A}_b, a)]/\mathfrak{a}_b^2 \xrightarrow{\overline{\varepsilon}_b} \mathbb{Q} \longrightarrow 0.$$

On va maintenant installer des filtrations sur ces systèmes locaux. Pour tout $b' \in B$, on applique le foncteur "restriction à $\overline{A}_{b'}$ " à (S) . Le résultat est une suite exacte canoniquement isomorphe à :

$$0 \rightarrow \mathfrak{a}_{b'}/\mathfrak{a}_{b'}^2 \rightarrow \mathbb{Q}[\pi_1(\overline{A}_{b'}, e(b'))]/\mathfrak{a}_{b'}^2 = \overline{\mathcal{L}og}_{A_{b'}}^{(1)} \rightarrow \mathbb{Q} \rightarrow 0.$$

Chacun de ces systèmes locaux est sous-jacent à une variation de structures de Hodge. Ainsi sur chacune des fibres de π , on dispose de filtrations pour les trois systèmes locaux. Il existe trois variations de \mathbb{Q} -structure de Hodge admissibles sur A dont les systèmes locaux sous-jacents et les filtrations fibre à fibre coïncident avec les données précédentes.

- . On note $\mathfrak{a}_b/\mathfrak{a}_b^2$ le système local sur \overline{B} associé à $\mathfrak{a}_b/\mathfrak{a}_b^2$ muni de l'action de $\pi_1(\overline{B}, b)$ par multiplication. L'isomorphisme $i_b : \mathfrak{a}_b/\mathfrak{a}_b^2 \rightarrow H_1(\overline{A}_b, \mathbb{Q})$ fournit un isomorphisme de systèmes locaux sur \overline{B} entre $\mathfrak{a}_b/\mathfrak{a}_b^2$ et $(R^1\pi_*\mathbb{Q})^\vee$. À l'aide de cette identification, on définit une variation de \mathbb{Q} -structures de Hodge $\mathfrak{a}_b/\mathfrak{a}_b^2$ pure de poids -1 sur B dont le système local sous-jacent est $\mathfrak{a}_b/\mathfrak{a}_b^2$. La variation sous-jacente à $\mathfrak{a}_b/\mathfrak{a}_b^2$ recherchée est $\pi^*\mathfrak{a}_b/\mathfrak{a}_b^2$.
- . Pour $\mathbb{Q}[\pi_1(\overline{A}_b, a)]/\mathfrak{a}_b^2$, on est dans la situation d'une variation sur un espace de chemins (cf [HZ] et la construction de $\mathcal{L}og_A$). On note $\mathcal{L}og_{A,b}^{(1)}$ la variation admissible obtenue et on choisit cette structure de variation sur $\mathbb{Q}[\pi_1(\overline{A}_b, a)]/\mathfrak{a}_b^2$.
- . Pour \mathbb{Q} , on prend $\mathbb{Q}(0)_A^V$.

Les morphismes figurant dans la suite exacte (S) respectent les filtrations, d'où une suite exacte dans $VSHMU_{\mathbb{Q}}(A, \pi)$:

$$(S') \quad 0 \rightarrow \pi^*\mathfrak{a}_b/\mathfrak{a}_b^2 \rightarrow \mathcal{L}og_{A,b}^{(1)} \rightarrow \mathbb{Q}(0)_A^V \rightarrow 0$$

dont la classe dans $\text{Ext}_{VSHMU_{\mathbb{Q}}(A,\pi)}^1(\mathbb{Q}(0)_A^V, \pi^*\mathfrak{a}_b/\mathfrak{a}_b^2)$ est notée $[\mathcal{L}og_{A,b}^{(1)}]$.

Remarques 5.4.2 –

- i) Par construction, on a : $(\mathcal{L}og_{A,b}^{(1)})|_{A_b} = \mathcal{L}og_{A_b}^{(1)}$.
- ii) On applique le foncteur e^* à (S') . Au niveau topologique, on a :

$$0 \longrightarrow \mathfrak{a}_b/\mathfrak{a}_b^2 \longrightarrow \mathbb{Q}[\pi_1(\overline{A}_b, a)]/\mathfrak{a}_b^2 \xrightleftharpoons[\overline{\Gamma}_b]{\overline{\varepsilon}_b} \mathbb{Q} \longrightarrow 0,$$

où $\mathbb{Q}[\pi_1(\overline{A}_b, a)]/\mathfrak{a}_b^2$ désigne le système local associé à $\mathbb{Q}[\pi_1(\overline{A}_b, a)]/\mathfrak{a}_b^2$ muni de l'action de $\pi_1(\overline{B}, b)$ par multiplication. Le morphisme $\overline{\Gamma}_b$ est $\pi_1(\overline{B}, b)$ -équivariant ; cette suite exacte de systèmes locaux sur \overline{B} est scindée. D'autre part, $\overline{\Gamma}_b$ respecte les filtrations fibre à fibre, d'où une suite exacte scindée dans $VSHM_{\mathbb{Q}}(B)$:

$$0 \longrightarrow \mathfrak{a}_b/\mathfrak{a}_b^2 \longrightarrow e^*\mathcal{L}og_{A,b}^{(1)} \xrightleftharpoons[\overline{\Gamma}_b]{\overline{\varepsilon}_b} \mathbb{Q}(0)_B^V \longrightarrow 0.$$

On a une injection naturelle :

$$”l^1” : Ext_{VSHM_{\mathbb{Q}(A,\pi)}}^1(\mathbb{Q}(0)_A^V, \pi^* \mathfrak{a}_b/\mathfrak{a}_b^2) \hookrightarrow Ext_{MHM_{\mathbb{Q}(A)}}^1((\mathbb{Q}(0)_A^V)^\iota, (\pi^* \mathfrak{a}_b/\mathfrak{a}_b^2)^\iota).$$

La suite spectrale de Leray de la composition $RHom_{MHM_{\mathbb{Q}(B)}}((\mathbb{Q}(0)_B^M)^\iota, \cdot) \circ \pi_*$ appliquée à $\pi^*(\mathfrak{a}_b/\mathfrak{a}_b^2)^\iota$ donne la suite exacte courte scindée :

$$\begin{array}{ccc} 0 \longrightarrow Ext_{MHM_{\mathbb{Q}(B)}}^1((\mathbb{Q}(0)_B^V)^\iota, (\mathfrak{a}_b/\mathfrak{a}_b^2)^\iota) & \xleftarrow[\pi^*]{e^*} & H^1 RHom_{MHM_{\mathbb{Q}(A)}}(\pi^*(\mathbb{Q}(0)_B^V)^\iota, \pi^*(\mathfrak{a}_b/\mathfrak{a}_b^2)^\iota) \\ & & \downarrow \\ & & Hom_{MHM_{\mathbb{Q}(B)}}((\mathbb{Q}(0)_B^V)^\iota, H^1 \pi_* \pi^*(\mathfrak{a}_b/\mathfrak{a}_b^2)^\iota) \longrightarrow 0. \end{array}$$

En utilisant les résultats de la partie 2.3.2, la suite exacte précédente se réécrit :

$$\begin{array}{ccc} 0 \longrightarrow Ext_{VSHM_{\mathbb{Q}(B)}}^1(\mathbb{Q}(0)_B^V, \mathfrak{a}_b/\mathfrak{a}_b^2) & \xleftarrow[\pi^*]{e^*} & Ext_{VSHM_{\mathbb{Q}(A)}}^1(\mathbb{Q}(0)_A^V, \pi^* \mathfrak{a}_b/\mathfrak{a}_b^2) \\ \downarrow \delta & & \downarrow \\ Hom_{VSHM_{\mathbb{Q}(B)}}(\mathbb{Q}(0)_B^V, R^1 \pi_* \mathbb{Q} \otimes (\mathfrak{a}_b/\mathfrak{a}_b^2)) & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Par définition de la variation $\mathfrak{a}_b/\mathfrak{a}_b^2$, on a :

$$(\mathfrak{a}_b/\mathfrak{a}_b^2)^\vee = R^1 \pi_* \mathbb{Q}$$

et donc on a :

$$Hom_{VSHM_{\mathbb{Q}(B)}}(\mathbb{Q}(0)_B^V, R^1 \pi_* \mathbb{Q} \otimes (\mathfrak{a}_b/\mathfrak{a}_b^2)) = End_{VSHM_{\mathbb{Q}(B)}}(\mathfrak{a}_b/\mathfrak{a}_b^2).$$

On définit Can comme étant l'élément de $Hom_{VSHM_{\mathbb{Q}(B)}}(\mathbb{Q}(0)_B^V, R^1 \pi_* \mathbb{Q} \otimes (\mathfrak{a}_b/\mathfrak{a}_b^2))$ correspondant à $Id_{\mathfrak{a}_b/\mathfrak{a}_b^2}$ sous l'identification précédente.

Proposition 5.4.3 *La décomposition de $[\mathcal{L}og_{A,b}^{(1)}]$ relativement au scindage décrit ci-dessus est :*

$$e^*([\mathcal{L}og_{A,b}^{(1)}]) = 0 \quad \text{et} \quad \delta([\mathcal{L}og_{A,b}^{(1)}]) = Can.$$

Preuve :

- i) La première égalité a déjà été prouvée (cf ii) de la remarque 5.4.2).
- ii) Pour la deuxième, il suffit de vérifier le résultat sur la fibre en b . On est alors ramené au cas d'une variété abélienne et dans ce cas le résultat a été démontré auparavant. \square

Soit $\mathcal{L}og_{A,b}^{(n)} := Sym^n \mathcal{L}og_{A,b}^{(1)}$, $n \geq 0$. On considère le système projectif $\varinjlim_{n \geq 0} \mathcal{L}og_{A,b}^{(n)}$ dont les

morphismes de transition sont donnés par les $c_n(\overline{\varepsilon}_b)$, $n \geq 0$.

Pour tout $n \geq 1$, soit $1_b^n : \mathbb{Q}(0)_B^V \rightarrow e^* \mathcal{L}og_{A,b}^{(n)}$ le morphisme induit par :

$$\otimes^n \overline{1}_b : \otimes^n \mathbb{Q}(0)_B^V \rightarrow \otimes^n e^* \mathcal{L}og_{A,b}^{(1)},$$

où $\overline{1}_b : \mathbb{Q}(0)_B^V \rightarrow e^* \mathcal{L}og_{A,b}^{(1)}$ est le morphisme introduit dans le ii) de la remarque 5.4.2. On pose $1_b^0 = Id_{\mathbb{Q}(0)_B^V}$. On applique alors le théorème 5.3.3 pour associer à 1_b^n , ($n \in \mathbb{N}$), le morphisme $\varphi_b^{(n)}$:

$$\varphi_b^{(n)} : \mathcal{L}og_{A,b} \rightarrow \mathcal{L}og_{A,b}^{(n)}$$

Puisque pour tout $n \geq 1$, $c_n(\overline{\varepsilon}_b)(1_b^n) = 1_b^{n-1}$, $(\varphi_b^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ définit un morphisme de pro-variations : $\varphi_b : \mathcal{L}og_{A,b} \rightarrow \varinjlim_{n \geq 0} \mathcal{L}og_{A,b}^{(n)}$.

Proposition 5.4.4 φ_b est un isomorphisme.

Preuve : Il suffit de vérifier que φ_b est un isomorphisme sur la fibre en b , ce qui revient à prouver le résultat pour une variété abélienne. Ce cas a déjà été traité. \square

Remarque 5.4.5 – On a un morphisme de pro-variations de structures de Hodge

$$1_b^{(\cdot)} : \mathbb{Q}(0)_B^V \rightarrow \varinjlim_{n \geq 0} e^* \mathcal{L}og_{A,b}^{(n)}, \quad 1 \mapsto (1_b^{(n)})_{n \geq 0}.$$

Le couple $(\varinjlim_{n \geq 0} \mathcal{L}og_{A,b}^{(n)}, 1_b^{(\cdot)})$ est isomorphe à $(\mathcal{L}og_{A,b}, 1)$. Par conséquent, il n'admet pas d'automorphisme non trivial (rigidité). Par suite, le couple $(\mathcal{L}og_{A,b}^{(1)}, \overline{1}_b)$ non plus. Pour tout $b' \in B(\mathbb{C})$, le choix d'un chemin liant b à b' induit un isomorphisme $(\mathcal{L}og_{A,b}^{(1)}, \overline{1}_b) \simeq (\mathcal{L}og_{A,b'}^{(1)}, \overline{1}_{b'})$. Par rigidité, cet isomorphisme ne dépend pas du choix d'un chemin. On s'autorise donc à noter $(\mathcal{L}og_A^{(1)}, \overline{1})$ l'objet $(\mathcal{L}og_{A,b}^{(1)}, \overline{1}_b)$.

5.4.2 Le pro-système local sous-jacent au logarithme pour des familles de variétés abéliennes

On conserve les notations de la partie précédente. Soit $\overline{\mathcal{L}og}_{A,\mathbb{R}}^{(1)}$ l'extension de \mathbb{Q} à \mathbb{R} du système local de \mathbb{Q} -vectoriels sous-jacent à $\mathcal{L}og_A^{(1)}$. Comme dans le cas d'une variété abélienne, on va décrire ce système local de \mathbb{R} -vectoriels comme un fibré vectoriel muni d'une connexion intégrable en suivant l'approche de Levin (cf [Le]).

On introduit l'objet $\mathcal{H} := (R^1 \pi_* \mathbb{R})^\vee$ qui s'identifie à $(\mathfrak{a}_b / \mathfrak{a}_b^2)_B \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ au moyen de $i_b \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$. Le morphisme δ a l'analogie topologique réel noté $\overline{\delta}$ suivant :

$$Ext_{\mathbb{R}A\text{-mod}}^1(\mathbb{R}, \overline{\pi^* \mathcal{H}}) \rightarrow Hom_{\mathbb{R}B\text{-mod}}(\mathbb{R}, H^1 R\overline{\pi_* \overline{\pi^* \mathcal{H}}}).$$

La classe de $\overline{\mathcal{L}og}_{A,\mathbb{R}}^{(1)}$ dans $Ext_{\mathbb{R}A\text{-mod}}^1(\mathbb{R}, \overline{\pi^* \mathcal{H}})$ est caractérisée par :

$$\overline{e^*}(\overline{\mathcal{L}og}_{A,\mathbb{R}}^{(1)}) = 0 \quad \text{et} \quad \overline{\delta}(\overline{\mathcal{L}og}_{A,\mathbb{R}}^{(1)}) = Can \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}.$$

On cherche maintenant à obtenir une généralisation de la 1-forme ν (cf partie 5.2.2) pour des familles de variétés abéliennes. On note E le fibré vectoriel au dessus de B^∞ dont le faisceau des sections est $\overline{\mathcal{H}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{O}_{B^\infty}$. On dispose d'une trivialisation (cf prop 4.5.2) :

$$TA^\infty = (\pi^\infty)^*TB^\infty \oplus (\pi^\infty)^*E.$$

La projection sur la partie verticale définit une forme différentielle ν sur A^∞ à valeurs dans $(\pi^\infty)^*E$.

Lemme 5.4.6 *La forme ν possède les deux propriétés suivantes.*

- i) *La 1-forme différentielle ν est fermée.*
- ii) *Soit $[\nu]$ la classe de ν dans $R^1\overline{\pi}_*(\overline{\pi}^*\overline{\mathcal{H}})$. On a l'identité $(1 \mapsto [\nu]) = \text{Can} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$.*

Preuve :

- i) L'assertion est de nature locale. Il suffit donc (cf prop 4.2.6) de prouver l'identité pour la famille de B^∞ -tores triviale $B^\infty \times (\mathbb{S}^1)^{2d}$. On effectue alors un calcul en coordonnées pour conclure.
- ii) Il suffit de vérifier que les morphismes $(1 \mapsto [\nu])$ et $\text{Can} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ coïncident sur la fibre en b , ce qui revient à prouver le résultat pour la variété abélienne A_b , ce qu'on a déjà effectué. \square

On peut maintenant expliciter le fibré à connexion candidat pour représenter le système local $\mathcal{L}og_{A,\mathbb{R}}^{(1)}$. On considère le fibré vectoriel $E' := \mathcal{O}_{A^\infty} \oplus \pi^\infty E$ muni de la connexion ∇^1 :

$$\begin{aligned} \nabla^1 : \quad \mathcal{O}_{A^\infty} \oplus \pi^\infty E &\longrightarrow \Omega_{A^\infty}^1 \oplus \Omega_{A^\infty}^1 \otimes \pi^\infty E. \\ (f, g \otimes h) &\longmapsto (df, dg \otimes h + f\nu) \end{aligned}$$

La connexion ∇^1 est plate (ν est fermée). Le faisceau $\mathbb{E} := \text{Ker}(\nabla^1)$ est donc un système local. On a une suite exacte de fibrés vectoriels munis de connexions :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & (\pi^\infty E, \nabla_{GM}) & \rightarrow & (\mathcal{O}_{A^\infty} \oplus \pi^\infty E, \nabla^1) & \rightarrow & (\mathcal{O}_{A^\infty}, d) \rightarrow 0, \\ & & g \otimes h & \mapsto & (0, g \otimes h) & & \\ & & & & (f, g \otimes h) & \mapsto & f \end{array}$$

où ∇_{GM} désigne la connexion de Gauss-Manin. Celle-ci correspond à une suite exacte de systèmes locaux $0 \rightarrow \overline{\pi}^*\overline{\mathcal{H}} \rightarrow \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow 0$ dont la classe dans $\text{Ext}_{\mathbb{R}A\text{-mod}}^1(\mathbb{R}, \overline{\pi}^*\overline{\mathcal{H}})$ est notée $[\mathbb{E}]$.

Proposition 5.4.7 *On a les identités suivantes :*

$$\overline{e}^*([\mathbb{E}]) = 0 \quad \text{et} \quad \overline{\delta}([\mathbb{E}]) = \text{Can} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R},$$

i.e. $\mathbb{E} = \overline{\mathcal{L}og}_{A,\mathbb{R}}^{(1)}$.

Preuve : On utilise la résolution de \mathbb{E} construite à partir de (E, ∇^1) pour expliciter $\bar{\delta}$:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \bar{\pi}^* \bar{\mathcal{H}} & \longrightarrow & \mathbb{E} & \longrightarrow & \mathbb{R} & & \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow i & & \\
 (\pi^\infty)^* E & \longrightarrow & \mathcal{O}_{A^\infty} \oplus (\pi^*)^\infty E & \xrightarrow{p} & \mathcal{O}_{A^\infty} & \longrightarrow & 0 \\
 \downarrow & & \downarrow \nabla^1 & & \downarrow & & \\
 0 \longrightarrow \Omega_{A^\infty}^1 \otimes (\pi^\infty)^* E & \xrightarrow{j} & \Omega_{A^\infty}^1 \oplus (\Omega_{A^\infty}^1 \otimes (\pi^\infty)^* E) & \longrightarrow & \Omega_{A^\infty}^1 & & \\
 \downarrow d^1 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 \Omega_{A^\infty}^2 \otimes (\pi^\infty)^* E & \longrightarrow & \Omega_{A^\infty}^2 \oplus (\Omega_{A^\infty}^2 \otimes (\pi^\infty)^* E) & \longrightarrow & \Omega_{A^\infty}^2 & &
 \end{array}$$

Alors $j^{-1} \nabla^1 p^{-1} i (1)$ est dans $\text{Ker}(d^1)$ et sa classe dans $H_{DR}^1(A^\infty) \otimes H_1(\bar{A}, \mathbb{R})$ coïncide avec $\bar{\delta}([\mathbb{E}])$. Or $j^{-1} \nabla^1 p^{-1} i (1) = \nu$ et $[\nu] = \text{Can} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ par le lemme 5.4.6. \square

Tout comme dans le cas d'une variété abélienne, le fibré à connexion (E', ∇^1) permet de décrire le pro-système local $\overline{\mathcal{L}og}_{A, \mathbb{R}}$, extension de \mathbb{Q} à \mathbb{R} du pro-système local sous-jacent à $\mathcal{L}og_A$.

La connexion ∇^1 sur E' induit une connexion ∇^n sur $\text{Sym}^n E'$. On définit $[\nu]_n : \text{Sym}^n E \rightarrow \text{Sym}^{n+1} E \otimes \Omega_{A^\infty}^1$, $n \geq 0$ à partir de ν comme dans le cas d'un variété abélienne (cf après la notation 5.2.7). On introduit alors le pro-fibré à connexion

$$(\mathcal{G}, \nabla) := \left(\prod_{n \geq 0} \text{Sym}^n E, \prod_{n \geq 0} (\nabla_{GM}^n + [\nu]_n) \right),$$

où ∇_{GM}^n la connexion de Gauss-Manin sur $\text{Sym}^n(E)$. Pour tout $n \geq 0$, définit

$$(\mathcal{G}^n, \nabla^n) := ((\mathcal{G}, \nabla) / W_n)$$

où $W_{n-1} = \prod_{n \geq n+1} \text{Sym}^n E$.

On a $(\mathcal{G}, \nabla) = \varprojlim_{n \geq 0} \mathcal{G}^n$, les morphismes de transition étant les projections.

Proposition 5.4.8 *Il existe des isomorphismes de fibrés à connexions $(\varphi^n : \mathcal{G}^n \rightarrow \text{Sym}^n \mathcal{G}^1)_{n \geq 0}$ qui induisent un isomorphisme de pro-systèmes locaux :*

$$\varphi : \mathcal{G} = \varprojlim_{n \geq 0} \mathcal{G}^n \rightarrow \varprojlim_{n \geq 0} \text{Sym}^n \mathcal{G}^1 = \overline{\mathcal{L}og}_{A, \mathbb{R}}.$$

Preuve : On construit les morphisme φ^n , $n \in \mathbb{N}$, comme on l'a fait dans la preuve de la proposition 5.2.8. \square

5.4.3 Principe de scindage

5.4.3.1 Section unité

De la proposition 5.4.8, on déduit que $\overline{e^* \mathcal{L}og_{A, \mathbb{R}}}$ est isomorphe à $\prod_{k \geq 0} \text{Sym}^k \overline{\mathcal{H}}$, généralisant ce qu'on a vu pour une variété abélienne. Là encore, ce résultat est en fait vrai au niveau des variations (principe de scindage) pour le corps de base \mathbb{Q} .

Proposition 5.4.9 *Il existe des isomorphismes de variations de structures de Hodge $(\theta_n : \text{Sym}^n \mathbb{Q}[\pi_1]/\mathfrak{a}_b^2 \rightarrow \bigoplus_{0 \leq k \leq n} \text{Sym}^k(\mathfrak{a}_b/\mathfrak{a}_b^2))_{n \geq 0}$ qui induisent un isomorphisme de pro-variations de structures de Hodge sur B :*

$$e^* \mathcal{L}og_A = \lim_{n \geq 0} \text{Sym}^n \mathbb{Q}[\pi_1(\overline{A}_b, a)]/\mathfrak{a}_b^2 \rightarrow \lim_{n \geq 0} \left(\bigoplus_{0 \leq k \leq n} \text{Sym}^k(\mathfrak{a}_b/\mathfrak{a}_b^2) \right) = \prod_{k \geq 0} \text{Sym}^k(\mathfrak{a}_b/\mathfrak{a}_b^2).$$

Preuve : Les morphismes $(\varphi_e^n)_{n \geq 0}$ (où $(\varphi^n)_{n \geq 0}$ est la famille de morphismes dont la construction est esquissée dans la preuve de la proposition 5.4.8) respectent la structure rationnelle et les filtrations. \square

Remarque : Cet isomorphisme est indépendant du choix de $b \in B$.

5.4.3.2 Section de torsion

Soit $x : B \rightarrow A$ une section de N -torsion. Soit $[N] : A \rightarrow A$ l'isogénie donnée par la multiplication par N . On applique $[N]^*$ à la suite exacte

$$0 \rightarrow \pi^* \mathfrak{a}_b/\mathfrak{a}_b^2 \rightarrow \mathcal{L}og_A^1 \rightarrow \mathbb{Q}(0)_A^V \rightarrow 0$$

pour obtenir une suite exacte

$$0 \rightarrow \pi^* \mathfrak{a}_b/\mathfrak{a}_b^2 = [N]^* \pi^* \mathfrak{a}_b/\mathfrak{a}_b^2 \rightarrow [N]^* \mathcal{L}og_A^1 \rightarrow \mathbb{Q}(0)_A^V \rightarrow 0$$

dont la classe dans $\text{Ext}_{VSHM_{\mathbb{Q}}(A)}^1(\mathbb{Q}(0)_A^V, \pi^* \mathfrak{a}_b/\mathfrak{a}_b^2)$ est notée $[[N]^* \mathcal{L}og_A^1]$. De $e^*[\mathcal{L}og_A^1] = 0$ et $\delta[\mathcal{L}og_A^1] = \text{Can}$, on déduit $e^*[[N]^* \mathcal{L}og_A^1] = 0$ et $\delta[[N]^* \mathcal{L}og_A^1] = \text{Can}$. Par conséquent, $[[N]^* \mathcal{L}og_A^1] = [\mathcal{L}og_A^1]$ et donc $[N]^* \mathcal{L}og_A^1 \simeq \mathcal{L}og_A^1$.

Proposition 5.4.10 [Wi1-III-Prop 6.1] – $x^* \mathcal{L}og_A \simeq \prod_{k \geq 0} \text{Sym}^k(\mathfrak{a}_b/\mathfrak{a}_b^2)$.

Preuve : De l'étude qui précède, on déduit que $[N]^* \mathcal{L}og_A \simeq \mathcal{L}og_A$. De plus :

$$\begin{aligned} x^* \mathcal{L}og_A &\simeq x^* [N]^* \mathcal{L}og_A \\ &= e^* \mathcal{L}og_A \\ &\simeq \prod_{k \geq 0} \text{Sym}^k \mathfrak{a}_b/\mathfrak{a}_b^2 \quad (\text{cf prop 5.4.9}). \end{aligned}$$

\square

5.4.4 Images directes supérieures du logarithme

Soit $A \xrightleftharpoons[\pi]{e} B$ un schéma abélien complexe de dimension relative pure d tel que B est lisse.

Notations 5.4.11 –

$$\begin{aligned} j : U &\rightarrow A \quad \text{l'immersion ouverte complémentaire de } e : B \rightarrow A, \\ \pi_U &:= \pi \circ j, \\ \mathcal{H} &:= (R^1\pi_*\mathbb{Q})^\vee, \\ \mathcal{L}og &:= \mathcal{L}og_A. \end{aligned}$$

Théorème 5.4.12 –

i) On a $H^k\pi_*\mathcal{L}og(d)^\iota = 0$ si $k \neq d$. La composition $\mathcal{L}og(d) \xrightarrow{\text{can}} \mathcal{L}og^1(d) \xrightarrow{\varepsilon \otimes Id_{\mathbb{Q}(d)_A^V}} \mathbb{Q}(d)_A^V$ induit le morphisme α :

$$\alpha : H^d\pi_*\mathcal{L}og(d)^\iota \rightarrow H^d\pi_*(\mathbb{Q}(d)_A^V)^\iota = (\mathbb{Q}(0)_B^V)^\iota.$$

Ce dernier est un isomorphisme.

ii) Des deux identités :

$$\cdot e^*\mathcal{L}og = \prod_{k \geq 0} \text{Sym}^k \mathcal{H} \quad (\text{cf prop 5.4.9}),$$

$$\cdot e^!\mathcal{L}og(d)^\iota = (e^*\mathcal{L}og)^\iota[-d] \quad (\text{cf partie 2.3.2}),$$

on déduit que $H^k e^!\mathcal{L}og(d)^\iota = 0$, si $k \neq d$ et $H^d e^!\mathcal{L}og(d)^\iota = \prod_{k \geq 0} (\text{Sym}^k \mathcal{H})^\iota$.

Cette propriété, i) et la suite exacte longue de cohomologie associée au triangle distingué :

$$e^!\mathcal{L}og(d)^\iota \rightarrow \pi_*\mathcal{L}og(d)^\iota \rightarrow \pi_{U*}\mathcal{L}og(d)_U^\iota \rightarrow e^!\mathcal{L}og(d)^\iota[1]$$

donnent $H^k\pi_{U*}\mathcal{L}og(d)_U^\iota = 0$ si $k \neq d-1$ et une suite exacte courte (S') :

$$(S') \quad 0 \rightarrow H^{d-1}\pi_{U*}\mathcal{L}og(d)_U^\iota \rightarrow H^d(e^!\mathcal{L}og(d)^\iota) \rightarrow H^d\pi_*\mathcal{L}og(d)^\iota \rightarrow 0.$$

On vérifie que (S') s'insère dans le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H^{d-1}\pi_{U*}\mathcal{L}og(d)_U^\iota & \xrightarrow{\beta'} & \prod_{k \geq 0} (\text{Sym}^k \mathcal{H})^\iota & \xrightarrow{\text{pr}_{k=0}} & (\mathbb{Q}(0)_B^V)^\iota \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \parallel & & \uparrow \alpha \\ 0 & \longrightarrow & H^{d-1}\pi_{U*}\mathcal{L}og(d)_U^\iota & \longrightarrow & H^d(e^!\mathcal{L}og(d)^\iota) & \longrightarrow & H^d\pi_*\mathcal{L}og(d)^\iota \longrightarrow 0 \end{array}$$

La factorisation canonique de β' à travers $\prod_{k > 0} (\text{Sym}^k \mathcal{H})^\iota \hookrightarrow \prod_{k \geq 0} (\text{Sym}^k \mathcal{H})^\iota$ donne un morphisme β :

$$\beta : H^{d-1}\pi_{U*}\mathcal{L}og(d)_U^\iota \rightarrow \prod_{k > 0} (\text{Sym}^k \mathcal{H})^\iota$$

qui est un isomorphisme.

Preuve : Pour i), on renvoie à [Wi1-I-Cor 4.4], [Wi1-III-Thm 1.3] ou [Ki2-Prop 1.1.3]. \square

Chapitre 6

Le polylogarithme d'un schéma abélien

On présente l'objet que l'on étudie dans cette thèse, le polylogarithme d'un schéma abélien. Dans l'optique de rendre explicite celui-ci, on énonce un résultat (cf Thm 6.3.4) qui ramène le problème de la description à la résolution d'une équation différentielle qui est analogue à celle que vérifient les courants de Green.

Notations 6.0.13 – Pour X une variété algébrique complexe lisse de morphisme structural $a : X \rightarrow \text{Spec}(\mathbb{C})$, $f : Y \rightarrow Z$ un morphisme de variétés algébriques lisses et $\mathbb{K} \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, on note :

\overline{X}	l'espace topologique $X(\mathbb{C})$ muni de la topologie transcendante,
\overline{f}	l'application continue de \overline{Y} vers \overline{Z} déduite de f ,
X^∞	la variété différentielle C^∞ -réelle associée à X ,
f^∞	le morphisme lisse de Y^∞ vers Z^∞ induit par f ,
$\mathbb{K}_X\text{-mod}$	la catégorie des faisceaux de \mathbb{K} -vectoriels sur \overline{X} ,
$SHM_{\mathbb{Q}}$	la catégorie des \mathbb{Q} -structures de Hodge mixtes polarisables,
$VSHM_{\mathbb{Q}}(X)$	la catégorie des \mathbb{Q} -variations de structures de Hodge mixtes admissibles,
$\mathbb{Q}(n)_X^V$	$:= a^*\mathbb{Q}(n) \in \text{Ob}(SHM_{\mathbb{Q}}(X))$, $n \in \mathbb{Z}$,
$\mathbb{V}(n)$	$:= \mathbb{V} \otimes \mathbb{Q}(n)_X^V$, $n \in \mathbb{Z}$,
$\overline{\mathbb{V}}$	le système local sous-jacent à $\mathbb{V} \in \text{Ob}(VSHM_{\mathbb{Q}}(X))$,
$MHM_{\mathbb{Q}}(X)$	la catégorie des \mathbb{Q} -modules de Hodge mixtes sur X ,
\mathbb{V}^ι	$:= \iota(\mathbb{V})$ module de Hodge associé à $\mathbb{V} \in \text{Ob}(VSHM_{\mathbb{Q}}(X))$ (cf partie 2.3.1 pour la définition de ι),
$\mathbb{Q}(n)_X^M$	$:= a^*\mathbb{Q}(n)^\iota \in \text{Ob}(D^bMHM_{\mathbb{Q}}(X))$, $n \in \mathbb{Z}$.

6.1 Définition

Théorème 6.1.1 [Wi1-III-Chap 4-Thm 1.5 b), Ki2-Cor 1.1.4] – On a un isomorphisme canonique

$$\sigma : Ext_{MHM_{\mathbb{Q}}(U)}^{d-1}(\mathcal{H}^\iota, \pi_{U*}\mathcal{L}og_U(d)^\iota) \xrightarrow{\sim} Hom_{MHM_{\mathbb{Q}}(B)}(\mathcal{H}^\iota, H^{d-1}\pi_{U*}\mathcal{L}og_U(d)^\iota)$$

induit par une suite spectrale de Leray.

Preuve : On considère la suite spectrale de Leray pour la composition $RHom_{MHM_{\mathbb{Q}}(B)}(\mathcal{H}, \cdot) \circ \pi_{U*}$ appliquée à $\mathcal{L}og(d)_{\mathcal{U}}^{\iota}$. D'après le théorème 5.4.12, les termes E_2^i de celle-ci qui sont non nuls se trouvent sur la $(d-1)$ -ième ligne, d'où un isomorphisme induit par les morphismes de cette suite spectrale :

$$\sigma : Ext_{MHM_{\mathbb{Q}}(U)}^{d-1}(\mathcal{H}^{\iota}, \pi_{U*}\mathcal{L}og_U(d)^{\iota}) \xrightarrow{\sim} Hom_{MHM_{\mathbb{Q}}(B)}(\mathcal{H}^{\iota}, H^{d-1}\pi_{U*}\mathcal{L}og_U(d)^{\iota}).$$

□

Définition 6.1.2 – Soit i l'isomorphisme défini par le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} Ext_{MHM_{\mathbb{Q}}(U)}^{2d-1}((\pi_U^*\mathcal{H})^{\iota}, \mathcal{L}og_U(d)^{\iota}) & \xlongequal{\quad} & H^{2d-1}RHom(\pi_U^*\mathcal{H}^{\iota}[d], \mathcal{L}og_U(d)^{\iota}) \\ \downarrow i & & \parallel \\ & & H^{d-1}RHom(\pi_U^*\mathcal{H}^{\iota}, \mathcal{L}og_U(d)^{\iota}) \\ & & \parallel \\ & & H^{d-1}RHom(\mathcal{H}^{\iota}, \pi_{U*}\mathcal{L}og_U(d)^{\iota}) \\ & & \downarrow \sigma \\ & & Hom_{MHM_{\mathbb{Q}}(B)}(\mathcal{H}^{\iota}, H^{d-1}\pi_{U*}\mathcal{L}og_U(d)^{\iota}) \\ & & \downarrow \beta_* \\ Hom_{VSHM_{\mathbb{Q}}(B)}(\mathcal{H}, \prod_{k>0} Sym^k \mathcal{H}) & \xlongequal{\quad} & Hom_{MHM_{\mathbb{Q}}(B)}(\mathcal{H}^{\iota}, \prod_{k>0} (Sym^k \mathcal{H})^{\iota}) \end{array}$$

où β est l'isomorphisme du théorème 5.4.12.

Remarque 6.1.3 – Pour tout $k > 0$, $Sym^k \mathcal{H}$ est une variation de \mathbb{Q} -structures de Hodge pures de poids $-k$. On a donc :

$$Hom_{VSHM_{\mathbb{Q}}(B)}(\mathcal{H}, \prod_{k>0} Sym^k \mathcal{H}) = Hom_{VSHM_{\mathbb{Q}}(B)}(\mathcal{H}, \mathcal{H}).$$

On peut à présent introduire la définition du polylogarithme d'un schéma abélien qui est due à Beilinson et Levin pour $d = 1$. En dimension supérieure, elle se déduit directement du travail de Wildeshaus exposé dans le livre [Wi1].

Définition 6.1.4 [Wi1-III-Chap 4, Ki2-Def 1.1.5] – Le polylogarithme du schéma abélien $\pi : A \rightarrow B$, noté $\mathcal{P}ol_A$, est l'unique élément de $Ext_{MHM_{\mathbb{Q}}(U)}^{2d-1}((\pi_U^*\mathcal{H})^{\iota}, \mathcal{L}og_U(d)^{\iota})$ qui s'envoie sur $(Id_{\mathcal{H}}, 0, \dots, 0, \dots)$ sous l'isomorphisme i .

6.2 D'une explicitation de l'extension polylogarithme

6.2.1 Cas des courbes elliptiques

On suppose ici que $d = 1$. D'après la proposition 2.3.19, on a :

$$\text{Ext}_{MHM_{\mathbb{Q}}(U)}^1((\pi_U^* \mathcal{H})^\iota, \mathcal{L}og_U(1)^\iota) = \text{Ext}_{VSHM_{\mathbb{Q}}(U)}^1(\pi_U^* \mathcal{H}, \mathcal{L}og_U(1)).$$

Grâce à la définition des *Ext*-groupes à la Yoneda, on peut voir le polylogarithme comme la classe d'une suite exacte courte dans $VSHM_{\mathbb{Q}}(U)$ dont le terme central est (abusivement) noté $\mathcal{P}ol_A$:

$$\mathcal{P}ol_A = [0 \rightarrow \mathcal{L}og_U(1) \rightarrow \mathcal{P}ol_A \rightarrow \pi_U^* \mathcal{H} \rightarrow 0].$$

Beilinson et Levin ont déterminé une matrice des périodes de $\mathcal{P}ol_A$ qui décrit complètement cette variation (cf [BL-4.8], [W-V-Thm 3.14] et sa preuve).

6.2.2 Cas des schémas abéliens de dimensions supérieures

À présent, on fait l'hypothèse $d \geq 2$. Par analogie avec le cas elliptique, on pose la question suivante :

Question 6.2.1 – Existe-t-il $\mathbb{V}_1, \dots, \mathbb{V}_{2d-1} \in VSHM_{\mathbb{Q}}(U)$ et une suite exacte longue :

$$(S) \quad 0 \rightarrow \mathcal{L}og_U(d) \rightarrow \mathbb{V}_1 \rightarrow \dots \rightarrow \mathbb{V}_{2d-1} \rightarrow \pi_U^* \mathcal{H} \rightarrow 0$$

dont la classe dans la description des *Ext*-groupes à la Yoneda est $\mathcal{P}ol_A$?

Proposition 6.2.2 [Wi1-III-Thm 2.3 b)] – La question 6.2.1 admet une réponse négative.

Preuve : On suppose que la réponse est positive.

i) Puisque $\text{codim}(A - U) = d \geq 2$, le résultat de [Ka-Prop 1.11.1] s'applique :

$$\forall i, \quad 1 \leq i \leq 2d - 1, \quad \exists \widetilde{\mathbb{V}}_i \in VSHM_{\mathbb{Q}}(A) / \widetilde{\mathbb{V}}_i|_U = \mathbb{V}_i.$$

ii) Soient $\mathbb{V}, \mathbb{W} \in VSHM_{\mathbb{Q}}(A)$. On considère le triangle distingué de $D^bMHM_{\mathbb{Q}}(A)$:

$$\begin{array}{ccc} e_* e^! \mathbb{W}^\iota & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{W}^\iota \\ & \swarrow [1] & \searrow \\ & j_* j^* \mathbb{W}^\iota & \end{array}$$

auquel on applique le foncteur triangulé $RHom_{MHM_{\mathbb{Q}}(A)}(\mathbb{V}^\iota, \cdot)$ et on regarde un morceau de la suite exacte longue de cohomologie associée à ce nouveau triangle distingué :

$$\begin{array}{ccc} H^0 RHom_{MHM_{\mathbb{Q}}(B)}(e^* \mathbb{V}^\iota, e^! \mathbb{W}^\iota) & \longrightarrow & Hom_{MHM_{\mathbb{Q}}(B)}(\mathbb{V}^\iota, \mathbb{W}^\iota) \\ & & \downarrow \\ & & Hom_{MHM_{\mathbb{Q}}(U)}(\mathbb{V}_U^\iota, \mathbb{W}_U^\iota) \longrightarrow H^1 RHom_{MHM_{\mathbb{Q}}(B)}(e^* \mathbb{V}^\iota, e^! \mathbb{W}^\iota) \end{array}$$

D'après la proposition 2.3.16, $e^! \mathbb{W}^\iota = e^* \mathbb{W}^\iota(-d)[-2d]$. De plus, d'après la proposition 2.3.12 :

$$e^* \mathbb{V}^\iota[-d], e^* \mathbb{W}^\iota[-d] \in \text{Ob}(\text{MHM}_{\mathbb{Q}}(B)).$$

Donc les termes aux extrémités de la suite exacte précédente sont nuls et on a un isomorphisme :

$$\text{Hom}_{VSHM_{\mathbb{Q}}(A)}(\mathbb{V}, \mathbb{W}) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{VSHM_{\mathbb{Q}}(U)}(\mathbb{V}|_U, \mathbb{W}|_U).$$

iii) De i) et ii), on déduit qu'il existe une chaîne de morphismes de $VSHM_{\mathbb{Q}}(A)$,

$$(\widetilde{S}) \quad 0 \rightarrow \mathcal{L}og(d) \rightarrow \widetilde{\mathbb{V}}_1 \rightarrow \dots \rightarrow \widetilde{\mathbb{V}}_{2d-1} \rightarrow (\pi^*)^s \mathcal{H} \rightarrow 0$$

dont la restriction à U donne la suite exacte (S) . L'exactitude de (\widetilde{S}) restreinte à U implique l'exactitude de (S) . Ainsi, il existe $\widetilde{\mathcal{P}ol}_A \in \text{Ext}_{MHM_{\mathbb{Q}}(A)}^{2d-1}((\pi^* \mathcal{H})^\iota, \mathcal{L}og(d)^\iota)$ dont la restriction à U est $\mathcal{P}ol_A$.

iv) On considère la suite spectrale de Leray pour la composition $R\text{Hom}_{MHM_{\mathbb{Q}}(B)}(\mathcal{H}^\iota, \cdot) \circ \pi_*$ appliquée à $\mathcal{L}og(d)^\iota$. Du théorème 5.4.12, on déduit que les termes E_2^i de celle-ci qui sont non nuls se trouvent sur la d -ième ligne, d'où l'isomorphisme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \text{Ext}_{MHM_{\mathbb{Q}}(X)}^{d-1}(\mathcal{H}^\iota, \pi_* \mathcal{L}og(d)^\iota) & \xrightarrow{\sim} & \text{Ext}_{MHM_{\mathbb{Q}}(B)}^{-1}(\mathcal{H}^\iota, H^d \pi_* \mathcal{L}og(d)^\iota) \\ \parallel & & \parallel \\ \text{Ext}_{MHM_{\mathbb{Q}}(X)}^{2d-1}((\pi^* \mathcal{H})^\iota, \mathcal{L}og(d)^\iota) & \xlongequal{\quad} & 0 \end{array}$$

On obtient la nullité de $\widetilde{\mathcal{P}ol}_A$ et par suite celle de $\mathcal{P}ol_A$, ce qui est incompatible avec sa définition. \square

Pour décrire $\mathcal{P}ol_A$ à la Yoneda, il faut donc faire intervenir un module de Hodge qui n'est pas une variation de structures de Hodge. La question d'une telle description est ouverte.

6.2.3 L'extension topologique sous-jacente au polylogarithme

On note $\overline{\mathcal{P}ol}_A$ l'extension au niveau topologique sous-jacente à $\mathcal{P}ol_A$:

$$\overline{\mathcal{P}ol}_A \in \text{Ext}_{\mathbb{Q}_U\text{-mod}}^{2d-1}(\overline{\pi_U^* \mathcal{H}}, \overline{\mathcal{L}og(d)}_{\overline{U}}).$$

Le foncteur For n'induit pas en général de morphisme injectif au niveau des Ext -groupes. Par exemple, l'oubli des filtrations induit un morphisme :

$$\text{Ext}_{SHM_{\mathbb{Q}}}^1(\mathbb{Q}(0), \mathbb{Q}(1)) \rightarrow \text{Ext}_{\mathbb{Q}\text{-vect}}^1(\overline{\mathbb{Q}(0)}, \overline{\mathbb{Q}(1)}) = 0.$$

Or, en utilisant [HW2-Thm 1], on peut montrer que

$$\text{Ext}_{SHM_{\mathbb{Q}}}^1(\mathbb{Q}(0), \mathbb{Q}(1)) = \mathbb{C}/2\pi i \mathbb{Q}.$$

Toutefois, dans le cas qui nous intéresse, on a le résultat suivant dénommé "principe de rigidité pour le polylogarithme" :

Théorème 6.2.3 [Wi1-III-Thm 2.1] – $\mathcal{P}ol_A$ est uniquement déterminé par $\overline{\mathcal{P}ol}_A$. En effet, le morphisme induit par F or :

$$Ext_{MHM_{\mathbb{Q}}(U)}^{2d-1}((\pi_U^* \mathcal{H})^\vee, \mathcal{L}og_U(d)^\vee) \rightarrow Ext_{\mathbb{Q}_U\text{-mod}}^{2d-1}(\overline{\pi_U^* \mathcal{H}}, \overline{\mathcal{L}og_U(d)})$$

est injectif.

Preuve : On va construire un morphisme \bar{i} qui rend commutatif le diagramme (D) suivant :

$$\begin{array}{ccc} Ext_{MHM_{\mathbb{Q}}(U)}^{2d-1}((\pi_U^* \mathcal{H})^\vee, \mathcal{L}og_U(d)^\vee) & \longrightarrow & Ext_{\mathbb{Q}_U\text{-mod}}^{2d-1}(\overline{\pi_U^* \mathcal{H}}, \overline{\mathcal{L}og_U(d)}) \\ \simeq \downarrow i & & \downarrow \bar{i} \\ Hom_{VSHM_{\mathbb{Q}}(B)}(\mathcal{H}, \prod_{k>0} Sym^k \mathcal{H}) & \hookrightarrow & Hom_{\mathbb{Q}_B\text{-mod}}(\overline{\mathcal{H}}, \prod_{k>0} Sym^k \overline{\mathcal{H}}) \end{array}$$

où les flèches horizontales sont induites par le foncteur oubli, ce qui est suffisant pour prouver le résultat.

- i) On considère la suite spectrale de Leray pour la composition $RHom_{\mathbb{Q}_B\text{-mod}}(\overline{\mathcal{H}}, \cdot) \circ R\overline{\pi_U^*}$ appliquée à $\overline{\mathcal{L}og_U(d)}$. Alors, les termes E_2^i qui sont non nuls sont situés sur la $(2d-1)$ -ème ligne. On peut, par exemple, voir ce résultat comme une conséquence du théorème 5.4.12. Alors, les morphismes de cette suite spectrale induisent un isomorphisme :

$$\bar{\sigma} : H^{2d-1} RHom_{\mathbb{Q}_B\text{-mod}}(\overline{\mathcal{H}}, R\overline{\pi_U^*} \overline{\mathcal{L}og_U(d)}) \rightarrow Hom_{\mathbb{Q}_B\text{-mod}}(\overline{\mathcal{H}}, R^{2d-1} \overline{\pi_U^*} \overline{\mathcal{L}og_U(d)}).$$

- ii) Le triangle exact

$$\bar{e}^! \overline{\mathcal{L}og(d)} \rightarrow R\overline{\pi_U^*} \overline{\mathcal{L}og(d)} \rightarrow R\overline{\pi_U^*} \overline{\mathcal{L}og_U(d)} \rightarrow \bar{e}^! \overline{\mathcal{L}og(d)}[1]$$

et la pureté

$$\bar{e}^! \overline{\mathcal{L}og(d)} = e^* \overline{\mathcal{L}og}[-2d] = \prod_{k \geq 0} Sym^k \overline{\mathcal{H}}[-2d]$$

donnent un morphisme

$$R^{2d-1} \overline{\pi_U^*} \overline{\mathcal{L}og_U(d)} \rightarrow \prod_{k \geq 0} Sym^k \overline{\mathcal{H}}$$

qu'on compose avec la projection

$$\prod_{k \geq 0} Sym^k \overline{\mathcal{H}} \rightarrow \prod_{k > 0} Sym^k \overline{\mathcal{H}}$$

pour obtenir un morphisme

$$\bar{\beta} : R^{2d-1} \overline{\pi_U^*} \overline{\mathcal{L}og_U(d)} \rightarrow \prod_{k > 0} Sym^k \overline{\mathcal{H}}.$$

Le théorème 5.4.12 permet de prouver que $\bar{\beta}$ est un isomorphisme.

iii) Soit alors \bar{i} le morphisme défini par le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 Ext_{\mathbb{Q}_B\text{-mod}}^{2d-1}(\bar{\pi}_U^* \bar{\mathcal{H}}, \overline{\mathcal{L}og_U(d)}) & \xlongequal{\quad} & H^{2d-1} RHom_{\mathbb{Q}_B\text{-mod}}(\bar{\pi}_U^* \bar{\mathcal{H}}, \overline{\mathcal{L}og_U(d)}) \\
 & \searrow \bar{i} & \parallel \\
 & & H^{2d-1} RHom_{\mathbb{Q}_B\text{-mod}}(\bar{\mathcal{H}}, R\bar{\pi}_{U*} \overline{\mathcal{L}og_U(d)}) \\
 & & \downarrow \bar{\sigma} \\
 & & Hom_{\mathbb{Q}_B\text{-mod}}(\bar{\mathcal{H}}, R^{2d-1} \bar{\pi}_{U*} \overline{\mathcal{L}og_U(d)}) \\
 & & \downarrow \bar{\beta}_* \\
 & & Hom_{\mathbb{Q}_B\text{-mod}}(\bar{\mathcal{H}}, \prod_{k>0} Sym^k \bar{\mathcal{H}}).
 \end{array}$$

La commutativité du diagramme (D) repose sur la compatibilité des formalismes des 6 foncteurs sur $D^b MHM_{\mathbb{Q}}(\bar{U})$ et sur $D^b \mathbb{Q}_U\text{-mod}$ via le foncteur For . □

Remarque 6.2.4 – Le morphisme \bar{i} étant injectif,

$\overline{\mathcal{P}ol}_A \in Ext_{\mathbb{Q}_U\text{-mod}}^{2d-1}(\bar{\pi}_U^* \bar{\mathcal{H}}, \overline{\mathcal{L}og_U(d)})$ est caractérisé par $\bar{i}(\overline{\mathcal{P}ol}_A) = (Id_{\bar{\mathcal{H}}}, 0, \dots, 0, \dots)$.

6.3 Description topologique du polylogarithme

On va décrire explicitement l'extension $\overline{\mathcal{P}ol}_A$. Pour ce faire, des outils d'analyse du type séries de Fourier vont intervenir. C'est pourquoi on passe aux coefficients complexes.

6.3.1 L'extension topologique polylogarithmique complexifiée

Soit $(\overline{\mathcal{P}ol}_A)_{\mathbb{C}}$ défini par :

$$\begin{array}{ccc}
 Ext_{\mathbb{Q}_U\text{-mod}}^{2d-1}(\bar{\pi}_U^* \bar{\mathcal{H}}, \overline{\mathcal{L}og_U(d)}) & \xrightarrow{\otimes \mathbb{C}} & Ext_{\mathbb{C}_U\text{-mod}}^{2d-1}(\bar{\pi}_U^* \bar{\mathcal{H}}_{\mathbb{C}}, \overline{\mathcal{L}og_U(d)}_{\mathbb{C}}) \\
 \overline{\mathcal{P}ol}_A & \mapsto & (\overline{\mathcal{P}ol}_A)_{\mathbb{C}}.
 \end{array}$$

La construction du morphisme \bar{i} admet un analogue complexe évident noté $\bar{i}_{\mathbb{C}}$:

$$\bar{i}_{\mathbb{C}} : Ext_{\mathbb{C}_U\text{-mod}}^{2d-1}(\bar{\pi}_U^* \bar{\mathcal{H}}_{\mathbb{C}}, \overline{\mathcal{L}og_U(d)}_{\mathbb{C}}) \xrightarrow{\sim} Hom_{\mathbb{C}_U\text{-mod}}(\bar{\mathcal{H}}_{\mathbb{C}}, \prod_{k>0} Sym^k \bar{\mathcal{H}}_{\mathbb{C}})$$

qui s'insère dans le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 Ext_{\mathbb{Q}_U\text{-mod}}^{2d-1}(\bar{\pi}_U^* \bar{\mathcal{H}}, \overline{\mathcal{L}og_U(d)}) & \xrightarrow{\otimes \mathbb{C}} & Ext_{\mathbb{C}_U\text{-mod}}^{2d-1}(\bar{\pi}_U^* \bar{\mathcal{H}}_{\mathbb{C}}, \overline{\mathcal{L}og_U(d)}_{\mathbb{C}}) \\
 \downarrow \bar{i} & & \downarrow \bar{i}_{\mathbb{C}} \\
 Hom_{\mathbb{Q}_U\text{-mod}}(\bar{\mathcal{H}}, \prod_{k>0} Sym^k \bar{\mathcal{H}}) & \xrightarrow{\otimes \mathbb{C}} & Hom_{\mathbb{C}_U\text{-mod}}(\bar{\mathcal{H}}_{\mathbb{C}}, \prod_{k>0} Sym^k \bar{\mathcal{H}}_{\mathbb{C}}).
 \end{array}$$

Remarque 6.3.1 – Par injectivité de $\bar{i}_{\mathbb{C}}$, $(\overline{\mathcal{P}ol}_A)_{\mathbb{C}}$ est caractérisé par

$$\bar{i}_{\mathbb{C}}((\overline{\mathcal{P}ol}_A)_{\mathbb{C}}) = (Id_{\overline{\mathcal{H}}_{\mathbb{C}}}, 0, \dots, 0, \dots).$$

6.3.2 Réduction à la résolution d'une équation différentielle

Soit (\mathcal{G}, ∇) le fibré vectoriel à connexion intégrable de la proposition 5.4.8. Alors, on a $Ker(\nabla) = \overline{\mathcal{L}og}_A \widehat{\otimes}_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$. Soit

$$\mathcal{G}(d)_{\mathbb{C}} := \mathcal{G} \widehat{\otimes}_{\mathbb{R}} (\mathbb{R}(d) \otimes_{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}).$$

La connexion ∇ induit une connexion sur $\mathcal{G}(d)_{\mathbb{C}}$ qu'on note également ∇ . Alors le complexe de de Rham des courants de $(\mathcal{G}(d)_{\mathbb{C}}, \nabla)$

$$(\mathcal{A}_{A^{\infty}}(\mathcal{G}(d)_{\mathbb{C}}, \nabla'))$$

est une résolution de $(\overline{\mathcal{L}og}_A(d))_{\mathbb{C}}$.

Notation 6.3.2 – Soit $f : \overline{\pi}_U^* \overline{\mathcal{H}}_{\mathbb{C}} \rightarrow \mathcal{A}_{A^{\infty}}^{2d-1}(\mathcal{G}(d)_{\mathbb{C}})|_{\overline{U}}$ tel que $\nabla^{2d-1} \circ f = 0$. Le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \overline{\pi}_U^* \overline{\mathcal{H}}_{\mathbb{C}} & \longrightarrow & 0 & & \\ & & \downarrow f & & & & \\ 0 & \longrightarrow & (\mathcal{G}(d)_{\mathbb{C}})|_{\overline{U}} & \xrightarrow{\nabla'} \dots \longrightarrow & \mathcal{A}_{A^{\infty}}^{2d-1}(\mathcal{G}(d)_{\mathbb{C}})|_{\overline{U}} & \xrightarrow{\nabla'^{2d-1}} & \mathcal{A}_{A^{\infty}}^{2d}(\mathcal{G}(d)_{\mathbb{C}})|_{\overline{U}} \longrightarrow \dots \\ & & \uparrow \text{qis} & & & & \\ 0 & \longrightarrow & ((\overline{\mathcal{L}og}_A(d))_{\mathbb{C}})|_{\overline{U}} & \longrightarrow & 0 & & \end{array}$$

définit un élément de $Hom_{D^b \mathcal{F}_{\mathbb{C}}(\overline{U})}(\overline{\pi}_U^* \overline{\mathcal{H}}_{\mathbb{C}}, ((\overline{\mathcal{L}og}_A(d))_{\mathbb{C}})|_{\overline{U}}[2d-1])$ noté $[f]$.

Remarques 6.3.3 –

i) On considère B^{∞} comme une sous-variété fermée de A^{∞} via l'immersion

$$e^{\infty} : B^{\infty} \hookrightarrow A^{\infty}.$$

ii) Puisque A^{∞} et B^{∞} sont des variétés différentielles sous-jacentes à des variétés analytiques complexes, elles sont canoniquement orientées.

Théorème 6.3.4 – Soit un morphisme

$$f : \overline{\pi}_A^* \overline{\mathcal{H}}_{\mathbb{C}} \rightarrow \mathcal{A}_{A^{\infty}}^{2d-1}(\mathcal{G}(d)_{\mathbb{C}})$$

qui vérifie la propriété (P) suivante :

$$(P) \quad \left[\begin{array}{l} \text{Pour tout } b \in B^{\infty}, \text{ il existe } V \text{ ouvert connexe de } B^{\infty} \text{ tel que :} \\ \text{a) } b \in V, \\ \text{b) } (\overline{\mathcal{H}}_{\mathbb{C}})|_V \text{ est constant,} \\ \text{c) } \forall h \in \Gamma(V, (\overline{\mathcal{H}}_{\mathbb{C}})|_V), \quad \nabla'^{2d-1}(f(h)) = (\delta_{B^{\infty}})_{|\overline{\pi}^{-1}(V)} \otimes (2\pi i)^d h. \end{array} \right]$$

Alors,

- i) $(\nabla^{2d-1} \circ f)|_{\bar{U}} = 0$,
 ii) $[f|_{\bar{U}}] = (\overline{\mathcal{P}ol_A})_{\mathbb{C}}$.

Preuve : L'assertion i) se déduit immédiatement de la propriété (P) (la restriction de δ_{B^∞} à U^∞ est nulle). Pour montrer ii), on va vérifier que $[f|_{\bar{U}}]$ vérifie le critère de la remarque 6.3.1. On décompose le morphisme $\bar{i}_{\mathbb{C}}$ en introduisant le morphisme $\bar{\sigma}'_{\mathbb{C}}$ défini en disant que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 Ext_{\mathbb{C}_U\text{-mod}}^{2d-1}(\pi_U^* \bar{\mathcal{H}}_{\mathbb{C}}, (\overline{\mathcal{L}og_U(d)})_{\mathbb{C}}) & \xlongequal{\quad} & H^{2d-1} RHom_{\mathbb{C}_U\text{-mod}}(\pi_U^* \bar{\mathcal{H}}_{\mathbb{C}}, (\overline{\mathcal{L}og_U(d)})_{\mathbb{C}}) \\
 \searrow \bar{\sigma}'_{\mathbb{C}} & & \parallel \\
 & & H^{2d-1} RHom_{\mathbb{C}_B\text{-mod}}(\bar{\mathcal{H}}_{\mathbb{C}}, R\pi_{\bar{U}*}(\overline{\mathcal{L}og_U(d)})_{\mathbb{C}}) \\
 \searrow \bar{i}_{\mathbb{C}} & & \downarrow \bar{s}s_{\mathbb{C}} \\
 & & Hom_{\mathbb{C}_B\text{-mod}}(\bar{\mathcal{H}}_{\mathbb{C}}, R^{2d-1} \pi_{\bar{U}*}(\overline{\mathcal{L}og_U(d)})_{\mathbb{C}}) \\
 & & \downarrow (\bar{\beta}_{\mathbb{C}})^* \\
 & & Hom_{\mathbb{C}_B\text{-mod}}(\bar{\mathcal{H}}_{\mathbb{C}}, \prod_{k>0} Sym^k \bar{\mathcal{H}}_{\mathbb{C}})
 \end{array}$$

- i) Soient $b \in B^\infty$, V un voisinage ouvert connexe de b tel que $(\bar{\mathcal{H}}_{\mathbb{C}})|_V$ est constant et $h \in \Gamma(V, \bar{\mathcal{H}}_{\mathbb{C}})$. D'après les définitions de $[f|_{\bar{U}}]$ et de $\bar{\sigma}$, on a :

$$\bar{\sigma}'_{\mathbb{C}}([f|_{\bar{U}}])(h) = f(h) \in \Gamma(\pi_U^{-1}(V), \mathcal{A}_{A^\infty}^{2d-1}(\mathcal{G}(d)_{\mathbb{C}})).$$

La propriété (P) étant vérifiée, on a :

$$\bar{\sigma}'_{\mathbb{C}}([f|_{\bar{U}}])(h) = f(h) \in Z^{2d-1}(\Gamma(\pi_U^{-1}(V), (\mathcal{A}_{A^\infty}(\mathcal{G}(d)_{\mathbb{C}}, \nabla')))).$$

- ii) Il reste à calculer l'image de la classe de $f(h)$ sous $\bar{\beta}_{\mathbb{C}}$. On fixe $l \geq 2$ et on pousse $f(h)$ au moyen de la projection :

$$\mathcal{G}(d)_{\mathbb{C}} \rightarrow (\mathcal{G}/W_{-l})(d)_{\mathbb{C}}.$$

On passe ainsi d'un pro-fibré à connexion à un fibré à connexion. L'image de $f(h)$ par cette transformation est notée :

$$f(h)_l \in Z^{2d-1}(\Gamma(\pi_U^{-1}(V), (\mathcal{A}_{A^\infty}((\mathcal{G}(d)/W_{-l})(d)_{\mathbb{C}}, \nabla')))).$$

On calcule le morphisme de bord d'une suite exacte longue de cohomologie locale, aussi peut-on localiser au voisinage de $\bar{e}(b)$.

. Première localisation

Le fibré vectoriel à connexion $((\mathcal{G}/W_{-l})(d)_{\mathbb{C}}, \nabla)$ étant plat il existe W un voisinage ouvert de $e(b)$ dans $\pi_U^{-1}(V)$ tel que celui-ci soit isomorphe au fibré vectoriel trivial muni de la connexion de Gauss-Manin.

. Deuxième localisation

D'après¹ la proposition 4.2.6, il existe V' , voisinage ouvert de b dans $\bar{\pi}(W)$ et φ , isomorphisme lisse de V' -tores entre $A_{V'}^\infty$ et le V' -tore trivial associé à A_b^∞ qui est induit par l'exponentielle :

$$\begin{array}{ccc} A_{V'}^\infty & \xrightarrow{\varphi} & V' \times A_b^\infty \\ \bar{\pi}_{A_{V'}^\infty} \downarrow & \swarrow pr_{V'} & \\ V' & & \end{array}$$

Quitte à restreindre V' à un voisinage ouvert connexe de b et W , on peut supposer que W est de la forme $V' \times W'$, avec W' voisinage ouvert connexe de $\bar{e}(b)$ dans A_b^∞ .

On se ramène ainsi à calculer le morphisme bord $\bar{\beta}_\mathbb{C}$ dans la situation décrite ci-dessous :

- . $\bar{\pi} = pr_1 : V' \times W' \rightarrow V'$,
- . $\bar{e} : V' \rightarrow V' \times W'$, $b' \mapsto (b', e(b))$,
- . $\mathcal{G}(d)_\mathbb{C}/W_{-l}$ est le fibré trivial au dessus de $V' \times W'_{\bar{e}(b)}$ associé au \mathbb{C} -vectoriel $\left(\bigoplus_{0 \leq k \leq l-1} Sym^k \Gamma(V', \bar{\mathcal{H}}_\mathbb{C}) \right)$ muni de la connexion de Gauss-Manin.

La variété différentielle $V' \times W'$ est munie d'une première orientation qui vient de φ et d'une seconde donnée par la structure complexe sous-jacente. Comme l'application linéaire tangente de φ en $(b, \bar{e}(b))$ est l'identité, ces deux orientations coïncident.

D'après le iii) de la propriété (P), $f(h)_l$ satisfait une relation différentielle. Dans le contexte ci-dessus, celle-ci s'écrit :

$$\forall h \in \Gamma(V, \bar{\mathcal{H}}_\mathbb{C}), \quad \nabla_{GM}^{2d-1}(f(h_{|V'})_l) = (2\pi i)^d \delta_{V' \times \{\bar{e}(b)\}} \otimes h_{|V'}.$$

Après ces localisations, on se trouve dans la situation considérée dans la partie 3.6.2. Le corollaire 3.6.5 donne :

$$\bar{\beta}_\mathbb{C}(f(h_{|V'})_l) = h_{|V'}.$$

On a donc montré que pour $h \in \Gamma(\bar{\mathcal{H}}_\mathbb{C}, V)$,

$$(*) \quad \bar{i}_\mathbb{C}([f_{|\bar{\mathcal{T}}'}]) (h_{V'}) = h_{V'}.$$

Le morphisme $\bar{i}_\mathbb{C}$ est la limite projective des morphismes

$$pr_l \circ \bar{i}_\mathbb{C}([f_{|\bar{\mathcal{T}}'}]) : \bar{\mathcal{H}}_\mathbb{C} \rightarrow \bigoplus_{0 \leq k \leq l-1} Sym^k \bar{\mathcal{H}}_\mathbb{C}$$

où pr_l est la projection canonique

$$\prod_{k \geq 0} Sym^k \bar{\mathcal{H}}_\mathbb{C} \rightarrow \bigoplus_{0 \leq k \leq l-1} Sym^k \bar{\mathcal{H}}_\mathbb{C}.$$

¹Ici la trivialisation de la loi de groupe importe peu, celle du neutre, en revanche, compte.

Le résultat (*) s'interprète comme suit : au niveau des fibres en b , les morphismes

$$pr_l \circ \bar{i}_{\mathbb{C}}([f|_{\bar{U}}]) \text{ et } pr_l \circ (Id_{\bar{\mathcal{H}}_{\mathbb{C}}}, 0, \dots, 0, \dots)$$

coïncident. Comme ce sont des morphismes de systèmes locaux, cela implique que ce sont les mêmes morphismes de faisceaux. Le résultat étant établi pour tout $l \geq 2$, on a montré :

$$\bar{i}_{\mathbb{C}}([f|_{\bar{U}}]) = (Id_{\bar{\mathcal{H}}_{\mathbb{C}}}, 0, \dots, 0, \dots).$$

□

Chapitre 7

Le morphisme de Levin

On va construire explicitement un morphisme qui vérifie la condition (P) du théorème 6.3.4 dans le cas où le schéma abélien est muni d'une polarisation principale. Cette construction est due à Levin (cf [Le]). On en déduit une expression "explicite" de l'extension topologique complexifiée sous-jacente au polylogarithme.

Remarque 7.0.5 – *La donnée de la polarisation est nécessaire. On la suppose principale car ceci allège les calculs, mais la méthode s'applique à un schéma abélien doté d'une polarisation quelconque.*

Notations 7.0.6 – *Pour X une variété algébrique complexe lisse, $f : Y \rightarrow Z$ un morphisme de variétés algébriques lisses, \mathcal{X} une variété analytique complexe, $g : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Z}$ un morphisme de variétés analytiques complexes, on note :*

\overline{X}	<i>l'espace topologique $X(\mathbb{C})$ muni de la topologie transcendante,</i>
\overline{f}	<i>l'application continue de \overline{Y} vers \overline{Z} déduite de f,</i>
X^∞	<i>la variété différentielle C^∞-réelle associée à X,</i>
\mathcal{X}^∞	<i>la variété différentielle C^∞-réelle associée à \mathcal{X},</i>
f^∞	<i>le morphisme lisse de Y^∞ vers Z^∞ induit par f,</i>
g^∞	<i>le morphisme lisse de \mathcal{Y}^∞ vers \mathcal{Z}^∞ induit par g,</i>
$VSH_{\mathbb{Z}}^n(\mathcal{X})$	<i>la catégorie des \mathbb{Z}-variations de structures de Hodge pures de poids n sur \mathcal{X}, pour $n \in \mathbb{Z}$,</i>
$\mathbb{Z}(n)_{\mathcal{X}}$	<i>la variation constante sur \mathcal{X} associée à $\mathbb{Z}(n)$, $n \in \mathbb{Z}$.</i>

7.1 Famille analytique de tores polarisée

Définition 7.1.1 – *On appelle famille analytique de tores polarisée de dimension relative d ($d \in \mathbb{N}^*$) la donnée d'un triplet $(p : A \rightarrow B, e, \varpi)$ où :*

- i) $p : A \rightarrow B$ un morphisme propre et lisse entre variétés analytiques complexes dont les fibres sont des tores complexes d -dimensionnels,*
- ii) $e : B \rightarrow A$ une section de p ,*
- iii) $\varpi \in H^{1,1}(A)$ dont la restriction à chacune des fibres est une polarisation.*

Si les polarisations sur les fibres sont principales, on parle de famille analytique de tores principalement polarisée.

Soit $(p : A \rightarrow B, e, \varpi)$ une famille analytique de tores polarisée. Soit $b \in B$. Il existe une unique structure de groupe de Lie analytique complexe sur A_b dont le neutre est $e(b)$. On note

$$m_b : A_b \times A_b \rightarrow A_b \quad \text{et} \quad i_b : A_b \rightarrow A_b$$

la multiplication et l'inverse sur A_b . Les propriétés de p entraînent que :

$$p^\infty : A^\infty \rightarrow B^\infty$$

est une submersion propre et donc une fibration par le théorème de Ereshmann ([V-Thm 9.3]). La variété différentielle $A^\infty \times_{B^\infty} A^\infty$ est donc bien définie.

Lemme 7.1.2 – Les applications m et i suivantes :

$$m := \bigcup_{b \in B} m_b : A^\infty \times_{B^\infty} A^\infty \rightarrow A^\infty \quad \text{et} \quad i := \bigcup_{b \in B} i_b : A^\infty \rightarrow A^\infty$$

sont lisses et donc $(p^\infty : A^\infty \rightarrow B^\infty, e^\infty, m, i)$ est un B^∞ -tore.

Preuve : Il s'agit d'un énoncé local. On vérifie la lissité de m et de i en utilisant la famille modulaire du théorème [BiLa-Chap 7, Thm 3.1] et en remarquant que localement on a toujours un "marking" (cf pages 209 et 210 de [BiLa] pour la définition de "marking"). \square

Remarque 7.1.3 – Si $\pi : A \rightarrow B$ est un schéma abélien complexe principalement polarisé, alors $\pi^{an} : A^{an} \rightarrow B^{an}$ est une famille de tores analytique principalement polarisée.

7.2 Les formes différentielles de Levin

Soit $(p : A \rightarrow B, e, \varpi)$ une famille analytique de tores principalement polarisée. On note $\Gamma \in VSH_{\mathbb{Z}}^{-1}(B)$ définie par :

$$\Gamma := (R^1 p_* \mathbb{Z})^\vee.$$

La polarisation ϖ définit un morphisme de $VSH_{\mathbb{Z}}^{-2}(B)$:

$$\langle *, * \rangle : \Gamma \wedge \Gamma \rightarrow \mathbb{Z}(1)_B.$$

Soit $b \in B$. Alors, $\langle *, * \rangle_b : \Gamma_b \wedge \Gamma_b \rightarrow \mathbb{Z}(1)$, le morphisme au niveau du germe en b , est la composée :

$$\Gamma_b \wedge \Gamma_b = H_1(X_b, \mathbb{Z}) \wedge H_1(X_b, \mathbb{Z}) \rightarrow H_2(X_b, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\varpi_b} \mathbb{Z}(1).$$

Notations 7.2.1 –

$$\begin{array}{ll} \mathcal{H} & := \bar{\Gamma} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}, \\ \langle *, * \rangle_{\mathbb{R}} : \mathcal{H} \wedge \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}(1) & \text{le morphisme obtenu en étendant } \langle *, * \rangle \text{ par linéarité,} \\ \langle *, * \rangle_{\mathbb{C}} : \mathcal{H}_{\mathbb{C}} \wedge \mathcal{H}_{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C} & \text{le morphisme obtenu en étendant } \langle *, * \rangle_{\mathbb{R}} \text{ par linéarité,} \\ E & \text{le fibré vectoriel réel plat au dessus de } B^\infty \text{ associé au} \\ & \text{système local } \mathcal{H}, \\ E_{\mathbb{C}} := E^{-1,0} \oplus E^{0,-1} & \text{la décomposition de Hodge de } E_{\mathbb{C}}, \\ h^{-1,0} & \text{la projection sur } E^{-1,0} \text{ de } h \text{ section locale de } E_{\mathbb{C}}, \\ h^{0,-1} & \text{la projection sur } E^{0,-1} \text{ de } h \text{ section locale de } E_{\mathbb{C}}. \end{array}$$

D'après le lemme 7.1.2 et la proposition 4.5.2, on a une décomposition naturelle du fibré tangent de A^∞ :

$$(*) \quad TA^\infty = (p^\infty)^*TB^\infty \oplus (p^\infty)^*E$$

Soit $\nu : TA^\infty \rightarrow (p^\infty)^*E$ la projection correspondante. Le morphisme $\langle *, * \rangle_{\mathbb{R}}$ induit un morphisme de fibrés vectoriels noté de même :

$$\langle *, * \rangle_{\mathbb{R}} : (p^\infty)^*E \wedge (p^\infty)^*E \rightarrow A^\infty \times \mathbb{R}(1).$$

Proposition 7.2.2 [Le-Prop 2.2.4] – Soit ω la 2-forme différentielle sur A^∞ définie par :

$$\omega := \frac{1}{2} \langle \nu, \nu \rangle_{\mathbb{R}}.$$

Alors, $(p : A \rightarrow B, e, \omega)$ est une famille analytique de tores principalement polarisée.

Au moyen de ω , on construit vol , une forme différentielle de type (d, d) sur A dont la restriction à chacune des fibres est une forme volume.

Définition 7.2.3 – Soit $vol := (-1)^d(d!)^{-1}\omega^d$.

On rappelle qu'en 4.3, on a associé un B^∞ -tore à $\bar{\Gamma}$:

$$q : \mathcal{H}/\bar{\Gamma} \rightarrow B^\infty$$

en recollant une famille de fibrations :

$$\{V_b \times \mathcal{H}_b/\bar{\Gamma}_b\}_{b \in B^\infty}$$

où pour tout $b \in B^\infty$, V_b est un voisinage connexe et simplement connexe de b .

On fixe $b \in B$ et $\gamma \in \Gamma_b - \{0\}$. On leur associe une fonction lisse f_γ :

$$f_\gamma : V_b \times \mathcal{H}_b/\bar{\Gamma}_b \rightarrow \mathbb{C}.$$

$$(v, [h]) \mapsto \exp(\langle \gamma, h \rangle_{\mathbb{R}, b})$$

Via f_γ , l'isomorphisme canonique ι_b de la remarque 4.3.2 :

$$\iota_b : V_b \times \mathcal{H}_b/\bar{\Gamma}_b \rightarrow q^{-1}(V_b)$$

et la trivialisatation de la proposition 4.4.1 :

$$\overline{\exp}_{A^\infty} : \mathcal{H}/\bar{\Gamma} \rightarrow A^\infty$$

on définit une fonction lisse χ_γ .

Définition 7.2.4 – $\chi_\gamma := f_\gamma \circ \iota_b^{-1} \circ \overline{\exp}_{A^\infty|V_b}^{-1} : A_{V_b}^\infty \rightarrow \mathbb{C}$.

On complexifie la décomposition (*) pour obtenir :

$$(TA_{V_b}^\infty)_{\mathbb{C}} = (p_{V_b}^\infty)^*(TB^\infty)_{\mathbb{C}} \oplus (p_{V_b}^\infty)^*E_{\mathbb{C}}.$$

On identifie ainsi $\gamma^{-1,0}$ et $\gamma^{0,-1}$ à des champs de vecteurs verticaux sur $A_{V_b}^\infty$.

Notations 7.2.5 – Si ξ est un champ de vecteurs, on note :

L_ξ sa dérivée de Lie,
 i_ξ l'opérateur produit intérieur.

Proposition 7.2.6 [Le-Prop 3.2.2] – Pour tout $k > 2d$,

$$(L_{\gamma^{-1,0}})^k vol = 0.$$

Notation 7.2.7 –

$$\rho(\gamma) := \langle \gamma^{-1,0}, \gamma^{0,-1} \rangle.$$

Le résultat d'annulation précédent permet de donner un sens à la définition suivante.

Définition 7.2.8 – Pour tout $a \geq 1$, on définit $g'_{a,\gamma} \in \Gamma(A_{V_b}^\infty, \Omega_{A_{V_b}^\infty}^{2d-1}(Sym^{a-1} E_{\mathbb{C}}))$

$$g'_{a,\gamma} := i_{\gamma^{0,-1}} \left(\chi_\gamma \times \frac{1}{(\rho(\gamma) - L_{\gamma^{-1,0}})^a} vol \times (\gamma^{0,-1})^{a-1} \right).$$

Ces formes vont nous servir à construire le morphisme cherché. Pour cela, on va considérer des séries de telles formes. On les étudie pour préciser cette sommation.

7.3 Un exemple : la famille modulaire de Siegel

On calcule les formes différentielles de Levin (localement) pour la famille modulaire de Siegel. Cet exemple est traité par Levin [Le-2.3]. Les notations sont celles de la section 7.2.

7.3.1 La famille analytique complexe de tores

Soit \mathfrak{H}_d l'espace de Siegel :

$$\mathfrak{H}_d := \{ \Omega \in GL_d(\mathbb{C}) / \Omega \text{ est symétrique, de partie imaginaire définie positive} \}.$$

Si $\Omega \in \mathfrak{H}_d$, on note T_Ω l'inverse de $\Omega - \bar{\Omega}$. Soit $\Lambda := \mathbb{Z}^d \oplus \mathbb{Z}^d$.

Convention 7.3.1 –

- i) On écrit les éléments de Λ comme des paires (m, n) où $m = (m_1, \dots, m_d)$ et $n = (n_1, \dots, n_d)$ sont des "vecteurs" ligne à d -composantes.
- ii) On écrit les vecteurs de \mathbb{C}^d en ligne et $(\xi_1, \dots, \xi_d) \in \mathbb{C}^d$ est noté ξ .

Le groupe Λ agit sur $\mathbb{C}^d \times \mathcal{H}_d$ par :

$$\begin{aligned} (\Lambda) \times \mathbb{C}^d \times \mathfrak{H}_d &\rightarrow \mathbb{C}^d \times \mathfrak{H}_d \\ ((m, n), (\xi, \Omega)) &\mapsto (\xi + m + n\Omega, \Omega) \end{aligned}$$

Cette action respecte la projection $\mathbb{C}^d \times \mathfrak{H}_d \rightarrow \mathfrak{H}_d$. On passe au quotient et on obtient un morphisme analytique propre et lisse :

$$A := (\mathbb{C}^d \times \mathcal{H}_d) / \Lambda \rightarrow \mathfrak{H}_d =: B.$$

Pour tout $\Omega \in \mathfrak{H}_d$, on note φ_Ω le morphisme :

$$\begin{aligned} \varphi_\Omega : \quad \Lambda &\rightarrow \mathbb{C}^d \\ (m, n) &\mapsto m + n\Omega \end{aligned}$$

Si on note Λ_Ω l'image de Λ sous φ_Ω , la fibre de p en Ω est $A_\Omega = \mathbb{C}^d / \Lambda_\Omega$. Soit

$$\Lambda_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^d \oplus \mathbb{R}^d \text{ et } \Lambda_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^d \oplus \mathbb{C}^d.$$

Convention 7.3.2 – Les éléments de $\Lambda_{\mathbb{R}}$ (resp. $\Lambda_{\mathbb{C}}$) seront notés sous forme de paires (r, s) où r et s sont des vecteurs réels (resp. complexes) lignes d -dimensionnels.

Au moyen de l'isomorphisme de B^∞ -tores :

$$\begin{aligned} \varphi : \quad \Lambda_{\mathbb{R}} / \Lambda \times B^\infty &\rightarrow A^\infty \\ ([r, s], \Omega) &\mapsto [(r + s\Omega, \Omega)] \end{aligned}$$

d'inverse

$$\begin{aligned} \varphi^{-1} : \quad A^\infty &\rightarrow \Lambda_{\mathbb{R}} / \Lambda \times B^\infty \\ [(\xi, \Omega)] &\mapsto ([(\bar{\xi}T_\Omega\Omega - \xi T_\Omega\bar{\Omega}, (\xi - \bar{\xi})T_\Omega], \Omega) \end{aligned}$$

on identifie le système local $\bar{\Gamma}$ au faisceau constant associé à Λ sur B .

Remarque 7.3.3 – Soit $\Omega \in \mathfrak{H}_d$. On étend le morphisme φ_Ω par linéarité et on obtient un isomorphisme de \mathbb{R} -vectoriels

$$\varphi_{\Omega, \mathbb{R}} : \Lambda_{\mathbb{R}} \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}^d$$

qui, en passant au quotient, donne un isomorphisme de groupes de Lie :

$$\overline{\varphi_{\Omega, \mathbb{R}}} : \Lambda_{\mathbb{R}} / \Lambda \xrightarrow{\sim} A_\Omega.$$

Alors la trivialisaton du B^∞ -tore A^∞ induite par l'exponentielle est donnée par :

$$\overline{\exp_{A^\infty}} = \varphi \circ \overline{\varphi_{\Omega, \mathbb{R}}}^{-1}.$$

7.3.2 La polarisation principale

Soit la forme symplectique $\langle *, * \rangle$ définie par :

$$\begin{aligned} \langle *, * \rangle : \quad \Lambda \wedge \Lambda &\rightarrow \mathbb{Z}(1) \\ (m, n) \wedge (m', n') &\mapsto 2\pi i(n(m')^t - m(n')^t) \end{aligned}$$

Soit $\Omega \in \mathfrak{H}_d$. On transporte $\langle *, * \rangle$ au moyen de φ_Ω pour obtenir une forme symplectique :

$$\langle *, * \rangle_\Omega : \Lambda_\Omega \wedge \Lambda_\Omega \rightarrow \mathbb{Z}(1)$$

qui définit une polarisation principale sur A_Ω . Le morphisme

$$\langle *, * \rangle : \Gamma \wedge \Gamma \rightarrow \mathbb{Z}(1)$$

induit par l'identification $\Lambda = \bar{\Gamma}$ est donc un morphisme dans $VSH_{\mathbb{Z}}^{-1}(B)$.

7.3.3 Décomposition de Hodge

Remarque 7.3.4 – Dans la décomposition de Hodge

$$E_{\mathbb{C}} := E_{\Omega}^{-1,0} \oplus E_{\Omega}^{0,-1}$$

$E_{\Omega}^{-1,0}$ (resp. $E_{\Omega}^{0,-1}$) est le dual de $H^{1,0}(A_{\Omega})$ (resp. $H^{0,1}(A_{\Omega})$) et

$$E_{\Omega}^{-1,0} \perp H^{0,1}(A_{\Omega}), \quad E_{\Omega}^{0,-1} \perp H^{1,0}(A_{\Omega}).$$

Remarque 7.3.5 – Soit $\Omega \in \mathfrak{H}_d$. Le morphisme φ induit un isomorphisme

$$\varphi_{\Omega, \mathbb{C}} : \Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} \xrightarrow{\sim} \Lambda_{\Omega} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} = E_{\mathbb{C}, \Omega}.$$

On note $u_{\Omega} = (u_{\Omega,1}, \dots, u_{\Omega,d})^t$ (resp. $\overline{u_{\Omega}} = (\overline{u_{\Omega,1}}, \dots, \overline{u_{\Omega,d}})^t$) la base de $E_{\Omega}^{-1,0}$ (resp. $E_{\Omega}^{0,-1}$) duale de la base $d\xi = (d\xi_1, \dots, d\xi_d)$ (resp. $d\overline{\xi} = (d\overline{\xi}_1, \dots, d\overline{\xi}_d)$) base des formes holomorphes (resp. antiholomorphes) de A_{Ω} . On vérifie que :

$$\varphi_{\Omega, \mathbb{C}}^{-1}(u_{\Omega}) := \begin{pmatrix} \varphi_{\Omega, \mathbb{C}}^{-1}(u_{\Omega,1}) \\ \dots \\ \varphi_{\Omega, \mathbb{C}}^{-1}(u_{\Omega,d}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -T_{\Omega} \overline{\Omega} & T_{\Omega} \end{pmatrix},$$

$$\varphi_{\Omega, \mathbb{C}}^{-1}(\overline{u_{\Omega}}) := \begin{pmatrix} \varphi_{\Omega, \mathbb{C}}^{-1}(\overline{u_{\Omega,1}}) \\ \dots \\ \varphi_{\Omega, \mathbb{C}}^{-1}(\overline{u_{\Omega,d}}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{\Omega} \Omega & -T_{\Omega} \end{pmatrix}.$$

Soit $\gamma = (r, s) \in \Lambda_{\mathbb{C}}$. On identifie γ à la section de $(p^{\infty})^* E_{\mathbb{C}}$:

$$[(\xi, \Omega)] \mapsto (r + s\Omega) \in \Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} \underset{\varphi_{\Omega, \mathbb{C}}}{=} E_{\mathbb{C}, \Omega}.$$

Alors, la décomposition de Hodge de h est $\gamma = \gamma^{-1,0} + \gamma^{0,-1}$ où :

$$\begin{aligned} \gamma^{-1,0} : \quad A^{\infty} &\rightarrow (p^{\infty})^* E^{-1,0} \\ [(\xi, \Omega)] &\mapsto ([(\xi, \Omega)], ru_{\Omega} + s\Omega u_{\Omega}) \\ \gamma^{0,-1} : \quad A^{\infty} &\rightarrow (p^{\infty})^* E^{0,-1} \\ [(\xi, \Omega)] &\mapsto ([(\xi, \Omega)], r\overline{u_{\Omega}} + s\Omega \overline{u_{\Omega}}). \end{aligned}$$

7.3.4 Champs de vecteurs et forme de polarisation

Soit $h = (r, s) \in \Lambda_{\mathbb{C}}$. Les fibrés tangents de $\Lambda_{\mathbb{R}}/\Lambda \times B^{\infty}$ et de A^{∞} se décomposent comme suit :

$$\begin{aligned} T(\Lambda_{\mathbb{R}}/\Lambda \times B^{\infty}) &= (pr_{\mathcal{H}_d}^{\infty})^* TB^{\infty} \oplus (\Lambda_{\mathbb{R}}/\Lambda \times \mathfrak{H}_d^{\infty}) \times \Lambda_{\mathbb{R}}, \\ TA^{\infty} &\simeq (pr_{\mathcal{H}_d}^{\infty})^* T(\mathcal{H}_d)^{\infty} \oplus (pr_{\mathcal{H}_d}^{\infty})^* E. \end{aligned}$$

De plus, l'isomorphisme $T\varphi$ respecte les décompositions horizontales et verticales.

Ainsi, h définit un champ de vecteurs vertical sur $\Lambda_{\mathbb{R}}/\Lambda \times \mathfrak{H}_d^{\infty}$:

$$h : ([r', s'], \Omega) \mapsto (([r', s'], \Omega), (r, s))$$

qui s'écrit aussi avec les notations classiques :

$$(r, s)(\partial_r, \partial_s)^t$$

où $\partial_r := (\partial_{r_1}, \dots, \partial_{r_d})$, $\partial_s := (\partial_{s_1}, \dots, \partial_{s_d})$. On le transporte à l'aide de $T\varphi$ pour obtenir un champ de vecteurs vertical sur A^∞ :

$$[\xi, \Omega] \mapsto \begin{pmatrix} r + s\Omega \\ r + s\bar{\Omega} \end{pmatrix}$$

où le membre de droite est exprimé dans la \mathbb{R} -base canonique $(\xi, \bar{\xi})$ de $\mathbb{C}^d = \Gamma_\Omega \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$. On l'écrit traditionnellement sous la forme :

$$((r + s\Omega), (r + s\bar{\Omega}))(\partial_\xi, \partial_{\bar{\xi}})^t$$

où $\partial_\xi = (\partial_{\xi_1}, \dots, \partial_{\xi_d})$, $\partial_{\bar{\xi}} = (\partial_{\bar{\xi}_1}, \dots, \partial_{\bar{\xi}_d})$.

La 1-forme ν sur $\Lambda_{\mathbb{R}}/\Lambda \times B^\infty$ à valeurs dans $\Lambda_{\mathbb{R}}$ qui correspond à la projection d'un champ de vecteurs sur la partie verticale s'écrit :

$$(dr, ds)$$

où $d_r = (dr_1, \dots, dr_d)$, $d_s = (ds_1, \dots, ds_d)$. La forme ν sur A^∞ n'est autre que le pullback de cette forme sous φ^{-1} :

$$\nu = (d\xi - (\xi - \bar{\xi})T_\Omega d\Omega)u + (d\bar{\xi} - (\xi - \bar{\xi})T_\Omega d\bar{\Omega})\bar{u}$$

où u et \bar{u} sont les d -uplets de sections de $(pr_{\mathcal{H}_d}^\infty)^* E_{\mathbb{C}}$:

$$u : [\xi, \Omega] \mapsto u_\Omega \quad \bar{u} : [\xi, \Omega] \mapsto \bar{u}_\Omega.$$

La matrice de Gram de l'accouplement $\langle *, * \rangle$ dans la base $(u_{\Omega,1}, \dots, u_{\Omega,d}, \bar{u}_{\Omega,1}, \dots, \bar{u}_{\Omega,d})$ est :

$$\langle (u_\Omega)^t, \bar{u}_\Omega \rangle = -2\pi i T_\Omega.$$

La forme de polarisation ω est donc :

$$\omega := -2\pi i \sum_{i=1}^g (d\xi - (\xi - \bar{\xi})T_\Omega d\Omega) \wedge T_\Omega (d\bar{\xi} - (\xi - \bar{\xi})T_\Omega d\bar{\Omega})^t.$$

7.3.5 Les formes différentielles de Levin

On fixe $\gamma = (m, n) \in \Lambda - \{0\}$, $a \in \mathbb{N}^*$. On a écrit en coordonnées les différents éléments qui entrent dans la définition des formes $g'_{a,\gamma}$ (cf Déf. 7.2.8), exceptés la fonction χ_γ et le nombre complexe $\rho(\gamma)$. On termine la description en donnant l'expression de la fonction χ_γ :

$$\begin{aligned} A^\infty &\rightarrow \mathbb{C} \\ [(\xi, \Omega)] &\mapsto \exp(\langle (m, n), \overline{\varphi_{\Omega, \mathbb{R}}^{-1}}(\xi) \rangle_{\Omega, \mathbb{R}}) \end{aligned}$$

et la valeur de $\rho(\gamma)$ qui est $2\pi i(m + n\Omega)T_\Omega(m + n\bar{\Omega})^t$.

Remarque 7.3.6 – Pour tout $\Omega \in \mathfrak{H}_d$, l'application :

$$\|\cdot\|_{\Omega} : \Lambda_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (r, s) \mapsto \sqrt{2\pi i(r + s\Omega)T_{\Omega}(r + s\bar{\Omega})^t}$$

est une norme.

On va à présent calculer la forme $g'_{a,\gamma}$, ou plutôt $\varphi^*g'_{a,\gamma}$ car la formule pour cette dernière est d'écriture plus simple. On rassemble les résultats obtenus et on donne leurs expressions après pullback.

- La décomposition de Hodge de γ s'écrit $\gamma = \gamma^{-1,0} + \gamma^{0,-1}$, où, dans $\Lambda_{\mathbb{C}}$:

$$\begin{aligned} \gamma^{-1,0} &= -(m + n\Omega)T_{\Omega}\bar{\Omega} & (m + n\Omega)T_{\Omega} \\ \gamma^{0,-1} &= (m + n\bar{\Omega})T_{\Omega}\Omega & -(m + n\bar{\Omega})T_{\Omega}. \end{aligned}$$

- Les images des champs de vecteurs $\gamma^{-1,0}$ et $\gamma^{0,-1}$ (notées de même) sous φ^{-1} sont :

$$\begin{aligned} \gamma^{-1,0} &= -(m + n\Omega)T_{\Omega}\bar{\Omega}(\partial_r)^t + ((m + n\Omega)T_{\Omega})(\partial_s)^t \\ \gamma^{0,-1} &= ((m + n\bar{\Omega})T_{\Omega}\Omega)(\partial_r)^t + -(m + n\bar{\Omega})T_{\Omega}(\partial_s)^t. \end{aligned}$$

- $\varphi^*\omega = \eta_1 \wedge \eta_2$ où $\eta_1 = (dr + ds\Omega)$ et $\eta_2 = T_{\Omega}(dr + ds\bar{\Omega})^t$.

$$\begin{aligned} \varphi^*\chi_{\gamma} : \Lambda_{\mathbb{R}}/\Lambda \times \mathfrak{H}_d &\rightarrow \mathbb{C} \\ ((r, s), \Omega) &\mapsto \exp(\langle (m, n), (r, s) \rangle). \end{aligned}$$

On passe au calcul de $\varphi^*g'_{a,\gamma}$.

- Calcul des dérivées de Lie successives :

$$\frac{1}{(\rho(\gamma) - L_{\gamma^{-1,0}})^a} (\varphi^*\omega)^d = \sum_{n=0}^{2d} \frac{(n+a-1)!}{n!\rho(\gamma)^{a+n}} L_{\gamma^{-1,0}}^n (\eta_1 \wedge \eta_2 \wedge \dots \wedge \eta_1 \wedge \eta_2).$$

Soit n , $0 \leq n \leq 2d$, on note \mathcal{L}_n l'ensemble

$$\{(L_1, \dots, L_{2d}) \in \{Id, L_{\gamma^{-1,0}}\}^{2d} / \text{Card}(\{i, 1 \leq i \leq 2d / L_i = L_{\gamma^{-1,0}}\}) = n\}.$$

Puisque $L_{\gamma^{-1,0}}^2 \eta_1 = L_{\gamma^{-1,0}}^2 \eta_2 = 0$, on a :

$$L_{\gamma^{-1,0}}^n (\eta_1 \wedge \eta_2)^d = \sum_{(L_1, \dots, L_{2d}) \in \mathcal{L}_n} L_1 \eta_1 \wedge L_2 \eta_2 \wedge \dots \wedge L_{2d-1} \eta_1 \wedge L_{2d} \eta_2.$$

De plus,

$$L_{\gamma^{-1,0}} \eta_1 = -(m + n\bar{\Omega})T_{\Omega}d\Omega \quad \text{et} \quad L_{\gamma^{-1,0}} \eta_2 = -T_{\Omega}^2((m + n\Omega)d\bar{\Omega})^t.$$

2. Effet du produit intérieur :

Soient n , $0 \leq n \leq 2d$ et $(L_1, \dots, L_{2d}) \in \mathcal{L}_n$:

$$\begin{aligned} i_{\gamma^0, -1} L_1 \eta_1 \wedge L_2 \eta_2 \wedge \dots \wedge L_{2d-1} \eta_1 \wedge L_{2d} \eta_2 &= (i_{\gamma^0, -1} L_1 \eta_1) \wedge L_2 \eta_2 \wedge \dots \wedge L_{2d-1} \eta_1 \wedge L_{2d} \eta_2 \\ &- (i_{\gamma^0, -1} L_2 \eta_2) L_1 \eta_1 \wedge L_3 \eta_1 \dots \wedge L_{2d-1} \eta_1 \wedge L_{2d} \eta_2 \\ &+ \dots \\ &- (i_{\gamma^0, -1} L_{2d} \eta_{2d}) L_1 \eta_1 \wedge L_2 \eta_2 \wedge \dots \wedge L_{2d-1} \eta_1. \end{aligned}$$

Les formules qui suivent finissent de décrire $\varphi^* g'_{a, \gamma}$:

$$i_{\gamma^0, -1} \eta_2 = (m + n \overline{\Omega}) T_\Omega \quad \text{et} \quad i_{\gamma^0, -1} \eta_1 = i_{\gamma^0, -1} L_{\gamma^{-1, 0}} \eta_1 = i_{\gamma^0, -1} L_{\gamma^{-1, 0}} \eta_2 = 0.$$

7.4 Convergence des séries de Levin

On reconsidère la famille

$$p_{V_b} : A_{V_b}^\infty \rightarrow V_b$$

introduite dans la partie 7.2 munie de sa trivialisaton de V_b^∞ -tores. La situation est la suivante :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}_b / \overline{\Gamma}_b \times V_b & \xrightarrow{\overline{\exp}_{A_{V_b}^\infty} |_{V_b} \circ t_b} & A_{V_b}^\infty \\ \downarrow p_{r_{V_b}} & \nearrow p_{V_b} & \\ V_b & & \end{array}$$

Pour tout $a \geq 1$, on va donner un sens précis à l'expression :

$$\sum_{\gamma \in \Gamma_b - \{0\}} g'_{a, \gamma}.$$

Compte tenu de la propriété universelle de la famille modulaire de Siegel (cf [BiLa-7. Thm 4.1]) et quitte à restreindre V_b à un voisinage ouvert de b , il existe un morphisme

$$f : V_b \rightarrow \mathfrak{H}_d$$

tel que la famille $p_{V_b} : A_{V_b}^\infty \rightarrow V_b$ est le pullback sous f de la famille analytique de tores principalement polarisée

$$(\mathbb{C}^d \times \mathfrak{H}_d) / \Lambda \rightarrow \mathfrak{H}_d$$

considérée dans la partie 7.3. La construction des formes $g'_{a, \gamma}$ étant fonctorielle sous un tel morphisme f , on peut utiliser les calculs effectués précédemment (cf partie 7.3) pour obtenir des informations sur l'expression de $g'_{a, \gamma}$.

Quitte à restreindre V_b à nouveau à un voisinage ouvert de b , on peut supposer que V_b est difféomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^{d'}$, d'où des coordonnées sur V_b :

$$(x_1, \dots, x_{d'}).$$

De plus, f induit un isomorphisme : $\mathcal{H}_b/\overline{\Gamma}_b \xrightarrow{\sim} \Lambda_{\mathbb{R}}/\Lambda$, au moyen duquel on identifie les deux tores. Ceci donne des coordonnées sur $\mathcal{H}_b/\overline{\Gamma}_b$:

$$(r_1, \dots, r_d, \dots, s_1, \dots, s_d).$$

On peut donc décomposer une forme différentielle sur $\mathcal{H}_b/\overline{\Gamma}_b \times V_b$ relativement à la base des $(2d-1)$ -formes différentielles, notée $(d\nu_i)_{i \in I}$, obtenue à partir de la base des 1-formes

$$(dr_1, \dots, dr_d, \dots, ds_1, \dots, ds_d, dx_1, \dots, dx_d).$$

Soit $\gamma = (n, m) \in \overline{\Gamma}_b - \{0\}$. Ainsi, on écrit :

$$(\overline{\exp_{A^\infty|V_b}} \circ \iota_b)^* g'_{a,\gamma} = \sum_{i \in I} f_i^{a,\gamma} V_i^{a,\gamma} d\nu_i$$

où pour tout $i \in I$, $f_i^{a,\gamma} : \mathcal{H}_b/\overline{\Gamma}_b \times V_b \rightarrow \mathbb{C}$ est une fonction lisse et $V_i^{a,\gamma}$ est un élément de $Sym^{a-1} \mathcal{H}_{b,\mathbb{C}}$.

Soit $i \in I$. À l'aide des résultats obtenus en 7.3, on vérifie les deux faits suivants :

Fait 1 : f_i se décompose en :

$$f_i^{a,\gamma} = \chi_\gamma g_i^{a,\gamma}$$

où χ_γ est la fonction de Levin pour la famille de Siegel :

$$[(r, s)] \in \mathcal{H}_b/\overline{\Gamma}_b \mapsto \exp(\langle (n, m), (r, s) \rangle) \in \mathbb{C}$$

et où $g_i^{a,\gamma} : V_b \rightarrow \mathbb{C}$ est une fonction lisse.

Fait 2 : En utilisant

i) que dans $g_i^{a,\gamma}$, les facteurs qui dépendent de (m, n) apparaissent sous l'une des formes

$$(m + n\Omega) \text{ et } (m + n\overline{\Omega}),$$

ii) la remarque 7.3.6,

iii) la norme induite sur $Sym^{a-1} \mathcal{H}_b$ par la norme sur $\Lambda_{\mathbb{R}}$:

$$\|(r, s)\| = \sqrt{rs^t}$$

iv) $\|\gamma\| \geq 1$,

on montre que pour tout K compact de V_b , tout $\gamma \in \overline{\Gamma}_b - \{0\}$, il existe une constante C_K telle que :

$$\|f_i^{a,\gamma} V_i^{a,\gamma}\|_{\infty, p^{-1}(K)} \leq C_K \|(n, m)\|^{-a}.$$

Proposition 7.4.1 – Pour tout $a > 2d$, la série de formes différentielles

$$g'_a := \sum_{\gamma \in \overline{\Gamma}_b - \{0\}} g'_{a,\gamma}$$

converge uniformément sur les compacts de $A_{V_b}^\infty$ et ce, quel que soit l'ordre choisi pour effectuer la sommation.

Preuve : Ceci découle du fait 2 et du critère de comparaison avec les séries d'Epstein. \square

Remarque 7.4.2 – g'_a converge donc également au sens des courants, toujours quel que soit l'ordre de sommation choisi (cf Prop 3.4.10).

On introduit l'opérateur de Laplace $\Delta := \partial_{r_1}^2 + \dots + \partial_{r_d}^2 + \partial_{s_1}^2 + \dots + \partial_{s_d}^2$. Soit $a \in \mathbb{N}^*$, $1 \leq a < 2d$. D'après le fait 1, pour tout $\gamma \in \overline{\Gamma}_b - \{0\}$,

$$\nabla^{2d-a} f_i^{a,\gamma} V_i \nu_i = (2\pi i |||(n, m)|||)^{2(2d-a)} f_i^{a,\gamma} V_i \nu_i.$$

De plus, on prouve que la série de formes différentielles

$$\sum_{\gamma=(n,m) \in \overline{\Gamma}_b - \{0\}} (2\pi i |||(n, m)|||)^{-2(2d-a)} f_i^{a,\gamma} V_i \nu_i$$

converge uniformément sur les compacts de $A_{V_b}^\infty$ et indépendamment de l'ordre choisi pour effectuer la sommation (preuve identique à celle de la proposition 7.4.1).

Proposition 7.4.3 – Pour tout $a \in \mathbb{N}^*$, $1 \leq a < 2d$, la série

$$g'_a := \sum_{\gamma \in \overline{\Gamma}_b - \{0\}} g'_{a,\gamma}$$

converge au sens des courants et le courant limite ne dépend pas de la façon de sommer.

Preuve : Soit $\eta \in \Gamma(A_{V_b}^\infty, \Omega_{A_{\infty,c}^{d+1}})$, alors :

$$\begin{aligned} \int_{A^\infty} f_i^{a,\gamma} \nu_i \wedge \eta V_i &= \int_{A^\infty} \nabla^{2d-a} ((2\pi i |||(n, m)|||)^{-2(2d-a)} f_i^{a,\gamma} V_i \nu_i) \wedge \eta \\ &= \int_{A^\infty} ((2\pi i |||(n, m)|||)^{-2(2d-a)} f_i^{a,\gamma} V_i \nu_i) \wedge \nabla^{2d-a} \eta \quad (*). \end{aligned}$$

$\nabla^{2d-a} \eta$ étant à support compact, le résultat se déduit de ce qui précède.

7.5 Le théorème de Levin

Soit g' le $(2d - 1)$ -courant sur $A_{V_b}^\infty$ à valeurs dans $(\mathcal{G}(d)_\mathbb{C})|_{A_{V_b}^\infty}$ défini par :

$$g' := \sum_{a \geq 1} (-1)^{a-1} g'_a.$$

Théorème 7.5.1 [Le-Thm 3.3.4] – *Le morphisme*

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{V_b} : \bar{\Gamma}_\mathbb{C}(V_b) &\rightarrow \Gamma(A_{V_b}^\infty, \mathcal{A}_{A^\infty}^{2d-1}(\mathcal{G}(d)_\mathbb{C})) \\ h &\mapsto g' \times h + i_h \text{vol}|_{A_{V_b}^\infty} \end{aligned}$$

vérifie la propriété suivante :

$$\forall h \in \bar{\Gamma}_\mathbb{C}(V_b), \quad \nabla(\mathcal{P}_{V_b}(h)) = (2\pi i)^d \delta_{V_b}.$$

Remarque 7.5.2 – *Ce morphisme est compatible avec les filtrations de Hodge.*

On a construit ainsi une solution locale au problème posé. En fait, ces morphismes $\{\mathcal{P}_{V_b}\}_{b \in B}$ se recollent pour donner un morphisme \mathcal{P} qui satisfait la propriété (P) du théorème 6.3.4. En effet, les sommations effectuées ne dépendent pas de l'ordre dans lequel on les effectue et les morphismes de recollement qui permettent définir $\mathcal{H}/\bar{\Gamma}$ induisent des isomorphismes sur les germes. La description topologique de l'extension topologique complexifiée du polylogarithme est ainsi achevée.

Corollaire 7.5.3 – *Le morphisme de Levin décrit le polylogarithme au niveau topologique complexe, i.e. :*

$$(\mathcal{P}ol_A)_\mathbb{C} = [\mathcal{P}|_U].$$

Preuve : On applique les théorèmes 6.3.4 et 7.5.1. □

On a vu que les courants g'_a étaient lisses pour $a > 2d$. La relation différentielle satisfaite par \mathcal{P} donne une information supplémentaire.

Corollaire 7.5.4 – *Soit h une section de $\bar{\pi}^* \bar{\Gamma}_\mathbb{C}$ et $k \in \mathbb{N}$. On note $\mathcal{P}^k(h)$ le courant obtenu en poussant $\mathcal{P}(h)$ à l'aide de la projection canonique :*

$$\mathcal{G}(d)_\mathbb{C} \rightarrow \text{Sym}^k(\pi^\infty)^* E(d)_\mathbb{C}.$$

Alors $\mathcal{P}^k(h)$ est lisse. Le morphisme

$$\mathcal{P}|_{\bar{U}} : \bar{\pi}_U^* \mathcal{H}_\mathbb{C} \rightarrow \mathcal{A}_{U^\infty}^{2d-1}((\mathcal{G}(d)_\mathbb{C})|_{\bar{U}})$$

se factorise donc par :

$$\text{Int}_{2d-1} \otimes Id : \Omega_{U^\infty}^{2d-1}((\mathcal{G}(d)_\mathbb{C})|_{\bar{U}}) \rightarrow \mathcal{A}_{U^\infty}^{2d-1}((\mathcal{G}(d)_\mathbb{C})|_{\bar{U}}).$$

Preuve : On passe du pro-fibré \mathcal{G} à un fibré en utilisant la filtration $(W_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ sur \mathcal{G} définie par :

$$W_{-n}(\mathcal{G}) = \prod_{k \geq n} \text{Sym}^k(\pi^\infty)^* E, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Ensuite, on applique la proposition 3.5.3. □

Chapitre 8

Valeurs du polylogarithme en un point de torsion

On définit la notion de valeur du polylogarithme en un point de torsion. Ce sont des classes de cohomologie nommées parfois "classes d'Eisenstein". Cette dernière terminologie vient du fait que ces classes peuvent se décrire à l'aide de séries d'Eisenstein ; pour les familles de courbes elliptiques, ceci est dû à Beilinson et Levin (cf [BeLe]) et c'est une conséquence des résultats de cette thèse en dimensions supérieures. On donne une méthode générale pour calculer, au niveau topologique (coefficients complexes), ces classes d'Eisenstein. On l'appliquera au chapitre suivant, pour les familles modulaires de Hilbert-Blumenthal.

Soit $A \xrightarrow[\pi]{e} B$ un schéma abélien complexe de dimension relative pure d tel que B est lisse.

Notations 8.0.5 –

$j : U \rightarrow A$ l'immersion ouverte complémentaire de $e : B \rightarrow A$,
 $\pi_U := \pi \circ j$,
 $\mathcal{H} := (R^1\pi_*\mathbb{Q})^\vee$,
 $\mathcal{L}og$ le logarithme de A (cf chap. 5),
 $\mathcal{P}ol$ le polylogarithme de A (cf chap. 6).

De plus, on se donne $x : B \rightarrow U$ un point de torsion de $\pi : A \rightarrow B$ et on fixe un entier positif l .

8.1 Cas de la cohomologie de Hodge absolue

On note val_x^l la composition suivante :

$$\begin{array}{c}
Ext_{MHM_{\mathbb{Q}}(U)}^{2d-1}((\pi_U^* \mathcal{H})^\iota, \mathcal{L}og_U(d)^\iota) \\
\downarrow x^* \text{ (cf prop 2.3.12)} \\
Ext_{MHM_{\mathbb{Q}}(B)}^{2d-1}(\mathcal{H}^\iota, (x^* \mathcal{L}og_U(d))^\iota) \\
\downarrow \sim \text{ (cf prop. 5.4.10)} \\
Ext_{MHM_{\mathbb{Q}}(B)}^{2d-1}(\mathcal{H}^\iota, \prod_{k \geq 0} ((Sym^k \mathcal{H})(d))^\iota) \\
\parallel \text{ (cf partie 2.3.2)} \\
Ext_{MHM_{\mathbb{Q}}(B)}^{2d-1}((\mathbb{Q}(0)_B^V)^\iota, \prod_{k \geq 0} (((Sym^k \mathcal{H}) \otimes \mathcal{H}^\vee)(d))^\iota) \\
\downarrow \text{ projection} \\
Ext_{MHM_{\mathbb{Q}}(B)}^{2d-1}((\mathbb{Q}(0)_B^V)^\iota, ((Sym^{l+1} \mathcal{H}) \otimes \mathcal{H}^\vee)(d)^\iota) \\
\downarrow \text{ contraction} \\
Ext_{MHM_{\mathbb{Q}}(B)}^{2d-1}((\mathbb{Q}(0)_B^V)^\iota, ((Sym^l \mathcal{H})(d))^\iota) \\
\parallel \text{ (cf [HW1-Def A.1.9 b]), prop. 2.3.12)} \\
H_{\mathcal{S}p}^{2d-1-dim B}(B, ((Sym^l \mathcal{H})(d))^\iota).
\end{array}$$

val_x^l

Définition 8.1.1 – La l -ième valeur de $\mathcal{P}ol_A$ en x est $[x^* \mathcal{P}ol_A]^l := val_x^l(\mathcal{P}ol_A)$. Dans la littérature, l'élément $[x^* \mathcal{P}ol_A]^l$ est parfois appelé "classe d'Eisenstein".

Remarque 8.1.2 – Ces classes ont un intérêt particulier car, d'après un théorème de Kings (cf [Ki2]), elles ont une origine motivique.

8.2 Cas de la cohomologie de Betti

On définit de la façon analogue la l -ième valeur topologique de $\mathcal{P}ol$ en x notée $\overline{[x^* \mathcal{P}ol_A]^l}$. Soit \overline{val}_x^l la composition :

$$\begin{array}{c}
Ext_{\mathbb{Q}_U\text{-mod}}^{2d-1}(\overline{\pi_U^* \mathcal{H}}, \overline{\mathcal{L}og_U(d)}) \\
\downarrow \bar{x}^* \\
Ext_{\mathbb{Q}_B\text{-mod}}^{2d-1}(\overline{\mathcal{H}}, \overline{x^* \mathcal{L}og_U(d)}) \\
\downarrow \sim \text{ (cf prop. 5.4.10)} \\
Ext_{\mathbb{Q}_B\text{-mod}}^{2d-1}(\overline{\mathcal{H}}, \prod_{k \geq 0} \overline{(Sym^k \mathcal{H})(d)}) \\
\parallel \\
Ext_{\mathbb{Q}_B\text{-mod}}^{2d-1}(\mathbb{Q}, \prod_{k \geq 0} \overline{((Sym^k \mathcal{H}) \otimes \mathcal{H}^\vee)(d)}) \\
\downarrow \text{ projection} \\
Ext_{\mathbb{Q}_B\text{-mod}}^{2d-1}(\mathbb{Q}, \overline{(Sym^{l+1} \mathcal{H}) \otimes \mathcal{H}^\vee}(d)) \\
\downarrow \text{ contraction} \\
Ext_{\mathbb{Q}_B\text{-mod}}^{2d-1}(\mathbb{Q}, \overline{(Sym^l \mathcal{H})(d)}) \\
\parallel \\
H^{2d-1}(\overline{B}, \overline{(Sym^l \mathcal{H})(d)}).
\end{array}$$

\overline{val}_x^l \curvearrowright

Remarque 8.2.1 – Par construction, on a $For(\overline{val}_x^l(\mathcal{P}ol_A)) = \overline{val}_x^l(For(\mathcal{P}ol_A))$.

Définition 8.2.2 – La l -ième valeur topologique de $\mathcal{P}ol_A$ en x est $\overline{val}_x^l(For(\mathcal{P}ol_A))$.

8.3 De la cohomologie absolue à la cohomologie de Betti

On étudie ici le morphisme induit par le foncteur oublié :

$$For : Ext_{MHM_{\mathbb{Q}}(B)}^{2d-1}((\mathbb{Q}(0)_B^V)^\iota, ((Sym^l \mathcal{H})(d))^\iota) \rightarrow H^{2d-1}(\overline{B}, (Sym^l \overline{\mathcal{H}})(d)).$$

Il s'agit de préciser la perte éventuelle lors du passage de $[x^* \mathcal{P}ol_A]^l$ à $For([x^* \mathcal{P}ol_A]^l)$.

Soit $a : B \rightarrow \text{Spec}(\mathbb{C})$ le morphisme structural de B . On considère la suite spectrale de Leray pour la composition $RHom_{SHM_{\mathbb{Q}}}(\mathbb{Q}(0), \cdot) \circ a_*$ appliquée à $((Sym^l \mathcal{H})(d))^\iota$. La dimension cohomologique de $SHM_{\mathbb{Q}}$ est 1 (cf [Be1-Cor 1.10]). Les termes E_2^i non nuls sont concentrés sur les colonnes 0 et 1. D'où la suite exacte courte suivante :

$$\begin{array}{c}
0 \longrightarrow Ext_{SHM_{\mathbb{Q}}}^1(\mathbb{Q}(0), H^{d-2} a_*((Sym^l \mathcal{H})(d))^\iota) \longrightarrow Ext_{MHM_{\mathbb{Q}}(B)}^{2d-1}((\mathbb{Q}(0)_B^V)^\iota, ((Sym^l \mathcal{H})(d))^\iota) \\
\downarrow p \\
Hom_{SHM_{\mathbb{Q}}}(\mathbb{Q}(0), H^{d-1} a_*((Sym^l \mathcal{H})(d))^\iota) \longrightarrow 0.
\end{array}$$

On a une injection canonique

$$\iota : \text{Hom}_{SHM_{\mathbb{Q}}}(\mathbb{Q}(0), H^{d-1}a_*((\text{Sym}^l \mathcal{H})(d))^\iota) \hookrightarrow \text{Hom}(\mathbb{Q}, \overline{H^{d-1}a_*((\text{Sym}^l \mathcal{H})(d))^\iota}).$$

$$\parallel$$

$$H^{2d-1}(\overline{B}, \overline{(\text{Sym}^l \mathcal{H})(d)})$$

D'autre part, on peut construire la suite spectrale de Leray précédente au niveau topologique, i.e. celle associée à la composition $R\text{Hom}_{\mathbb{Q}\text{-vect}}(\mathbb{Q}, \cdot) \circ R\overline{a}_*$ appliquée à $\overline{(\text{Sym}^l \mathcal{H})(d)}$. Des compatibilités des deux suites spectrales précédentes avec le foncteur oubli, on tire la relation :

$$\text{For} = \iota \circ p.$$

Par suite, on a :

$$\text{Ker}(\text{For}) = \text{Ext}_{SHM_{\mathbb{Q}}}^1(\mathbb{Q}(0), H^{d-2}a_*((\text{Sym}^l \mathcal{H})(d))^\iota).$$

8.4 Un outil pour calculer topologiquement les classes d'Eisenstein

La construction de \overline{val}_x^l a un analogue évident pour le corps de coefficients \mathbb{C} noté $\overline{val}_{x,\mathbb{C}}^l$ qui s'insère dans le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \text{Ext}_{\mathbb{Q}U\text{-mod}}^{2d-1}(\overline{\pi_U^* \mathcal{H}}, \overline{\mathcal{L}og_U(d)}) & \xrightarrow{\overline{val}_x^l} & H^{2d-1}(\overline{B}, \overline{(\text{Sym}^l \mathcal{H})(d)}) \\ \downarrow \cdot \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} & & \downarrow \cdot \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} \\ \text{Ext}_{\mathbb{C}U\text{-mod}}^{2d-1}(\overline{\pi_U^* (\mathcal{H})}_{\mathbb{C}}, \overline{(\mathcal{L}og_U(d))}_{\mathbb{C}}) & \xrightarrow{\overline{val}_{x,\mathbb{C}}^l} & H^{2d-1}(\overline{B}, \overline{(\text{Sym}^l \mathcal{H})(d)}_{\mathbb{C}}). \end{array}$$

Ainsi, on a :

$$(*) \quad \overline{val}_{x,\mathbb{C}}^l((\overline{\mathcal{P}ol}_A)_{\mathbb{C}}) = (\text{For}([x^* \mathcal{P}ol_A]^l))_{\mathbb{C}}$$

dans $H^{2d-1}(\overline{B}, \overline{(\text{Sym}^l \mathcal{H})(d)}_{\mathbb{C}})$.

Remarque 8.4.1 – Comme on l'a vu, dans le cas où le schéma abélien $\pi : A \rightarrow B$ est muni d'une polarisation principale, le morphisme de Levin $[\mathcal{P}|_U]$ fournit une description explicite de $(\overline{\mathcal{P}ol}_A)_{\mathbb{C}}$, ce qui permet de réécrire (*) sous la forme :

$$\overline{val}_{x,\mathbb{C}}^l([\mathcal{P}|_U]) = (\text{For}([x^* \mathcal{P}ol_A]^l))_{\mathbb{C}}.$$

Comme les courants de Levin sont lisses (cf Cor 7.5.4), l'opération de pullback ne pose pas de difficulté. De plus, les séries de Levin étant absolument convergentes, exceptées les premières (cf Prop 7.4.1), on dispose d'un outil pour expliciter $(\text{For}([x^* \mathcal{P}ol_A]^l))_{\mathbb{C}}$ pour $l > 2d$.

Chapitre 9

Le polylogarithme des variétés de Hilbert-Blumenthal

On considère les familles modulaires de Hilbert-Blumenthal et on explicite, au moyen des courants de Levin, l'extension topologique sous-jacente au polylogarithme de celles-ci. On en déduit une expression pour les classes d'Eisenstein grâce à laquelle on calcule leurs dégénérescences en la pointe ∞ de la compactification de Baily-Borel de la base. Le résultat s'exprime en termes de valeur spéciale de fonction L du corps de nombres totalement réel sous-jacent. En utilisant une équation fonctionnelle établie par Siegel, on obtient un résultat de non annulation pour certaines classes d'Eisenstein.

9.1 Variétés de Shimura et formalisme de Pink

9.1.1 Données de Shimura

Définition 9.1.1 [P-Def 2.1] – Soit P un groupe algébrique linéaire connexe sur \mathbb{Q} . Soient W son radical unipotent et $U \subset W$ un sous-groupe normal dans P . Soient $G := P/W$, $V := W/U$, $\pi : P \rightarrow G$, $\pi' : P \rightarrow P/U$ les projections canoniques. Soit \mathfrak{X} un espace homogène à gauche sous le groupe $P(\mathbb{R}).U(\mathbb{C}) \subset P(\mathbb{C})$. Soit $h : \mathfrak{X} \rightarrow \text{Hom}(\mathbb{S}_{\mathbb{C}}, P_{\mathbb{C}})$ ($\mathbb{S} := \text{Res}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}(\mathbb{G}_{m,\mathbb{C}})$) un morphisme $P(\mathbb{R}).U(\mathbb{C})$ -équivariant tel que les fibres de h sont finies et pour tout $x \in \mathfrak{X}$:

- (i) $\pi' \circ h(x) : \mathbb{S}_{\mathbb{C}} \rightarrow (P/U)_{\mathbb{C}}$ est défini au dessus de \mathbb{R} ,
- (ii) $\pi \circ h(x) \circ w : \mathbb{G}_{m,\mathbb{R}} \rightarrow G_{\mathbb{R}}$ est un cocaractère du centre de G ($w : \mathbb{G}_{m,\mathbb{R}} \hookrightarrow \mathbb{S}$, $t \in \mathbb{R}^{\times} \mapsto \mathbb{C}^{\times}$),
- (iii) $\text{Ad}_P \circ h(x)$ induit une \mathbb{Q} -structure de Hodge sur $\text{Lie}(P)$ de type

$$\{(-1, 1), (0, 0), (1, -1)\} \cup \{(-1, 0), (0, -1)\} \cup \{(-1, -1)\}.$$

- (iv) La filtration par le poids sur $\text{Lie}(P)$ est donnée par :

$$W_n(\text{Lie}(P)) = \begin{cases} 0 & \text{si } n < -2 \\ \text{Lie}(U) & \text{si } n = -2 \\ \text{Lie}(W) & \text{si } n = -1 \\ \text{Lie}(P) & \text{si } n \geq 0 \end{cases}.$$

- (v) $\text{int}(\pi(h(x)(\sqrt{-1})))$ induit une involution de Cartan sur $G_{\mathbb{R}}^{\text{ad}}$.
- (vi) G^{ad} ne possède pas de facteur de type compact défini sur \mathbb{Q} non trivial.
- (vii) Le centre de G agit sur U et sur V à travers un tore qui est isogène au produit d'un tore scindé sur \mathbb{Q} avec un tore de type compact défini sur \mathbb{Q} .

Un triplet (P, \mathfrak{X}, h) vérifiant ces propriétés est appelé donnée de Shimura. Cette donnée est dite pure si P est réductif.

Définition 9.1.2 [P-Def 2.3] – Soient $(P_1, \mathfrak{X}_1, h_1)$ et $(P_2, \mathfrak{X}_2, h_2)$ deux données de Shimura. Un morphisme de données de Shimura de $(P_1, \mathfrak{X}_1, h_1)$ vers $(P_2, \mathfrak{X}_2, h_2)$ est la donnée d'un morphisme $\varphi : P_1 \rightarrow P_2$ et d'une application $\psi : \mathfrak{X}_1 \rightarrow \mathfrak{X}_2$ $P_1(\mathbb{R}).U_1(\mathbb{C})$ -équivariante tels que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{X}_1 & \xrightarrow{\varphi} & \mathfrak{X}_2 \\ h_1 \downarrow & & \downarrow h_2 \\ \text{Hom}(\mathbb{S}_{\mathbb{C}}, P_{1,\mathbb{C}}) & \xrightarrow{h \mapsto \varphi \circ h} & \text{Hom}(\mathbb{S}_{\mathbb{C}}, P_{2,\mathbb{C}}). \end{array}$$

Proposition 9.1.3 [P-Prop 2.9] – Soit (P, \mathfrak{X}) une donnée de Shimura et P_0 un sous-groupe normal de P . Il existe une donnée de Shimura quotient $(P, \mathfrak{X})/P_0$, unique à isomorphisme près, et un morphisme de données de Shimura

$$(P, \mathfrak{X}) \rightarrow (P, \mathfrak{X})/P_0$$

unique à isomorphisme près tel que tout morphisme de données de Shimura

$$(\varphi, \psi) : (P, \mathfrak{X}) \rightarrow (P', \mathfrak{X}')$$

où le morphisme $P \rightarrow P'$ se factorise à travers P_0 se factorise de manière unique à travers $(P, \mathfrak{X}) \rightarrow (P, \mathfrak{X})/P_0$.

Soit (P, \mathfrak{X}) une donnée de Shimura et W_0 un \mathbb{Q} -groupe unipotent muni d'une action de P notée ρ . Soit $P' := W_0 \rtimes P$. La multiplication est donnée par :

$$(w, p).(w', p') = (w + \rho(p)w', pp').$$

Proposition 9.1.4 [P-Prop 2.17] – Si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

- i) l'algèbre de Lie de tout sous-quotient irréductible, de $\text{Lie}W_0$ est de type $\{(-1, 0), (0, -1)\}$ ou $\{(-1, -1)\}$ comme représentation de G
- ii) le centre de G agit dessus à travers un tore qui est isogène au produit d'un tore scindé sur \mathbb{Q} avec un tore de type compact défini sur \mathbb{Q} ,

alors il existe une unique donnée de Shimura (P', \mathfrak{X}') (à isomorphisme près) qui étend le morphisme canonique $P' \rightarrow P$ tel que $(P', \mathfrak{X}')/W_0 \simeq (P, \mathfrak{X})$. (P', \mathfrak{X}') est appelée extension unipotente de (P, \mathfrak{X}) par W_0 .

Remarque 9.1.5 – Pink traite en fait des extensions unipotentes plus générales. Celles données ci-dessus correspondent au cas scindé.

9.1.2 Variétés de Shimura

On note \mathbb{A}_f les adèles finies de \mathbb{Q} .

Définition 9.1.6 [P-3.1] – Soient (P, \mathfrak{X}, h) une donnée de Shimura et $K \subset P(\mathbb{A}_f)$ un sous-groupe compact ouvert. La variété de Shimura associée est

$$M^K(P, \mathfrak{X})(\mathbb{C}) := P(\mathbb{Q})/(\mathfrak{X} \times (P(\mathbb{A}_f)/K))$$

où $P(\mathbb{Q})$ agit à gauche sur les deux facteurs.

Faits 9.1.7 –

- i) Si K est net (cf [P-0.5, 0.6]), alors $M^K(P, \mathfrak{X})(\mathbb{C})$ est naturellement muni d'une structure de variété analytique complexe [P-3.3.b].
- ii) Soient $\varphi : (P_1, \mathfrak{X}_1) \rightarrow (P_2, \mathfrak{X}_2)$ un morphisme de données de Shimura, K^1 un sous-groupe ouvert compact net de $P_1(\mathbb{A}_f)$, $K^2 \subset \varphi(K^1)$ un sous-groupe ouvert compact net de $P_2(\mathbb{A}_f)$, alors φ induit une application holomorphe canonique (cf [P-3.4])

$$[\varphi] : M^{K^1}(P_1, \mathfrak{X}_1)(\mathbb{C}) \rightarrow M^{K^2}(P_2, \mathfrak{X}_2)(\mathbb{C}).$$

- iii) Soient (P, \mathfrak{X}) une donnée de Shimura, W_0 un \mathbb{Q} -groupe unipotent abélien et $(P' = W_0 \rtimes P, \mathfrak{X}')$ l'extension unipotente de (P, \mathfrak{X}) par W_0 . Soient K un sous-groupe ouvert compact net de $P(\mathbb{A}_f)$ et K' un sous-groupe ouvert compact net de $P'(\mathbb{A}_f)$ de la forme $K^W \rtimes K$. Alors (cf [P-3.12]), le morphisme canonique

$$M^{K'}(P', \mathfrak{X}')(\mathbb{C}) \rightarrow M^K(P, \mathfrak{X})(\mathbb{C})$$

est une famille holomorphe lisse de groupes de Lie abéliens analytiques complexes.

Théorème 9.1.8 [P-9.24] – Pour toute donnée de Shimura (P, \mathfrak{X}) , tout K sous-groupe ouvert compact net de $P(\mathbb{A}_f)$, il existe une structure canonique de variété algébrique complexe quasi-projective lisse sur $M^K(P, \mathfrak{X})(\mathbb{C})$ notée

$$M^K(P, \mathfrak{X})$$

telle que les morphismes de données de Shimura induisent des morphismes algébriques.

Remarque 9.1.9 – Dans le cas où la donnée est pure, le théorème précédent est dû à Baily et Borel.

Faits 9.1.10 –

- i) Soient (P, \mathfrak{X}) une donnée de Shimura et K un sous-groupe ouvert compact net de $P(\mathbb{A}_f)$. Par construction de $M^K(P, \mathfrak{X})(\mathbb{C})$, on a un foncteur canonique des représentations algébriques de P vers les \mathbb{Q} -variations de structures de Hodge mixtes sur $M^K(P, \mathfrak{X})(\mathbb{C})$. Les variations issues de cette construction sont admissibles (cf [Wi1-II-Thm 2.2]), d'où un foncteur tensoriel canonique :

$$\mu_K : \text{Rep}_{\mathbb{Q}} P \rightarrow \text{MHM}_{\mathbb{Q}}(M^K(P, \mathfrak{X})).$$

ii) Dans la situation du fait 9.1.7, en supposant de plus que la représentation W_0 de P est pure de poids -1 , le morphisme :

$$M^{K'}(P', \mathfrak{X}') \rightarrow M^K(P, \mathfrak{X})$$

est muni d'une structure de schéma abélien canonique.

Remarque 9.1.11 – Les variétés de Shimura ont un modèle canonique défini sur un corps de nombres (lui aussi canonique) [P-Thm 11.18]. Ce résultat est dû à Milne dans le cas pure.

9.2 Variétés de Hilbert-Blumenthal

Soit L un corps de nombres totalement réel de degré g . On fixe une énumération des plongements de L dans \mathbb{R} , $(\sigma_k)_{1 \leq k \leq g}$.

9.2.1 Donnée de Shimura pour la variété de Hilbert-Blumenthal

Soit le morphisme $f : \mathbb{G}_{m, \mathbb{Q}} \rightarrow \text{Res}_{L/\mathbb{Q}} \mathbb{G}_{m, L}$ qui à une \mathbb{Q} -algèbre A fait correspondre :

$$(A^\times \rightarrow (A \otimes L)^\times, a \mapsto a \otimes 1).$$

Définition 9.2.1 – On définit le \mathbb{Q} -schéma en groupes G par le diagramme cartésien suivant :

$$\begin{array}{ccc} G & \hookrightarrow & \text{Res}_{L/\mathbb{Q}} GL_{2, L} \\ \downarrow & & \downarrow \text{Res}_{L/\mathbb{Q}}(\det) \\ \mathbb{G}_{m, \mathbb{Q}} & \xrightarrow{f} & \text{Res}_{L/\mathbb{Q}} \mathbb{G}_{m, L} \end{array} .$$

Remarques 9.2.2 –

i) Le groupe algébrique G est réductif.

ii) Soit H un groupe algébrique sur L . Soit A une \mathbb{R} -algèbre. On a un isomorphisme de \mathbb{R} -algèbres

$$\begin{array}{ccc} A \otimes_{\mathbb{Q}} L & \xrightarrow{\sim} & A^g \\ a \otimes l & \mapsto & (\sigma_k(l) \cdot a)_{1 \leq k \leq g} \end{array}$$

grâce auquel on identifie $(\text{Res}_{L/\mathbb{Q}} H) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ et $(H \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R})^g$. On procède de même pour \mathbb{C} à la place de \mathbb{R} .

On pose $\mathfrak{H}_1^\pm := \mathbb{C} - \mathbb{R}$. On fait de $(\mathfrak{H}_1^\pm)^g$ un $G(\mathbb{R})$ -espace homogène à gauche en faisant agir le groupe $G(\mathbb{R}) \subseteq (GL_2(\mathbb{R}))^g$ à gauche sur $(\mathfrak{H}_1^\pm)^g$ via les homographies.

Notation 9.2.3 – On désigne par \underline{z} l'élément $(z_k)_{1 \leq k \leq g}$ de \mathbb{C}^g .

Définition 9.2.4 – Soit $h : (\mathfrak{H}_1^\pm)^g \rightarrow \text{Hom}(\mathbb{S}_{\mathbb{C}}, G_{\mathbb{C}})$ ($\hookrightarrow \text{Hom}(\mathbb{S}_{\mathbb{C}}, (GL_{2, \mathbb{C}})^g)$),

$$\mathcal{I} \mapsto \left[(z_1, z_2) \mapsto \left(\frac{i}{2Im\tau_k} \begin{pmatrix} \overline{\tau_k} z_1 - \tau_k z_2 & -|\tau_k|^2(z_1 - z_2) \\ z_1 - z_2 & -\tau_k z_1 + \overline{\tau_k} z_2 \end{pmatrix} \right)_{1 \leq k \leq g} \right].$$

Fait 9.2.5 – $(G, (\mathfrak{H}_1^\pm)^g)$ est une donnée de Shimura pure.

9.2.2 Donnée de Shimura pour la famille de variétés abéliennes universelle

Soit $V := \text{Res}_{L/\mathbb{Q}}(\mathbb{G}_{a,L} \oplus \mathbb{G}_{a,L})$. Le groupe $\text{Res}_{L/\mathbb{Q}}(GL_{2,L})$ agit canoniquement à droite sur V . Soit $\rho : G \rightarrow \text{Aut}(V)$ la restriction de cette application à G .

Définition 9.2.6 – On pose $P := V \rtimes G$ le produit semi-direct pour l'action ρ de G sur V . La multiplication dans P est donnée par :

$$(v, g) \cdot (v', g') = (v + \rho(g)v', gg').$$

Lemme 9.2.7 (comparer à [Wi1-V-Lem 1.1]) – Soient $\underline{\tau} \in (\mathfrak{H}_1^\pm)^g$. Le morphisme $h_{\underline{\tau}}$ définit une \mathbb{Q} -structure de Hodge pure de poids -1 sur $V(\mathbb{Q})$. Sous l'identification $V_{\mathbb{C}} = (\mathbb{G}_{a,\mathbb{C}} \oplus \mathbb{G}_{a,\mathbb{C}})^g$ la filtration de Hodge est donnée par :

$$\begin{aligned} F^1(V_{\mathbb{C}}) &= 0 \\ F^0(V_{\mathbb{C}}) &= \left\langle \left(\begin{array}{c} \tau_1 \\ 1 \end{array} \right) \right\rangle_{\mathbb{C}} \times \dots \times \left\langle \left(\begin{array}{c} \tau_g \\ 1 \end{array} \right) \right\rangle_{\mathbb{C}} \\ F^{-1}(V_{\mathbb{C}}) &= V_{\mathbb{C}}. \end{aligned}$$

Preuve : $H^{0,-1}(V_{\mathbb{C}})$ est le sous-espace propre associé au caractère $(z_1, z_2) \mapsto z_2$. Un calcul permet alors de conclure. \square

Définition 9.2.8 (comp. [Wi1-V-p 256]) On définit la donnée de Shimura (P, \mathfrak{X}') comme l'extension unipotente de (G, \mathfrak{X}) par V .

Comme $\text{Lie}(V)$ est de type $\{(0, -1), (-1, 0)\}$, on a la description suivante de \mathfrak{X}' :

$$\mathfrak{X}' = \{(k, \underline{\tau}) \in \text{Hom}(\mathbb{S}, P_{\mathbb{R}}) \times (\mathfrak{H}_1^\pm)^g / h_{\underline{\tau}} = \pi \circ k\}$$

où $\pi : P \rightarrow G$ est la projection canonique. À l'aide des isomorphismes donnés par [Wi1-V-Lem 1.2] et [Wi1-V-Cor 1.4.b] on construit un biholomorphisme :

$$\mathbb{C}^g \times (\mathfrak{H}_1^\pm)^g \xrightarrow{\sim} \mathfrak{X}'.$$

9.2.3 Le schéma abélien

Notations 9.2.9 –

- \mathcal{O}_L l'anneau des entiers de L ,
- \mathcal{D}_L la différentielle de L à \mathbb{Q} ,
- \mathfrak{a}_v l'adhérence de \mathfrak{a} dans L_v , pour $\mathfrak{a} \subset L$ idéal fractionnaire, v place finie de L ,
- $\hat{\mathfrak{a}} := \prod_{v \text{ finie}} \mathfrak{a}_v$, pour $\mathfrak{a} \subset L$ idéal fractionnaire.

Soit $K_0 := \prod_{v \text{ finie}} G(\mathcal{O}_{L,v})$. C'est un sous-groupe ouvert compact de $G(\mathbb{A}_f)$. Pour tout $N \geq 3$, le groupe

$$K_N := \left\{ M \in K_0 / M \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod{N\widehat{\mathcal{O}}_L} \right\}$$

est un sous-groupe ouvert compact net de $G(\mathbb{A}_f)$. On fixe $N \geq 3$.

Notation 9.2.10 – Soit $B := M^{K_N}(G, \mathfrak{X})$. C'est une variété algébrique complexe lisse.

Soit K'_N le sous-groupe compact ouvert de $P(\mathbb{A}_f)$ défini par

$$K'_N := (\widehat{\mathcal{D}}_{L/K}^{-1} \oplus \widehat{\mathcal{O}}_L) \rtimes K_N.$$

Notations 9.2.11 –

- i) La variété algébrique complexe lisse $M^{K'_N}(P, \mathfrak{X}')$ est notée A .
- ii) On a un morphisme canonique $\pi : A \rightarrow B$ qui est le morphisme structural d'un schéma abélien au dessus de B (cf Fait 9.1.10 ii).

On va maintenant décrire une composante connexe de \overline{B} et la restriction de la famille de variétés abéliennes au dessus de celle-ci.

Soient \mathfrak{H}_1 le demi-plan de Poincaré supérieur, $\mathfrak{X}^+ := \mathfrak{H}_1^g$, et

$$\Lambda_N := \left\{ M \in SL_2(\mathcal{O}_L) / M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod{N\mathcal{O}_L} \right\}.$$

L'inclusion canonique $\mathfrak{X}^+ \hookrightarrow \mathfrak{X}$ induit par passage au quotient une immersion ouverte

$$B^0 := \Lambda_N \backslash \mathfrak{X}^+ \hookrightarrow B^{an} = M^{K_N}(G, \mathfrak{X})(\mathbb{C})$$

qui identifie B^0 à une composante connexe de B^{an} .

La restriction de $\pi^{an} : A^{an} \rightarrow B^{an}$ au dessus de B^0 est donnée par :

$$p : \Lambda'_N \backslash \mathfrak{X}'^+ \rightarrow B^0$$

où $\mathfrak{X}'^+ := \mathbb{C}^g \times \mathfrak{X}^+$ et Λ'_N , défini par :

$$\Lambda'_N := (\mathcal{D}_L^{-1}) \oplus \mathcal{O}_L \rtimes \Lambda_N,$$

agit sur \mathfrak{X}'^+ par l'action qui à $\left(\left((a, b), \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \right), ((z_k)_{1 \leq k \leq g}, (\tau_k)_{1 \leq k \leq g}) \right) \in \Lambda'_N \times (\mathbb{C}^g \times \mathfrak{H}_1^g)$ fait correspondre :

$$\left(\frac{z_k}{\sigma_k(\gamma)\tau_k + \sigma_k(\delta)} + \sigma_k(a) - \sigma_k(b) \begin{pmatrix} \sigma_k(\alpha)\tau_k + \sigma_k(\beta) \\ \sigma_k(\gamma)\tau_k + \sigma_k(\delta) \end{pmatrix}, \frac{\sigma_k(\alpha)\tau_k + \sigma_k(\beta)}{\sigma_k(\gamma)\tau_k + \sigma_k(\delta)} \right)_{1 \leq k \leq g} \in \mathbb{C}^g \times \mathfrak{H}_1^g.$$

9.2.4 La pointe ∞

La variété analytique lisse B^0 est l'espace analytique associé à une variété algébrique complexe lisse quasi-projective. On peut montrer ce résultat en utilisant une compactification : la compactification de Baily-Borel de B^0 . On explique succinctement la construction analytique de cette dernière (cf [vdG]).

L'espace X^+ est naturellement inclus dans $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})^g$. Les plongements $(\sigma_k)_{1 \leq k \leq g}$ induisent un plongement :

$$\mathbb{P}^1(L) \xrightarrow{(*)} \mathbb{P}^1(\mathbb{R})^g \subset \mathbb{P}^1(\mathbb{C})^g.$$

Soit $G(\mathbb{R})^+$ le sous-groupe de $G(\mathbb{R})$ formé des éléments dont le¹ déterminant est positif. $G(\mathbb{R})^+$ agit sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})^g$ via les homographies.

Définition 9.2.12 – Une pointe de B^0 est une orbite sous Λ_N d'un point de $\mathbb{P}^1(L)$ vu comme point de $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})^g$ via $(*)$.

On adjoint à B^0 cet ensemble de pointes pour obtenir un ensemble noté $(B^0)^*$. On munit alors $(B^0)^*$ de la topologie de Satake. C'est un espace analytique complexe (non lisse si $g > 1$) dont la structure est compatible avec celle de B^0 .

On note ∞ la pointe qui correspond à l'orbite de $[1 : 0] \in \mathbb{P}^1(L)$. On décrit un système fondamental de voisinages de ∞ dans $(B^0)^*$.

Notations 9.2.13 –

$\Lambda_{N,\infty}$ le stabilisateur de ∞ dans Λ_N ,
 $\mathcal{O}_{L,N}^\times$ le sous-groupe des unités de \mathcal{O}_L congrues à 1 modulo $N\mathcal{O}_L$.

Lemme 9.2.14 –

$$\Lambda_{N,\infty} = \left\{ \begin{pmatrix} \varepsilon & a \\ 0 & \varepsilon^{-1} \end{pmatrix} / \varepsilon \in \mathcal{O}_{L,N}^\times \text{ et } a \in \mathcal{O}_L \equiv 0 \pmod{N\mathcal{O}_L} \right\}.$$

Preuve : Un calcul direct le prouve. □

Pour tout $r \in \mathbb{R}^{+*}$, soit V_r défini par :

$$V_r := \{ \mathcal{I} \in \mathfrak{X}^+ / \prod_{j=1}^g \mathfrak{S}(\tau_j) > r \}.$$

On remarque que $\Lambda_{N,\infty}$ agit sur V_r et on pose :

$$\overline{V}_r := \Lambda_{N,\infty} \backslash V_r.$$

Pour $r \gg 0$, le morphisme canonique :

$$\overline{V}_r \rightarrow B^0$$

¹cf définition de G

est une immersion ouverte et la famille

$$\{\overline{V}_r \cup \{\infty\}\}_{r \gg 0}$$

forme une base de voisinages de la pointe ∞ .

9.3 Étude de la dégénérescence en l'_{∞}

Notations 9.3.1 – On note :

$$\begin{aligned} j : B^0 &\hookrightarrow (B^0)^* && \text{l'immersion ouverte de } B^0 \text{ dans } (B^0)^*, \\ i : \partial(B^0)^* &\hookrightarrow (B^0)^* && \text{l'immersion fermée de l'ensemble des pointes dans } (B^0)^*, \\ i_{\infty} : \{\infty\} &\hookrightarrow (B^0)^* && \text{l'immersion fermée de la pointe } \infty \text{ dans } (B^0)^*, \\ \mathcal{H} &&& := (R^1 p_* \mathbb{Q})^{\vee}. \end{aligned}$$

9.3.1 Le morphisme résidu

On fixe l un entier positif. On a pour projet d'étudier la dégénérescence des classes d'Eisentein en la pointe ∞ , i.e. de calculer leurs images sous le morphisme Res_{∞}^l qu'on définit ci-dessous.

Dans $D^b M_{HM_{\mathbb{Q}}}(B^0)$, on a le triangle exact :

$$j_! (Sym^l \mathcal{H}(g))^{\vee} \rightarrow j_* (Sym^l \mathcal{H}(g))^{\vee} \rightarrow i_* i^* j_* (Sym^l \mathcal{H}(g))^{\vee} \rightarrow j_! (Sym^l \mathcal{H}(g))^{\vee}[1].$$

On lui applique le foncteur $RHom_{M_{HM_{\mathbb{Q}}}(B^0)^*}((\mathbb{Q}(0)_{(B^0)^*}^{\vee})^{\vee}, \cdot)$ pour obtenir un nouveau triangle distingué et on considère le morphisme suivant qui apparaît dans la suite exacte longue de cohomologie associée à ce dernier :

$$Ext_{M_{HM_{\mathbb{Q}}}(B^0)}^{2g-1}((\mathbb{Q}(0)_{B^0}^{\vee})^{\vee}, (Sym^l \mathcal{H}(g))^{\vee}) \rightarrow H^{2g-1} RHom_{M_{HM_{\mathbb{Q}}}(\partial(B^0)^*)}(i^*(\mathbb{Q}(0)_{B^0}^{\vee})^{\vee}, i^* j_* (Sym^l \mathcal{H}(g))^{\vee}).$$

On en déduit (cf partie 2.3.2) le morphisme :

$$Ext_{M_{HM_{\mathbb{Q}}}(B^0)}^{2g-1}((\mathbb{Q}(0)_{B^0}^{\vee})^{\vee}, (Sym^l \mathcal{H}(g))^{\vee}) \xrightarrow{(*)} H^{g-1} RHom_{SHM_{\mathbb{Q}}}(\mathbb{Q}(0), i_{\infty}^* j_* (Sym^l \mathcal{H}(g))^{\vee}).$$

La suite spectrale de Leray associée à la composition $RHom_{SHM_{\mathbb{Q}}}(\mathbb{Q}(0), \cdot) \circ i_{\infty}^* j_*$ appliquée à $(Sym^l \mathcal{H}(g))^{\vee}$ a ses termes E_2^j non nuls concentrés sur les colonnes 0 et 1 (comparer à la construction faite en 8.3). D'où la suite exacte courte :

$$\begin{array}{ccc} 0 \rightarrow Ext_{SHM_{\mathbb{Q}}}^1(\mathbb{Q}(0), H^{g-2} i_{\infty}^* j_* (Sym^l \mathcal{H}(g))^{\vee}) & \longrightarrow & H^{g-1} RHom_{SHM_{\mathbb{Q}}}(\mathbb{Q}(0), i_{\infty}^* j_* (Sym^l \mathcal{H}(g))^{\vee}) \\ & & \downarrow (***) \\ & & Hom_{SHM_{\mathbb{Q}}}(\mathbb{Q}(0), H^{g-1} i_{\infty}^* j_* (Sym^l \mathcal{H}(g))^{\vee}) \rightarrow 0. \end{array}$$

Définition 9.3.2 – Le morphisme résidu, noté Res_∞^l , est défini par le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} Ext_{MHM_{\mathbb{Q}}(B^0)}^{2g-1}((\mathbb{Q}(0)_{B^0}^V)^\iota, (Sym^l \mathcal{H}(g))^\iota) & \xrightarrow{(*)} & H^{g-1} RHom_{SHM_{\mathbb{Q}}}(\mathbb{Q}(0), i_\infty^* j_* (Sym^l \mathcal{H}(g))^\iota) \\ & \searrow Res & \downarrow (**) \\ & & Hom_{SHM_{\mathbb{Q}}}(\mathbb{Q}(0), H^{g-1} i_\infty^* j_* (Sym^l \mathcal{H}(g))^\iota). \end{array}$$

9.3.2 Le but du morphisme résidu

Ici, on détermine $H^{2g-1-d_B} i_\infty^* j_* (Sym^l \mathcal{H}(d))^\iota$.

Faits 9.3.3 –

i) D'après la définition de G , on a un morphisme canonique $\chi : G \rightarrow \mathbb{G}_{m,\mathbb{Q}}$. Alors, χ définit une action de G sur $\mathbb{G}_{a,\mathbb{Q}}$ et

$$\mu_{K_N}(\chi) = (\mathbb{Q}(1)_{B^0}^V)^\iota.$$

ii) Soit $V_2 := Res_{L/\mathbb{Q}}(\mathbb{G}_{a,L} \oplus \mathbb{G}_{a,L})$ muni de l'action standard de $Res_{L/\mathbb{Q}}(GL_{2,L})$ que l'on restreint à G . Alors, on a :

$$\mu_{K_N}(V_2) = (\mathcal{H})^\iota.$$

Ainsi, $(Sym^l \mathcal{H}(d))^\iota$ est dans l'image du foncteur μ_{K_N} . Dans l'article [BW], est démontrée une formule qui permet de calculer

$$H^{2d-1-d_B} i_\infty^* j_* \mu_{K_N}(V),$$

pour $V \in Rep_{\mathbb{Q}} G$, en termes de cohomologie de deux groupes : l'un algébrique unipotent, l'autre arithmétique. L'énoncé du résultat précis requiert la description de la compactification de Baily-Borel dans le formalisme de Pink. Pour cela, on renvoie aux chapitres 4 et 6 de la thèse de Pink [P] ou encore, pour un résumé, à [BW-p. 365 et 366].

On explicite les différents objets qui interviennent dans la description de la pointe ∞ de B en suivant les notations de [BW- p. 365 – 367] et aussi les groupes qui interviennent dans ce cas dans le théorème [BW-Thm 2.9].

i) Soit Q le sous-groupe parabolique admissible de G qui est le produit fibré du sous-groupe de Borel standard de $Res_{L/\mathbb{Q}} GL_{2,L}$

$$\left\{ \left(\begin{array}{cc} * & * \\ 0 & * \end{array} \right) \right\}$$

et de $\mathbb{G}_{m,\mathbb{Q}}$.

ii) Le sous-groupe normal canonique de Q , P_1 , est le produit fibré du sous-groupe de $Res_{L/\mathbb{Q}} GL_{2,L}$

$$\left\{ \left(\begin{array}{cc} * & * \\ 0 & 1 \end{array} \right) \right\}$$

et de $\mathbb{G}_{m,\mathbb{Q}}$ qui s'identifie à

$$Res_{L/\mathbb{Q}} \mathbb{G}_{a,L} \rtimes \mathbb{G}_{m,\mathbb{Q}}.$$

iii) Le radical unipotent de P_1 (et de Q) est le produit fibré du sous-groupe de $Res_{L/\mathbb{Q}}GL_{2,L}$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

et de $\mathbb{G}_{m,\mathbb{Q}}$, c'est à dire

$$Res_{L/\mathbb{Q}}\mathbb{G}_{a,L}.$$

iv) $G_1 := P_1/W_1 = \mathbb{G}_{m,\mathbb{Q}}$.

v) La composante de bord dans la compactification de Baily-Borel qui correspond à la pointe ∞ est la donnée de Shimura : $(\mathbb{G}_{m,\mathbb{Q}}, \{-1, 1\})$.

vi) On a donc un morphisme :

$$i_{G_1, K_N, 1} : M^{\pi(K_1)}(G_1, \{-1, 1\}) \rightarrow (B^0)^*.$$

vii) $\Delta \backslash M^{\pi(K_1)}(G_1, \{-1, 1\})$ est réduit à un point et l'immersion induite par $i_{G_1, K_N, 1}$:

$$\Delta \backslash M^{\pi(K_1)}(G_1, \{-1, 1\}) \hookrightarrow (B^0)^*$$

correspond à :

$$i_\infty : \{\infty\} \hookrightarrow (B^0)^*.$$

viii) Enfin, on calcule H_C et on obtient :

$$H_C = \left\{ \begin{pmatrix} \varepsilon & * \\ 0 & \varepsilon^{-1} \end{pmatrix} / \varepsilon \in \mathcal{O}_{L,N}^\times \right\}.$$

On en déduit :

$$\overline{H_C} = \left\{ \left[\begin{pmatrix} \varepsilon & * \\ 0 & \varepsilon^{-1} \end{pmatrix} \right] / \varepsilon \in \mathcal{O}_{L,N}^\times \right\} \simeq \mathcal{O}_{L,N}^\times.$$

On peut alors énoncer le résultat :

Théorème 9.3.4 [BW-Thm 2.9] –

$$H^{g-1} i_\infty^* j_* (Sym^l \mathcal{H}(g))^\iota = \bigoplus_{p+q=2g-1} \mu_{\pi(K_1)} \circ H^p(\overline{H_C}, H^q(W_1, Res_Q^G(Sym^l V_2 \otimes \chi^g))).$$

La dimension cohomologique du groupe W_1 (resp. du groupe abélien libre de rang $g-1$ sans torsion $\overline{H_C}$) est g (resp. $g-1$). Ainsi, on a :

$$H^{g-1} i_\infty^* j_* (Sym^l \mathcal{H}(d))^\iota = \mu_{\pi(K_1)} \circ H^{g-1}(\overline{H_C}, H^g(W_1, Res_Q^G(Sym^l V_2 \otimes \chi^g))).$$

Proposition 9.3.5 –

$$H^{g-1} i_\infty^* j_* (Sym^l \mathcal{H}(g))^\iota = \begin{cases} \mathbb{Q}(0) & \text{si } g \text{ divise } l, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Preuve :

i) Calcul de $H^g(W_1, Res_Q^G(Sym^l V_2 \otimes \chi^g))$

On commence par remarquer que W_1 n'agit pas sur χ^g . D'après [Kn-Thm 6.10], on a un isomorphisme (Q/W_1) -équivariant :

$$H^g(W_1, Res_Q^G(Sym^l V_2)) \simeq H_0(W_1, Res_Q^G(Sym^l V_2)) \otimes \overset{g}{\wedge}(Lie W_1)^{\vee}.$$

On étend les scalaires à une clôture algébrique de \mathbb{Q} , $\overline{\mathbb{Q}}$, et on a :

$$H_0(W_1, Res_Q^G(Sym^l V_2)) \otimes_{\mathbb{Q}} \overline{\mathbb{Q}} = H_0(W_1(\overline{\mathbb{Q}}), Sym^l V_2(\overline{\mathbb{Q}})).$$

On a :

$$\begin{aligned} W_1(\overline{\mathbb{Q}}) &= \left(W_1^i := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \alpha_i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} / \alpha_i \in \overline{\mathbb{Q}} \right\} \right)_{1 \leq i \leq g} \\ V_2(\overline{\mathbb{Q}}) &= \left(\{a_i X_i + b_i Y_i / a_i, b_i \in \overline{\mathbb{Q}}\} \right)_{1 \leq i \leq g} \end{aligned}$$

où $X_i = (1, 0)$, $Y_i = (0, 1) \in \overline{\mathbb{Q}}^2$. On a ainsi une base canonique pour $Sym^l V_2(\overline{\mathbb{Q}})$:

$$(X_1^{m_1} \dots X_g^{m_g} Y_1^{n_1} \dots Y_g^{n_g})_{(m_1, \dots, m_g, n_1, \dots, n_g)}$$

indexée par les $2g$ -uplets d'entiers positifs $(m_1, \dots, m_g, n_1, \dots, n_g)$ tels que :

$$m_1 + \dots + m_g + n_1 + \dots + n_g = l.$$

Soit $w_i = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in W_1^i$. Alors, $w_i \cdot X_i = X_i$ et $w_i \cdot Y_i = \alpha_i X_i + Y_i$.

Un calcul montre alors que :

$$H_0(W_1(\overline{\mathbb{Q}}), Sym^l V_2(\overline{\mathbb{Q}})) = Sym^l V_2(\overline{\mathbb{Q}}) / \langle \{X_1^{m_1} \dots X_g^{m_g} Y_1^{n_1} \dots Y_g^{n_g} / \exists i \text{ tel que } m_i \neq 0\} \rangle_{\overline{\mathbb{Q}}}.$$

ii) Calcul de $H^{g-1}(\overline{H_C}, (Sym^l V_2(\overline{\mathbb{Q}}) / \langle \{X_1^{m_1} \dots X_g^{m_g} Y_1^{n_1} \dots Y_g^{n_g} / \exists i \text{ tel que } m_i \neq 0\} \rangle_{\overline{\mathbb{Q}}}) \otimes \chi^g)$.

Tout d'abord, $\overline{H_C}$ n'agit ni sur χ^g (les éléments de $\overline{H_C}$ sont de déterminant 1) ni sur $\overset{g}{\wedge}(Lie W_1)^{\vee}$ (une unité est de norme 1). Le groupe $\overline{H_C}$ étant isomorphe à \mathbb{Z}^{g-1} , en prenant une résolution de Koszul, on obtient un isomorphisme entre :

$$H^{g-1}(\overline{H_C}, (Sym^l V_2(\overline{\mathbb{Q}}) / \langle \{X_1^{m_1} \dots X_g^{m_g} Y_1^{n_1} \dots Y_g^{n_g} / \exists i \text{ tel que } m_i \neq 0\} \rangle_{\overline{\mathbb{Q}}}))$$

et

$$H_0(\overline{H_C}, (Sym^l V_2(\overline{\mathbb{Q}}) / \langle \{X_1^{m_1} \dots X_g^{m_g} Y_1^{n_1} \dots Y_g^{n_g} / \exists i \text{ tel que } m_i \neq 0\} \rangle_{\overline{\mathbb{Q}}}))$$

Soient (n_1, \dots, n_g) un g -uplet d'entiers positifs tels que :

$$n_1 + \dots + n_g = l$$

et

$$h = \left[\begin{pmatrix} \varepsilon & * \\ 0 & \varepsilon^{-1} \end{pmatrix} \right] \in \overline{H_C}$$

alors,

$$h.[Y_1^{n_1}..Y_g^{n_g}] = [\sigma_1(\varepsilon^{-1})^{n_1}..\sigma_g(\varepsilon^{-1})^{n_g}Y_1^{n_1}..Y_g^{n_g}].$$

On remarque que si les n_i ne sont pas tous égaux, alors il existe $\varepsilon \in \mathcal{O}_{L,N}^\times$ tel que :

$$\sigma_1(\varepsilon^{-1})^{n_1}..\sigma_g(\varepsilon^{-1})^{n_g} \neq 1.$$

Ceci peut se voir en utilisant une \mathbb{Z} -base (u_1, \dots, u_{g-1}) de $\mathcal{O}_{L,N}^\times$ et le résultat de théorie des nombres classique qui affirme que :

$$\det \begin{pmatrix} \log|\sigma_1(u_1)| & \dots & \log|\sigma_{g-1}(u_1)| \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \log|\sigma_1(u_{g-1})| & \dots & \log|\sigma_{g-1}(u_{g-1})| \end{pmatrix} \neq 0.$$

iii) Conclusion

On rassemble les résultats précédents. On définit V comme suit :

. V est le sous-espace de $Sym^l V_2(\overline{\mathbb{Q}})$ engendré par les $X_1^{m_1}..X_g^{m_g}Y_1^{n_1}..Y_g^{n_g}$ tels que

$$(n_1, \dots, n_g) \neq (\lambda, \dots, \lambda)$$

si g divise l , $l = \lambda g$.

. $V = Sym^l V_2(\overline{\mathbb{Q}})$ et si g ne divise pas l .

On a prouvé que :

$$H^{2g-1-d_B} i_{\infty}^* j_* Sym^l \mathcal{H}(d) \otimes_{\mathbb{Q}} \overline{\mathbb{Q}} = Sym^l V_2(\overline{\mathbb{Q}})/V \otimes \mathring{\wedge}^g (Lie W_1)^\vee \otimes \chi^g.$$

L'action de G_1 sur $(Lie W_1)^\vee \otimes \chi^g$ et sur $Sym^l V_2(\overline{\mathbb{Q}})/V$ est triviale. Enfin,

$$\dim_{\overline{\mathbb{Q}}} Sym^l V_2(\overline{\mathbb{Q}})/V = \begin{cases} 1 & \text{si } g \text{ divise } l, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

□

Remarque 9.3.6 – Soit $l \in \mathbb{N}$ tel que g divise l , $l = \lambda g$. Le quotient V de $Sym^l V_2(\overline{\mathbb{Q}})$ est engendré par la classe

$$[Y_1^\lambda .. Y_g^\lambda]$$

et est défini sur \mathbb{Q} .

9.3.3 Rigidité pour la dégénérescence

On suppose ici que g divise l . De façon analogue à la construction de \overline{val}_x^l (cf 8.1), étant donnée la construction de val_x^l , on construit une version topologique du résidu, notée \overline{Res}_∞^l qui s'insère dans le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
Ext_{MHM_{\mathbb{Q}}(B^0)}^{2g-1}((\mathbb{Q}(0)_{B^0}^V)^\iota, (Sym^l \mathcal{H}(g))^\iota) & \xrightarrow{For} & H^{2g-1}(\overline{B^0}, \overline{Sym^l \mathcal{H}(g)}) \\
\downarrow Res_\infty^l & & \downarrow \overline{Res}_\infty^l \\
Hom_{SHM_{\mathbb{Q}}}(\mathbb{Q}(0), H^{g-1} i_\infty^* j_* (Sym^l \mathcal{H}(g))^\iota) & \xrightarrow{For} & H^{2g-1}(\{\infty\}, \overline{i_\infty^* j_* Sym^l \mathcal{H}(g)}) \\
\parallel \text{ (cf prop. 9.3.5)} & & \parallel \text{ (cf prop. 9.3.5)} \\
Hom_{SHM_{\mathbb{Q}}}(\mathbb{Q}(0), \mathbb{Q}(0)) & \xrightarrow{For} & \mathbb{Q}
\end{array}$$

On peut donner l'interprétation suivante de la commutativité de ce diagramme.

Proposition 9.3.7 – *Étant donnée une classe c dans $Ext_{MHM_{\mathbb{Q}}(B^0)}^{2g-1}((\mathbb{Q}(0)_{B^0}^V)^\iota, (Sym^l \mathcal{H}(g))^\iota)$, la détermination de $\overline{Res}_\infty^l \circ For(c)$ suffit pour connaître $Res_\infty^l(c)$.*

9.4 Calcul des courants de Levin

9.4.1 Données géométriques

Notation 9.4.1 – *Les plongements $(\sigma_k)_{1 \leq k \leq g}$ induisent un isomorphisme*

$$L \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^g.$$

Pour $x \in L \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$, on note (x_1, \dots, x_g) l'image de x sous ce morphisme.

On fait agir le groupe $\Pi := \mathcal{D}_L^{-1} \oplus \mathcal{O}_L$ sur $\mathbb{C}^g \times \mathfrak{X}^+$ par :

$$\begin{aligned}
(\mathcal{D}_L^{-1} \oplus \mathcal{O}_L) \times (\mathbb{C}^g \times \mathfrak{X}^+) &\rightarrow (\mathbb{C}^g \times \mathfrak{X}^+) \\
((a, b), (\underline{z}, \underline{\tau})) &\mapsto ((a_k + b_k \tau_k + z_k)_{1 \leq k \leq g}, \overline{\tau}).
\end{aligned}$$

Le pullback de la famille de variétés abéliennes $p : \Lambda'_N \setminus \mathfrak{X}^+ \rightarrow B^0$ sous la projection canonique $\mathfrak{X}^+ \rightarrow B^0$ est :

$$q : (\Pi \setminus \mathbb{C}^g \times \mathfrak{X}^+) =: A' \rightarrow \mathfrak{X}^+.$$

Pour tout $\underline{\tau} \in \mathfrak{X}^+$, on note $\varphi_{\underline{\tau}}$ l'isomorphisme :

$$\begin{aligned}
\varphi_{\underline{\tau}} : \quad \Pi &\rightarrow \mathbb{C}^g \\
(a, b) &\mapsto (a_k + b_k \tau_k)_{1 \leq k \leq g}
\end{aligned}$$

et $\Pi_{\underline{\tau}}$ l'image de Π sous $\varphi_{\underline{\tau}}$. Alors $A'_{\underline{\tau}}$, la fibre de q en $\underline{\tau}$, est $\mathbb{C}^g / \Pi_{\underline{\tau}}$. On note tr_L la trace de L à \mathbb{Q} et $\langle *, * \rangle$ le morphisme :

$$\begin{aligned}
\langle *, * \rangle : \quad \Pi \wedge \Pi &\rightarrow 2\pi i \mathbb{Z} \\
(a, b) \wedge (a', b') &\mapsto 2\pi i tr_L(ab' - a'b).
\end{aligned}$$

Pour $\underline{\tau} \in \mathfrak{X}^+$, $\langle *, * \rangle$ induit, via $\varphi_{\underline{\tau}}$, une polarisation principale sur $A'_{\underline{\tau}}$.

On a un isomorphisme de $(\mathfrak{X}^+)^{\infty}$ -tores :

$$\begin{aligned} \varphi : \Pi_{\mathbb{R}}/\Pi \times (\mathfrak{X}^+)^{\infty} &\rightarrow (A')^{\infty} \\ ((a, b), \underline{\mathcal{I}}) &\mapsto [((a_k + b_k \tau_k)_{1 \leq k \leq g}, \underline{\mathcal{I}})] \end{aligned}$$

grâce auquel on identifie $R^1 \bar{p}_* \mathbb{Z}$ et le faisceau constant associé à Π . On vérifie alors que le morphisme $\langle *, * \rangle$ est un morphisme dans $VSH_{\mathbb{Z}}^{-2}(\mathfrak{X}^+)$.

On fixe (a_1, \dots, a_g) une \mathbb{Z} -base de \mathcal{D}_L^{-1} et on note (b_1, \dots, b_g) sa base duale relativement à la trace ; c'est une \mathbb{Z} -base de \mathcal{O}_L .

Notations 9.4.2 –

i) Soit $\underline{z} \in \mathbb{C}^g$. On note $D(\underline{z})$ la matrice diagonale $g \times g$ dont la diagonale est (z_1, \dots, z_g) et

$$\overline{(\underline{z})} := (\overline{z_1}, \dots, \overline{z_g}).$$

ii) On introduit les deux matrices $g \times g$:

$$A := (\sigma_j(a_k))_{1 \leq j, k \leq g} \text{ et } B := (\sigma_j(b_k))_{1 \leq j, k \leq g}.$$

iii) Pour $\underline{\mathcal{I}} \in \mathfrak{X}^+$, on note :

$$T_{\underline{\mathcal{I}}} := (t_1, \dots, t_g) := ((\tau_1 - \overline{\tau_1})^{-1}, \dots, (\tau_g - \overline{\tau_g})^{-1}).$$

Convention 9.4.3 – Pour un temps, les éléments de $\Pi_{\mathbb{R}}$ sont notés sous la forme d'un vecteur colonne réel $2g$ -dimensionnel

$$\begin{pmatrix} v_a \\ v_b \end{pmatrix}$$

où v_a (resp. v_b) est un vecteur réel colonne g -dimensionnel représentant des coordonnées dans la base (a_1, \dots, a_g) (resp. (b_1, \dots, b_g)), de même pour les éléments de $\Pi_{\mathbb{C}}$.

L'inverse de φ est donné par :

$$\begin{aligned} \varphi^{-1} : (A')^{\infty} &\rightarrow \Pi_{\mathbb{R}}/\Pi \times (\mathfrak{X}^+)^{\infty} \\ [(\underline{z}, \underline{\mathcal{I}})] &\mapsto \left(\begin{pmatrix} -A^{-1}D(T_{\underline{\mathcal{I}}})D(\overline{(\underline{z})}) & A^{-1}D(T_{\underline{\mathcal{I}}})D(\underline{\mathcal{I}}) \\ B^{-1}D(T_{\underline{\mathcal{I}}}) & -B^{-1}D(T_{\underline{\mathcal{I}}}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{z}^t \\ \overline{(\underline{z})}^t \end{pmatrix}, \underline{\mathcal{I}} \right). \end{aligned}$$

Dans la suite de cette partie, on explicite les formes différentielles de Levin (cf 7.2) pour la famille $q : (\Pi \setminus \mathbb{C}^g \times \mathfrak{X}^+) =: A' \rightarrow \mathfrak{X}^+$ (en reprenant les notations de la partie 7.2). Les calculs sont analogues à ceux effectués dans le cas des familles de Siegel.

9.4.2 Décomposition de Hodge

On fixe $\mathcal{I} \in \mathfrak{X}^+$. On note

$$\underline{u}_{\mathcal{I}} := (u_{\mathcal{I},1}, \dots, u_{\mathcal{I},g}) \quad (\text{resp. } \overline{(\underline{u})}_{\mathcal{I}} := \overline{u}_{\mathcal{I},1}, \dots, \overline{u}_{\mathcal{I},g})$$

la base duale de

$$\underline{dz} := (dz_1, \dots, dz_g) \quad (\text{resp. } \overline{(\underline{dz})} := (d\overline{z}_1, \dots, d\overline{z}_g))$$

des formes holomorphes (resp. antiholomorphes) de $A'_{\mathcal{I}}$. On a l'expression suivante de ces vecteurs dans $\Pi_{\mathbb{C}}$:

$$\begin{pmatrix} \underline{u}_{\mathcal{I}} & \overline{(\underline{u})}_{\mathcal{I}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -A^{-1}D(T_{\mathcal{I}})D(\overline{(\underline{\tau})}) & A^{-1}D(T_{\mathcal{I}})D(\underline{\tau}) \\ B^{-1}D(T_{\mathcal{I}}) & -B^{-1}D(T_{\mathcal{I}}) \end{pmatrix}.$$

Convention 9.4.4 – On abandonne la convention 9.4.3. Donc, par $(c, d) \in \Pi$, on entend $c \in \mathcal{D}_L^{-1}$, $d \in \mathcal{O}_L$. De plus, $(c_1, \dots, c_g) = (\sigma_i(c))_{1 \leq i \leq g}$ et $(d_1, \dots, d_g) = (\sigma_i(d))_{1 \leq i \leq g}$.

Soit $\gamma = (c, d) \in \Pi$ vu comme section de $\overline{R^1 p_* \mathbb{Z}(0)}$. La décomposition de Hodge de γ est donnée par :

$$\begin{aligned} \gamma^{-1,0} : (A')^{\infty} &\rightarrow (q^{\infty})^* E^{-1,0} \\ &[(z, \mathcal{I})] \mapsto \left([(z, \mathcal{I})], \sum_{k=1}^g (c_k + d_k \tau_k) u_{\mathcal{I},k} \right) \\ \gamma^{0,-1} : (A')^{\infty} &\rightarrow (q^{\infty})^* E^{0,-1} \\ &[(z, \mathcal{I})] \mapsto \left([(z, \mathcal{I})], \sum_{k=1}^g (c_k + d_k \overline{\tau}_k) \overline{u}_{\mathcal{I},k} \right). \end{aligned}$$

9.4.3 Champ de vecteurs et forme de polarisation

Soit $\gamma = (c, d) \in \Pi$. On vérifie que le champ de vecteurs associé à $\gamma^{-1,0}$ est :

$$\gamma^{-1,0} = \sum_{k=1}^g (c_k + d_k \tau_k) \partial_{z_k}$$

et que celui associé à $\gamma^{-1,0}$ est :

$$\gamma^{0,-1} = \sum_{k=1}^g (c_k + d_k \overline{\tau}_k) \partial_{\overline{z}_k}.$$

Au prix d'un calcul faisant intervenir l'expression de φ^{-1} , on montre que :

$$\nu = (\underline{dz} - (z - \overline{z}) D(T_{\mathcal{I}}) D(\underline{d\tau})) (\overline{u})^t + (\overline{(\underline{dz})} - (\overline{z} - z) D(T_{\mathcal{I}}) D(\overline{d\tau})) (\overline{(\underline{u})})^t$$

où

- . $D(\underline{d\tau})$ est la matrice diagonale de 1-formes différentielles dont la diagonale est $(d\tau_1, \dots, d\tau_g)$,
- . $D(\overline{(\underline{d\tau})})$ est la matrice diagonale de 1-formes différentielles dont la diagonale est $(d\overline{\tau_1}, \dots, d\overline{\tau_g})$,
- . \overline{u} et (\underline{u}) sont les g -uplets de sections de $(q^\infty)^*E_{\mathbb{C}}$:

$$\overline{u} : [z, \tau] \mapsto \underline{u}_{\tau} \text{ et } (\underline{u}) : [z, \tau] \mapsto \overline{(\underline{u})}_{\tau}.$$

Soit $\tau \in \mathfrak{X}^+$. La matrice de Gram de l'accouplement $\langle *, * \rangle_{\mathbb{C}}$ (extension de Π à $\Pi_{\mathbb{C}}$ de l'accouplement $\langle *, * \rangle$ par linéarité) dans la base $(\underline{u}_{\tau}, \overline{(\underline{u})}_{\tau})$ est :

$$\langle \underline{u}_{\tau}, (\overline{(\underline{u})}_{\tau})^t \rangle_{\mathbb{C}} = -2\pi i T_{\tau}.$$

La forme de polarisation ω est donc :

$$\omega = -2\pi i \sum_{i=1}^g \underbrace{(dz_i - t_i(z_i - \overline{z_i})d\tau_i)}_{\eta_i^1} \wedge \underbrace{(t_i(d\overline{z_i} - \overline{t_i}(z_i - \overline{z_i})d\overline{\tau_i}))}_{\eta_i^2}.$$

9.4.4 Les formes différentielles de Levin

Soient $\gamma = (c, d) \in \Pi - \{0\}$ et $a \in \mathbb{N}^*$. On écrit maintenant les deux derniers éléments qui composent la forme $g'_{a,\gamma}$.

Soit $\tau \in \mathfrak{X}^+$. Le morphisme φ_{τ} induit un isomorphisme de \mathbb{R} -vectoriels :

$$\varphi_{\tau, \mathbb{R}} : \Pi_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{C}^g.$$

En passant au quotient, on a un isomorphisme de tores réels :

$$\overline{\varphi_{\tau, \mathbb{R}}} : \Pi_{\mathbb{R}}/\Pi \rightarrow (A'_{\tau})^{\infty}.$$

Alors χ_{γ} est la fonction :

$$\begin{aligned} (A')^{\infty} &\rightarrow \mathbb{C} \\ [z, \tau] &\mapsto \exp \langle \gamma, \overline{\varphi_{\tau, \mathbb{R}}}^{-1}(z) \rangle_{\mathbb{R}} \end{aligned}$$

où $\langle *, * \rangle_{\mathbb{R}}$ est le prolongement par linéarité de $\langle *, * \rangle$. Enfin, $\rho(\gamma) = \langle \gamma^{-1,0}, \gamma^{0,-1} \rangle_{\mathbb{C}}$ vaut :

$$-2\pi i \sum_{k=1}^g t_k |c_k + d_k \tau_k|^2.$$

Il reste à calculer les dérivées de Lie successives de vol suivant le champ de vecteurs $\gamma^{-1,0}$ et l'effet du produit intérieur par le champ de vecteurs $\gamma^{0,-1}$.

1. Dérivées de Lie successives

On rappelle le début du calcul effectué dans le cas de la famille de Siegel et les notations introduites. Alors, on a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{(\rho(\gamma) - L_{\gamma^{-1},0})^a} \left(\sum_{i=1}^g \eta_i^1 \wedge \eta_i^2 \right)^g &= \sum_{n=0}^{2g} \frac{C_{n+a-1}^n}{\rho(\gamma)^{a+n}} L_{\gamma^{-1},0}^n \left(\sum_{i=1}^g \eta_i^1 \wedge \eta_i^2 \right)^g \\ &= \sum_{n=0}^{2g} \frac{g! C_{n+a-1}^n}{\rho(\gamma)^{a+n}} L_{\gamma^{-1},0}^n (\eta_1^1 \wedge \eta_1^2 \wedge \dots \wedge \eta_g^1 \wedge \eta_g^2). \end{aligned}$$

Soit n , $0 \leq n \leq 2g$, on note \mathcal{L}_n l'ensemble

$$\{(L_1, \dots, L_{2g}) \in \{Id, L_{\gamma^{-1},0}\}^{2g} / \text{Card}(\{k, 1 \leq k \leq 2g / L_k = L_{\gamma^{-1},0}\}) = n\}.$$

Puisque $L_{\gamma^{-1},0}^2 \eta^1 = L_{\gamma^{-1},0}^2 \eta^2 = 0$, on a :

$$L_{\gamma^{-1},0}^n (\eta^1 \wedge \eta^2)^g = n! \sum_{(L_1, \dots, L_{2g}) \in \mathcal{L}_n} L_1 \eta_1^1 \wedge L_2 \eta_1^2 \wedge \dots \wedge L_{2g-1} \eta_g^1 \wedge L_{2g} \eta_g^2.$$

On vérifie alors que pour tout k , $1 \leq k \leq g$:

$$L_{\gamma^{-1},0} \eta_k^1 = -t_k(c_k + d_k \overline{\tau_k}) d\tau_k \text{ et } L_{\gamma^{-1},0} \eta_k^2 = -t_k^2(c_k + d_k \tau_k) d\overline{\tau_k}.$$

2. Effet du produit intérieur

Soient n , $0 \leq n \leq 2g$ et $(L_1, \dots, L_{2g}) \in \mathcal{L}_n$:

$$\begin{aligned} i_{\gamma^0,-1} L_1 \eta_1^1 \wedge L_2 \eta_1^2 \wedge \dots \wedge L_{2g-1} \eta_g^1 \wedge L_{2g} \eta_g^2 &= (i_{\gamma^0,-1} L_1 \eta_1^1) \wedge L_2 \eta_1^2 \wedge \dots \wedge L_{2g-1} \eta_g^1 \wedge L_{2g} \eta_g^2 \\ &- (i_{\gamma^0,-1} L_2 \eta_1^2) L_1 \eta_1^1 \wedge L_3 \eta_2^1 \wedge \dots \wedge L_{2g-1} \eta_g^1 \wedge L_{2g} \eta_g^2 \\ &+ \dots \\ &- (i_{\gamma^0,-1} L_{2g} \eta_g^2) L_1 \eta_1^1 \wedge L_2 \eta_1^2 \wedge \dots \wedge L_{2g-1} \eta_g^1. \end{aligned}$$

De plus, pour tout k , $1 \leq k \leq g$:

$$i_{\gamma^0,-1} \eta_k^2 = t_k(c_k + d_k \overline{\tau_k}) \text{ et } i_{\gamma^0,-1} \eta_k^1 = i_{\gamma^0,-1} L_{\gamma^{-1},0} \eta_k^1 = i_{\gamma^0,-1} L_{\gamma^{-1},0} \eta_k^2 = 0.$$

9.5 Calcul des valeurs de polylogarithme en un point de torsion

On fixe $a' \in N^{-1}\mathcal{D}_L^{-1}$, $b' \in N^{-1}\mathcal{O}_L$ avec $b' \neq 0$.

Soit $\overline{x_{a',b'}}$ le point de N -torsion défini par :

$$\begin{aligned} B^0 &\rightarrow \Lambda_N \setminus \mathcal{X}^{'+} \\ [\mathcal{I}] &\mapsto [(a'_k + b'_k \tau_k)_{1 \leq k \leq g}, \mathcal{I}]. \end{aligned}$$

Fait 9.5.1 – Ce morphisme vient d'un morphisme algébrique noté $x_{a',b'}$.

Convention 9.5.2 – On fait l'abus de langage qui consiste à noter aussi $\overline{x_{a',b'}}$ le point de N -torsion de $q : A' \rightarrow \mathfrak{X}^+$ défini par :

$$\begin{aligned} \mathfrak{X}^+ &\rightarrow A'+ \\ \mathcal{I} &\mapsto [(a'_k + b'_k \tau_k)_{1 \leq k \leq g}, \mathcal{I}] \end{aligned}$$

On considère à nouveau la famille $q : A' \rightarrow \mathfrak{X}^+$ pour laquelle on a calculé les courants de Levin et on note U le complémentaire de sa section unité. D'après le corollaire 7.5.4, le morphisme de Levin en restriction à U est défini par des formes différentielles. Le pullback de formes différentielles étant bien défini, on peut, a priori, calculer

$$\overline{val^l_{x_{a',b'}, \mathbb{C}}([\mathcal{P}|_U])}$$

pour tout $l \geq 1$. Toutefois, pour les valeurs de l inférieures à $2g$, les séries de formes différentielles ne convergent pas, a priori, vers une forme différentielle. Aussi ne dispose-t-on pas de formule explicite pour $\overline{val^l_{x_{a',b'}, \mathbb{C}}([\mathcal{P}|_U])}$ pour les valeurs de $l \leq 2g$. D'après la proposition 9.3.5, seules manquent trois valeurs.

On fixe $l > 2g$ tel que g divise l , $l = \lambda g$. Dans ce cas, la série de formes différentielles

$$\sum_{\gamma \in \Pi - \{0\}} g'_{l+1, \gamma}$$

converge uniformément vers une forme différentielle. Alors, on obtient après calcul :

$$\overline{val^l_{x_{a',b'}, \mathbb{C}}([\mathcal{P}|_U])} = (2g + l) l! \sum_{\gamma \in \Pi - \{0\}} \overline{x_{a',b'}^*} g'_{l+1, \gamma}$$

À l'aide des relations suivantes, valables pour tout k , $1 \leq k \leq g$, où $\gamma \in \mathcal{D}_L^{-1} \oplus \mathcal{O}_L$ est noté (c, d) :

$$\begin{aligned} \overline{x_{a',b'}^*} \eta_k^1 &= 0, \\ \overline{x_{a',b'}^*} \eta_k^2 &= 0, \\ \overline{x_{a',b'}^*} L_{\gamma^{-1,0}} \eta_k^1 &= -t_k (c_k + d_k \overline{\tau_k}) d\tau_k, \\ \overline{x_{a',b'}^*} L_{\gamma^{-1,0}} \eta_k^2 &= -t_k^2 (c_k + d_k \tau_k) d\overline{\tau_k}, \\ \overline{x_{a',b'}^*} i_{\gamma^{0,-1}} \eta_k^2 &= t_k (c_k + d_k \overline{\tau_k}). \end{aligned}$$

et des calculs effectués en 9.4.4, on trouve :

$$\overline{x_{a',b'}^*} \frac{1}{(\rho(\gamma) - L_{\gamma^{-1,0}})^{l+1}} \left(\sum_{i=1}^g \eta_i^1 \wedge \eta_i^2 \right)^g = \frac{g! C_{2g+l-1}^{2g-1} (2g-1)!}{\rho(\gamma)^{l+2g}} \sum_{k=1}^g \nu_k$$

avec

$$\nu_k = t_k^2 (c_k + d_k \overline{\tau_k})^2 \left(\prod_{j \neq k} t_j^3 |c_j + d_j \tau_j|^2 \right) d\tau_1 \wedge d\overline{\tau_1} \wedge \dots \wedge d\tau_k \wedge \widehat{d\overline{\tau_k}} \wedge \dots \wedge d\tau_g \wedge d\overline{\tau_g}.$$

En effet, seule reste la contribution de :

$$i_{\gamma^{0,-1}} L_{\gamma^{-1,0}}^{2g-1} \omega^g.$$

On a également

$$\overline{x_{a',b'}}^* \chi_\gamma = \exp(\langle \gamma, (a', b') \rangle).$$

De plus, on a explicité $\gamma^{-1,0}$ relativement à la base \overline{u}_T , mais aussi, la base \overline{u}_T relativement à une \mathbb{Z} -base de $\mathcal{O}_L \mathcal{D}_L^{-1} \oplus \mathcal{O}_L$. On en déduit l'expression de $\gamma^{-1,0}$ dans $\mathbb{C}^g \oplus \mathbb{C}^g$, via l'isomorphisme induit par les plongements $(\sigma_k)_{1 \leq k \leq g} : (\mathcal{D}_L^{-1} \oplus \mathcal{O}_L) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}^g \oplus \mathbb{C}^g$.

$$\gamma^{-1,0} = ((-t_k \overline{\tau}_k (c_k + d_k \tau_k))_{1 \leq k \leq g}, (t_k (c_k + d_k \tau_k))_{1 \leq k \leq g}).$$

On note $pr_{res} : Sym^l(\mathbb{C}^g \oplus \mathbb{C}^g) \rightarrow \mathbb{C}$ la projection qui correspond au niveau complexe à la projection de

$$Sym^l V_2 \rightarrow V$$

introduite précédemment (cf Rem 9.3.6).

Fait 9.5.3 – On a $\overline{Res}_\infty^l \otimes_{\mathbb{Q}} Id_{\mathbb{C}}$ est donné par :

$$\begin{aligned} \overline{Res}_\infty^l \otimes_{\mathbb{Q}} Id_{\mathbb{C}} : H^{2g-1}(B^0, (Sym^l \mathcal{H}(g))_{\mathbb{C}}) &\rightarrow \mathbb{C} \\ [\theta \otimes [v_1 \otimes \dots \otimes v_l]] &\mapsto \left(\frac{1}{(2\pi i)^g} \int_{\Lambda_{N,\infty} \setminus D_r} \theta \right) \times pr_{res}([v_1 \otimes \dots \otimes v_l]). \end{aligned}$$

où $D_r := \{\overline{\tau} \in \mathfrak{X}^+ / \prod_{k=1}^g \Im \tau_k = r\}$ pour $r \gg 0$. Ce morphisme respecte les structures rationnelles sous-jacentes.

Dans la suite de ce paragraphe, on calcule :

$$\begin{aligned} For(Res_\infty^l([\overline{x_{a',b'}}^* Pol]^l)) &= \overline{Res}_\infty^l \otimes_{\mathbb{Q}} Id_{\mathbb{C}}(\overline{val}_{x_{a',b'}, \mathbb{C}}^l([\mathcal{P}|U])) \\ &= (2g+l)! \sum_{\gamma \in \Pi - \{0\}} \overline{Res}_\infty^l \otimes_{\mathbb{Q}} Id_{\mathbb{C}}(\overline{x_{a',b'}}^* g'_{l+1, \gamma}). \end{aligned}$$

On rassemble les différents résultats des calculs antérieurs :

$$\sum_{\gamma \in \Pi - \{0\}} \overline{Res}_\infty^l \otimes_{\mathbb{Q}} Id_{\mathbb{C}}(\overline{x_{a',b'}}^* g'_{l+1, \gamma}) = (2g+l-1)! (2g+l) \sum_{k=1}^g \sum_{\gamma=(c,d) \in \Pi - \{0\}} \exp(\langle (c, d), (a', b') \rangle) I_{c,d,k}$$

où

$$I_{c,d,k} = \int_{D_r / \Gamma_{N,\infty}} \frac{\prod_{j=1}^g t_j^\lambda (c_j + d_j \tau_j)^\lambda}{(\sum_{j=0}^g 2\pi i t_j |c_j + d_j \tau_j|^2)^{l+2g}} \nu_k$$

avec

$$\nu_k = t_k^2 (c_k + d_k \overline{\tau}_k)^2 \left(\prod_{j \neq k} t_j^3 |c_j + d_j \tau_j|^2 \right) d\tau_1 \wedge d\overline{\tau}_1 \wedge \dots \wedge d\tau_k \wedge d\widehat{\tau}_k \wedge \dots \wedge d\tau_g \wedge d\overline{\tau}_g$$

Étape 1 : Calcul du terme $I_{1,k}$ défini par :

$$I_{1,k} := \sum_{d \in \mathcal{O}_L - \{0\}} \sum_{c \in \mathcal{D}_L^{-1}} \exp(\langle (c, d), (a', b') \rangle) I_{c,d,k}$$

i) Dans $I_{c,d,k}$, on peut faire ($d \neq 0$) le changement de variables

$$\tau'_j = \tau_j + \frac{c_j}{d_j}, \text{ pour } 1 \leq j \leq g$$

pour observer que $I_{c,d} = I_{0,d}$.

ii) Comme $b' \neq 0$ et que la trace est non dégénérée, il existe $c \in \mathcal{O}_L$ tel que :

$$\text{tr}_L(cb') \neq 0$$

De i) et ii), on déduit que $I_{1,k} = 0$.

Étape 2 : Simplification du calcul de

$$I_{2,k} := \sum_{c \in \mathcal{D}_L^{-1} - \{0\}} \exp(2\pi i \text{tr}_L(cb')) I_{a,0,k}$$

On ne calcule que $I_{2,k}$ que pour $k = 1$ (même méthode pour les autres valeurs de k) et on peut supposer $r = 1$. De nombreuses simplifications apparaissent lorsque $b = 0$ dans $I_{c,d,k}$. On note N_L la norme de L à \mathbb{Q} et $\tau_k = x_k + iy_k$. On a :

$$I_{2,k} = \sum_{c \in \mathcal{D}_L^{-1} - \{0\}} \exp(2\pi i \text{tr}_L(cb')) \frac{N_L(c)^{\lambda+2}}{(2\pi i)^{(\lambda+2)g}} J_c$$

où

$$J_c = \int_{D_r/\Gamma_{N,\infty}} \frac{1}{\left(\sum_{j=0}^g \frac{|c_j|^2}{y_j}\right)^{(\lambda+2)g}} (dx_1 + idy_1) dx_2 \frac{dy_2}{y_2} \dots dx_g \frac{dy_g}{y_g}$$

De la relation $y_1 \dots y_g = 1$ vérifiée par $\underline{z} \in D_1$, on déduit :

$$J_c = \int_{D_r/\Gamma_{N,\infty}} \frac{1}{\left(\sum_{j=0}^g \frac{|c_j|^2}{y_j}\right)^{(\lambda+2)g}} dx_1 dx_2 \frac{dy_2}{y_2} \dots dx_g \frac{dy_g}{y_g}$$

On a alors :

$$\begin{aligned}
 I_{2,k} &= \sum_{c \in \mathcal{D}_L^{-1} - \{0\}} \exp(2\pi i \operatorname{tr}_L(cb')) \frac{(-1)^g N_L(c)^{\lambda+2}}{(2\pi i)^{(\lambda+2)g}} \\
 &\times \int_{D_r/\Gamma_{N,\infty}} \frac{1}{\left(\sum_{j=0}^g \frac{|c_j|^2}{y_j}\right)^{(\lambda+2)g}} dx_1 dx_2 \dots dx_g \frac{dy_2}{y_2} \dots \frac{dy_g}{y_g} \\
 &= \sum_{c \in (\mathcal{D}_L^{-1} - \{0\})/\mathcal{O}_{L,N}^\times} \frac{(-1)^g \exp(2\pi i \operatorname{tr}_L(cb')) N_L(c)^{\lambda+2}}{(2\pi i)^{(\lambda+2)g}} \\
 &\times \sum_{\varepsilon \in \mathcal{O}_{L,N}^\times} \int_{D_r/\Gamma_{N,\infty}} \frac{1}{\left(\sum_{j=0}^g \frac{|\varepsilon_j c_j|^2}{y_j}\right)^{(\lambda+2)g}} dx_1 dx_2 \dots dx_g \frac{dy_2}{y_2} \dots \frac{dy_g}{y_g} \\
 &= \sum_{c \in (\mathcal{D}_L^{-1})/\mathcal{O}_{L,N}^\times} \frac{(-1)^g \exp(2\pi i \operatorname{tr}_L(cb')) N_L(c)^{\lambda+2}}{(2\pi i)^{(\lambda+2)g}} \operatorname{vol}(N\mathcal{O}_L) K_c
 \end{aligned}$$

où

$$K_c = \int_{(\mathbb{R}^{+*})^{g-1}} \frac{1}{\left(\sum_{j=0}^g \frac{|c_j|^2}{y_j}\right)^{(\lambda+2)g}} \frac{dy_2}{y_2} \dots \frac{dy_g}{y_g}$$

Pour établir la dernière égalité, on utilise [F-Lem 2.10₁].

Étape 3 : Calcul de K_c

On calcule en fait $\Gamma(2g+l)K_c$.

$$\Gamma(2g+l)K_c = \int_{(\mathbb{R}^{+*})^g} u^{2g+l} \exp(-u(y_2 \dots y_g c_1^2 + \frac{c_2^2}{y_2} + \dots + \frac{c_g^2}{y_g})) \frac{du}{u} \frac{dy_2}{y_2} \dots \frac{dy_g}{y_g}$$

On effectue ensuite le changement de variables :

$$\begin{aligned}
 u_1 &= u t_2 \dots t_g \\
 u_2 &= u/y_2 \\
 &\dots \\
 u_g &= u/t_g
 \end{aligned}$$

et on trouve :

$$\begin{aligned}
 \Gamma(2g+l)K_c &= \left(\int_{\mathbb{R}^{+*}} u_1^{\lambda+2} \exp(-c_1^2 u_1) \frac{du_1}{u_1} \right) \times \dots \times \left(\int_{\mathbb{R}^{+*}} u_g^{\lambda+2} \exp(-c_g^2 u_g) \frac{du_g}{u_g} \right) \\
 &= \frac{\Gamma(\lambda+2)^g}{N(c)^{2(\lambda+2)}}
 \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi } K_c = \frac{((\lambda+1)!)^g}{(2g+l-1)! N(c)^{2(\lambda+2)}}.$$

Notations 9.5.4 –

d_L le discriminant de L à \mathbb{Q} ,

$$\mathcal{L}(\mathcal{D}_L^{-1}, N, \lambda, s) := \sum_{\substack{c \in (\mathcal{D}_L^{-1} - \{0\}) / \mathcal{O}_{L,N}^\times \\ \text{tel que } \Re(s) > 1.}} \frac{\exp(2\pi i \operatorname{tr}_L(\lambda c))}{N_L(c)^s}, \text{ pour } \lambda \in N^{-1}\mathcal{O}_L \text{ et } s \in \mathbb{C}$$

Le calcul que l'on vient de faire donne le théorème suivant.

Théorème 9.5.5 – Pour tout $\lambda \in \mathbb{N}^{\geq 3}$, $a' \in N^{-1}\mathcal{D}_L^{-1}$ et $b' \in N^{-1}\mathcal{O}_L$ non nul :

$$\operatorname{For}(\operatorname{Res}([x_{a',b'}^* \mathcal{P}ol]^{\lambda g})) = \frac{(2 + \lambda) ((\lambda + 1)!)^g g^2 N^g \sqrt{d_L}}{(2\pi i)^{(2+\lambda)g}} \mathcal{L}(\mathcal{D}_L^{-1}, N, b', 2 + \lambda).$$

Ayant pris soin de respecter les structures rationnelles tout au long du calcul, on déduit de ce théorème le cas particulier suivant du théorème de Klingen-Siegel.

Corollaire 9.5.6 – Pour tout $\lambda \in \mathbb{N}^{\geq 5}$ et $b \in N^{-1}\mathcal{O}_L$ non nul :

$$(2\pi i)^{-g\lambda} \sqrt{d_L} \mathcal{L}(\mathcal{D}_L^{-1}, N, b', \lambda) \in \mathbb{Q}.$$

Corollaire 9.5.7 – Si $g \geq 2$, pour tout $\lambda \in \mathbb{N}^{\geq 4}$ pair, $a' \in N^{-1}\mathcal{D}_L^{-1}$, et $b' \in N^{-1}\mathcal{O}_L$ non nul tel que les idéaux entiers (Nb') et (N) sont copremiers, alors on a :

$$[x_{a',b'}^* \mathcal{P}ol]^{\lambda g} \neq 0.$$

Preuve : On prouve que $\operatorname{For}([x_{a',b'}^* \mathcal{P}ol]^{\lambda g}) \neq 0$. On pose $\mathfrak{f} := N\mathcal{O}_L$ et $\mathfrak{b} := Nb'\mathcal{O}_L$. On introduit :

- l'ensemble $\mathcal{E}(\mathfrak{b}, \mathfrak{f})$ des idéaux entiers \mathfrak{g} copremiers à \mathfrak{f} pour lesquels il existe $\mu \in L$ totalement positif et congru à 1 modulo $\mathfrak{f}\mathfrak{b}^{-1}$ tel que :

$$\mathfrak{g}\mathfrak{b}^{-1} = (\mu),$$

- la fonction $\zeta(\mathfrak{b}, \mathfrak{f}, s)$ définie, pour $s \in \mathbb{C}$ tel que $\Re(s) > 1$, par :

$$\zeta(\mathfrak{b}, \mathfrak{f}, s) := \sum_{\mathfrak{g} \in \mathcal{E}(\mathfrak{b}, \mathfrak{f})} N_L(\mathfrak{g})^{-s}.$$

La fonction $\zeta(\mathfrak{b}, \mathfrak{f}, s)$ a un prolongement holomorphe sur $\mathbb{C} - \{1\}$. D'après une équation fonctionnelle pour \mathcal{L} établie par Siegel (cf [Si-(10), p. 102]), on a :

$$\mathcal{L}(\mathcal{D}_L^{-1}, N, b', \lambda + 2) \underset{\mathbb{R}^\times}{\sim} \zeta(\mathfrak{b}, \mathfrak{f}, -\lambda - 1),$$

et, comme λ est pair, $\zeta(\mathfrak{b}, \mathfrak{f}, -\lambda - 1)$ est non nul.

□

Chapitre 10

Perspectives

- . On a obtenu la rationalité des valeurs spéciales de la fonction L du corps de nombres totalement réel introduite au chapitre précédent pour l'inverse de la différente. On peut essayer d'étendre la méthode utilisée à d'autres idéaux.
- . Les courants de Levin sont lisses sur l'ouvert complémentaire de la section unité du schéma abélien. On ne connaît pas leurs singularités le long de la section unité. Si celles-ci étaient de type logarithmique, on pourrait envisager de décrire la réalisation de de Rham du polylogarithme.
- . Dans le cas des familles modulaires de Hilbert-Blumenthal, la réduction du calcul au niveau topologique est motivée par le principe de rigidité vérifié par les classes d'Eisenstein. Si on dispose d'un résultat de ce type pour un schéma abélien, la description topologique du polylogarithme suffit pour calculer la dégénérescence des classes d'Eisenstein. Qu'en est-il pour les familles modulaires de Siegel ? Si l'une vérifie ce principe, le calcul de la dégénérescence de ces classes est a priori plus délicat que dans le contexte étudié ici. En effet, le bord de la compactification de Baily-Borel n'est pas, pour les familles de Siegel non elliptiques, uniquement constitué de points.
- . Pour les familles modulaires de Hilbert-Blumenthal, on peut calculer le résidu des classes d'Eisenstein en toutes les pointes. Soit c une combinaison linéaire de classes d'Eisenstein dont tous les résidus sont nuls. Alors c est dans la cohomologie parabolique. Or, les classes paraboliques d'origine motivique présentent un intérêt particulier. Il faut toutefois trouver de telles c non nulles.
- . Étude de l'aspect p -adique du polylogarithme.

Table des matières

1	Introduction	9
1.1	Construction du polylogarithme	9
1.1.1	Variations de structures de Hodge et modules de Hodge	9
1.1.2	Le logarithme	11
1.1.3	Images directes supérieures du logarithme	13
1.1.4	Le polylogarithme	14
1.2	Énoncé du problème 1	14
1.3	Réponse apportée au problème 1	15
1.3.1	Principe de rigidité du polylogarithme	15
1.3.2	Construction d'un candidat à l'aide des courants de Levin	16
1.3.3	Énoncé du résultat 1	16
1.4	Définition des valeurs du polylogarithme en un point de torsion	16
1.4.1	Principe de scindage	17
1.4.2	Contractions	17
1.4.3	Les valeurs du polylogarithme en un point de torsion	17
1.5	Énoncé du problème 2	17
1.6	Réponse apportée au problème 2	18
1.6.1	Données géométriques	18
1.6.2	Description du polylogarithme	19
1.6.3	Détermination des classes d'Eisenstein associées à des sections de torsion	19
1.6.4	Résidu en une pointe	20
1.6.5	Énoncé du résultat 2	22
1.6.6	Historique partiel des preuves du théorème de Klingens-Siegel	24
2	Rappels sur les modules de Hodge	27
2.1	Variations de structures de Hodge	27
2.2	Modules de Hodge mixtes	30
2.3	Variations versus modules pour une variété lisse	31
2.3.1	$VSHM_{\mathbb{Q}}(X)$ comme sous-catégorie pleine de $MHM_{\mathbb{Q}}(X)$	31
2.3.2	Foncteurs standard de $D^bMHM_{\mathbb{Q}}(\cdot)$ appliqués aux objets lisses	32
3	Courants	39
3.1	Courants sur une variété différentielle	39
3.2	Courants sur une variété orientée	41
3.3	Fonctorialité	41

3.3.1	Images directes	42
3.3.2	Images inverses	42
3.4	Courants à valeurs dans un fibré vectoriel	43
3.4.1	Définition	43
3.4.2	Notion de Convergence	43
3.4.3	Critères de Convergence	44
3.5	Complexe des courants associé à un fibré vectoriel plat	46
3.6	Courants et morphisme de bord en cohomologie locale	47
3.6.1	Exemples de morphismes de bord	47
3.6.2	Un calcul avec les courants	49
4	Familles de tores réels	55
4.1	B -groupes	55
4.2	L'exponentielle	57
4.2.1	Construction de l'exponentielle	57
4.2.2	Applications	61
4.3	Construction de B -tores	63
4.4	Trivialisation d'un B -tore	64
4.5	Le fibré tangent d'un B -tore	65
5	Le logarithme d'un schéma abélien	67
5.1	Cas absolu	68
5.2	Cas d'une variété abélienne	69
5.2.1	Autre description du logarithme	69
5.2.2	Le pro-système local sous-jacent au logarithme	73
5.3	Cas relatif	76
5.4	Cas d'un schéma abélien	78
5.4.1	Autre description du logarithme pour des familles de variétés abéliennes	78
5.4.2	Le pro-système local sous-jacent au logarithme pour des familles de variétés abéliennes	81
5.4.3	Principe de scindage	84
5.4.4	Images directes supérieures du logarithme	85
6	Le polylogarithme d'un schéma abélien	87
6.1	Définition	87
6.2	D'une explicitation de l'extension polylogarithme	89
6.2.1	Cas des courbes elliptiques	89
6.2.2	Cas des schémas abéliens de dimensions supérieures	89
6.2.3	L'extension topologique sous-jacente au polylogarithme	90
6.3	Description topologique du polylogarithme	92
6.3.1	L'extension topologique polylogarithmique complexifiée	92
6.3.2	Réduction à la résolution d'une équation différentielle	93

7	Le morphisme de Levin	97
7.1	Famille analytique de tores polarisée	97
7.2	Les formes différentielles de Levin	98
7.3	Un exemple : la famille modulaire de Siegel	100
7.3.1	La famille analytique complexe de tores	100
7.3.2	La polarisation principale	101
7.3.3	Décomposition de Hodge	102
7.3.4	Champs de vecteurs et forme de polarisation	102
7.3.5	Les formes différentielles de Levin	103
7.4	Convergence des séries de Levin	105
7.5	Le théorème de Levin	108
8	Valeurs du polylogarithme en un point de torsion	109
8.1	Cas de la cohomologie de Hodge absolue	109
8.2	Cas de la cohomologie de Betti	110
8.3	De la cohomologie absolue à la cohomologie de Betti	111
8.4	Un outil pour calculer topologiquement les classes d'Eisenstein	112
9	Le polylogarithme des variétés de Hilbert-Blumenthal	113
9.1	Variétés de Shimura et formalisme de Pink	113
9.1.1	Données de Shimura	113
9.1.2	Variétés de Shimura	115
9.2	Variétés de Hilbert-Blumenthal	116
9.2.1	Donnée de Shimura pour la variété de Hilbert-Blumenthal	116
9.2.2	Donnée de Shimura pour la famille de variétés abéliennes universelle	117
9.2.3	Le schéma abélien	117
9.2.4	La pointe ∞	119
9.3	Étude de la dégénérescence en l'_{∞}	120
9.3.1	Le morphisme résidu	120
9.3.2	Le but du morphisme résidu	121
9.3.3	Rigidité pour la dégénérescence	124
9.4	Calcul des courants de Levin	125
9.4.1	Données géométriques	125
9.4.2	Décomposition de Hodge	127
9.4.3	Champ de vecteurs et forme de polarisation	127
9.4.4	Les formes différentielles de Levin	128
9.5	Calcul des valeurs de polylogarithme en un point de torsion	129
10	Perspectives	135

Bibliographie

- [BBD] A.A. Beilinson, J. Bernstein, P. Deligne, *Faisceaux pervers*, Analyse et topologie sur les espaces singuliers, Astérisque 100.
- [Be1] A.A. Beilinson, *Notes on absolute Hodge cohomology*, Applications of algebraic K -theory to algebraic geometry and number theory, Part I, II (Boulder, Colo., 1983), Contemp. Math. 55. Amer. Math. Soc., Providence RI, p. 35–68 (1986).
- [Be2] A.A. Beilinson, *On the derived category of perverse sheaves*, K -theory, arithmetic and geometry, Moscow 1984-1986, p. 27–41, LNM 1289 Springer-Berlin.
- [BeLe] A.A. Beilinson, A. Levin, *The Elliptic Polylogarithm*, in U. Jannsen, S.L. Kleiman, J.P. Serre, “Motives”, Proceedings of the research Conference on Motives held July 20 - August 2, 1991, in Seattle, Washington, Proc. of Symp. in Pure Math. 55, Part II, AMS, p. 123–190 (1994).
- [BiLa] C. Birkenhake, H. Lange, *Complex tori*, Progress in Mathematics 177, Birkhäuser.
- [Bo] N. Bourbaki, *Variétés différentielles et analytiques*, fascicule de résultats, C.C.L.S., 1983.
- [Br] K.S. Brown, *Cohomology of groups*, G.T.M. 87, Springer, 1982.
- [BW] J.I. Burgos, J. Wildeshaus, *Hodge modules on Shimura varieties and their higher images in the Baily-Borel compactification*, Ann. Sci. École Norm. Sup., 37, p. 363–413 (2004).
- [D] J. Dieudonné, *Éléments d'analyse*, Tome III, Éditions Jacques Gabay, 2003.
- [F] E. Freitag, *Hilbert Modular Forms*, Springer-Verlag (1990).
- [Go] E.Z. Goren, *Lectures on Hilbert Modular Varieties and Modular Forms*, CRM Monograph Series, vol. 14, AMS.
- [Gr] M.J. Greenberg, *Lectures on algebraic topology*, Mathematics Lecture Note Series, 1967.
- [GH] P. Griffiths, J. Harris, *Principles of algebraic geometry*, Wiley Classics Library.
- [HW1] A. Huber, J. Wildeshaus, *Classical motivic polylogarithm according to Beilinson and Deligne*, Doc. Math. 3, p. 27–133 (1998).
- [HW2] A. Huber, J. Wildeshaus, *Correction to the paper “Classical motivic polylogarithm according to Beilinson and Deligne”*, Doc. Math. 3, p. 297–299 (1998).
- [HZ] R. M. Hain, S. Zucker, *Unipotent variations in mixed Hodge structures*, Inv. Math. 88, p. 83–124 (1987).
- [I] B. Iversen, *Cohomology of sheaves*, Universitext, Springer-Verlag.
- [Ka] M. Kashiwara, *A study of variations of Mixed Hodge Module Structure*, Publ. RIMS, Kyoto Univ. 22, p. 991–1024 (1986).

- [Ki1] G. Kings, *Higher regulators, Hilbert modular surfaces and special values of L -functions*, Duke Math. J. 92, p. 61–127 (1998).
- [Ki2] G. Kings, *K -theory elements for the polylogarithm of abelian schemes*, J. reine angew. Math. 517, p. 103–116 (1999).
- [Ki3] G. Kings, *Degeneration of polylogarithms and special values of L -functions for totally real fields*, ArXiv math.NT/0510147, 33 p..
- [Kl] H. Klingen, *Über die Werte der Dedekindschen Zetafunktion*, Math. Ann. 145, 265–272 (1962).
- [Kn] A.W. Knap *Lie groups, Lie algebra, and Cohomology*, Mathematical notes 34, Princeton Univ. Press 1988.
- [Le] A. Levin, *Polylogarithmic Currents on Abelian Varieties*, in A. Reznikov, N. Schappacher (eds), “Regulators in Analysis, Geometry and Number Theory”, Proc. of the German-Israeli workshop held March 11–20 1996 at Landau Center, Jerusalem, Progress in Math. 171, Birkhäuser, p. 207–229 (2000).
- [La] J. Lafontaine, *Introduction aux variétés différentielles*, Presses Universitaires de Grenoble (1996).
- [N] M. Nori, *Some Eisenstein classes for the integral unimodular group*, Proc. of the IMC Zürich, p. 690–696 (1994).
- [P] R. Pink, *Arithmetical compactification of mixed Shimura varieties*, PhD Thesis, Bonn (1989).
- [SS] Schappacher N., A.J. Scholl, *The boundary of the Eisenstein symbol*, Math. Ann. 290 (1991), n°2, p. 303–321.
- [Sc] R. Sczech, *Eisenstein group cocycles for GL_n and values of L -functions*, Inv. Math. 113, p. 581–616 (1993).
- [Sa1] M. Saito, *Modules de Hodge polarisables*, Publ. RIMS Kyoto Univ. 24, p. 849–995 (1988).
- [Sa2] M. Saito, *Mixed Hodge Modules*, Publ. RIMS Kyoto Univ. 26, p. 221–233 (2000).
- [Sa3] M. Saito, *On the Formalism of Mixed Sheaves*, Preprint RIMS 784, 57 p. (1991).
- [Si] C.L. Siegel, *Über die Fourierschen Koeffizienten von Modulformen*, Nach. Akad. Wiss. 1970, n°3, p. 15–56.
- [vdG] G. van der Geer, *Hilbert modular surfaces*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3), 16. Springer-Verlag, Berlin, 1988. ISBN : 3-540-17601-2.
- [V] C. Voisin, *Hodge Theory and Complex Algebraic Geometry, I*, Cambridge studies in advanced mathematics.
- [We] R.O. Wells, *Differential Analysis on Complex Manifolds*, G.T.M. 65, Springer-Verlag New York (1980).
- [Wi1] J. Wildeshaus, *Realizations of polylogarithms*, L.N.M. 1650, Springer-Verlag Berlin (1997).
- [Wi2] J. Wildeshaus, *Mixed sheaves on Shimura varieties and their higher direct images in toroidal compactifications*, J. Alg. Geom. 9 (2000).

Résumé : La réalisation de Hodge du polylogarithme d'un schéma abélien complexe de dimension g est une $(2g-1)$ -extension de modules de Hodge. Lorsque le schéma abélien est principalement polarisé, on en donne une description au niveau topologique. Pour cela, on utilise des courants de type "courants de Green" introduits par Levin. On applique alors ce résultat aux familles modulaires de Hilbert-Blumenthal pour montrer que certaines classes d'Eisenstein (construites à partir du polylogarithme et d'une section de torsion) dégénèrent, en l'infini, en une valeur spéciale de fonction L du corps de nombres totalement réel sous-jacent. On en déduit deux autres résultats : une version partielle du théorème de Klingen-Siegel et un résultat de non nullité pour certaines de ces classes d'Eisenstein. Ainsi, on montre que pour tout entier g plus grand que 2, il existe un schéma abélien complexe de dimension g tel que certaines de ses classes d'Eisenstein soient non nulles.

Mots clés : Polylogarithme, Schéma abélien, Module de Hodge, Courant, Variété de Hilbert-Blumenthal, Classe d'Eisenstein, Fonction L de corps de nombres, Théorème de Klingen-Siegel.

Title : Hodge realization of the polylogarithm of an abelian scheme and degeneration of Eisenstein classes of Hilbert-Blumenthal modular families.

Abstract : The Hodge realization of the polylogarithm of a complex abelian scheme of dimension g is a $(2g-1)$ -extension of Hodge modules. When the abelian scheme is principally polarized, we describe the underlying topological extension by using currents of Green type introduced by Levin. Then, we apply this result to the Hilbert-Blumenthal modular families to show that some of these Eisenstein classes (built from the polylogarithm and a torsion section) degenerate, at infinity, in a special value of a L -function of the underlying totally real number field. This has two consequences : a partial version of the Klingen-Siegel theorem and a non vanishing result for some of these Eisenstein classes. So, we prove that for any integer g greater than 2, there exists an abelian scheme of dimension g such that some of its Eisenstein classes are non zero.

Laboratoire Analyse, Géométrie et Applications
UMR 7539
Institut Galilée
Université Paris 13
99 Avenue J.-B. Clément
93430 Villetaneuse