

# Réalisation de Hodge du polylogarithme d'un schéma abélien <sup>★</sup>

David Blottière

*Institut für Mathematik, Universität Paderborn, Warburger Str. 100, 33098 Paderborn, Allemagne*

---

## Résumé

La réalisation de Hodge du polylogarithme d'un schéma abélien est une extension de modules de Hodge. Dans [6], Levin construit certains courants (séries d'Eisenstein généralisées) et conjecture que ceux-ci décrivent l'extension polylogarithmique. Notre résultat principal (Thm 3.1 et Cor 3.2) est une preuve de cette conjecture. On en déduit un outil (cf. Rem 1) pour étudier les classes d'Eisenstein (cf. Partie 4), qui ont une origine motivique (cf. [5]), dont un exemple d'application est donné dans [3]. *Pour citer cet article : D. Blottière, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I ??? (???)*.

## Abstract

**The Hodge realization of the polylogarithm of an abelian scheme.** The Hodge realization of the polylogarithm of an abelian scheme is an extension of Hodge modules. In [6], Levin constructs some currents (generalized Eisenstein series) and conjectures that they describe the polylogarithmic extension. Our main result (Thm 3.1 and Cor 3.2) is a proof of this conjecture. This provides a tool (see Rem 1) to study the Eisenstein classes (see Part 4), which have a motivic origin (see [5]); an application example is given in [3]. *To cite this article: D. Blottière, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I ??? (???)*.

---

## Abridged English version

The aim of this article is to prove a conjecture of Levin concerning the description of the polylogarithm of an abelian scheme by polylogarithmic currents that he defines in [6]. More precisely, our main result is a description of the underlying topological extension to the polylogarithm using Levin's currents.

Let  $S$  be a separated smooth scheme of finite type over  $\mathbb{C}$  and  $(\pi: A \rightarrow S, \omega)$  be a principally polarized abelian scheme of pure dimension  $d$ . We associate to this abelian scheme a pro-variation of  $\mathbb{Q}$ -admissible mixed Hodge structures over  $A$ , its logarithm, denoted by  $\mathcal{L}og$ , following either Kings [5, Def 1.1.2] or Wildeshaus [8, I-Thm 3.3]. Both approaches define the same object [2, Chap 5]. In [6], Levin defines a

---

<sup>★</sup> Résumé d'un texte qui sera conservé cinq ans dans les Archives de l'Académie et dont une copie peut être obtenue sur demande.

*Email address:* [blottier@math.uni-paderborn.de](mailto:blottier@math.uni-paderborn.de) (David Blottière).

pro-vector bundle  $\mathcal{G}$  over the  $\mathcal{C}^\infty$ -real manifold associated to  $A$  equipped with a flat connection  $\nabla$ . This pair  $(\mathcal{G}, \nabla)$  describes the underlying pro-local system of  $\mathcal{L}og$  (see [2, 5.4.2]).

Let  $\mathcal{H} := (R^1\pi_*\mathbb{Q})^\vee$  be the homological variation and let  $U$  be the complement of  $S$  in  $A$ . Here  $S$  is viewed as a closed subscheme of  $A$  via the zero section. The polylogarithm of  $A$ , denoted by  $\mathcal{P}ol$ , is a  $(2d-1)$ -extension of  $\mathbb{Q}$ -mixed Hodge modules over  $U$  (cf. [7]) between  $\mathcal{L}og|_U(d)$  and  $(\pi^*\mathcal{H})|_U$ . Applying a forgetful functor and extending scalars from  $\mathbb{Q}$  to  $\mathbb{C}$ , we obtain a  $(2d-1)$ -extension of sheaves of  $\mathbb{C}$ -vector spaces over  $U(\mathbb{C})$  between  $\widehat{\mathcal{L}og|_U(d)} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$  and  $(\pi^*\mathcal{H})|_U \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$ , the complexified underlying local systems of  $\mathcal{L}og|_U(d)$  and  $(\pi^*\mathcal{H})|_U$ , i.e. a morphism in the bounded category of sheaves of  $\mathbb{C}$ -vector spaces over  $U(\mathbb{C})$  between  $(\pi^*\mathcal{H})|_U \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$  and  $\widehat{\mathcal{L}og|_U(d)} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}[2d-1]$ .

Our result (Thm 3.1 and Cor 3.2) is a description of this morphism by the following ‘‘roof’’

$$\begin{array}{ccc} & (\mathcal{G}_{\mathbb{C}}^\bullet, \nabla_{\mathbb{C}}^\bullet) & \\ \mathcal{P} \nearrow & & \nwarrow qis \\ \widehat{(\pi^*\mathcal{H})|_U} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} & & \widehat{\mathcal{L}og|_U(d)} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}[2d-1] \end{array}$$

where  $(\mathcal{G}_{\mathbb{C}}^\bullet, \nabla_{\mathbb{C}}^\bullet)$  is the de Rham complex of currents associated to  $(\mathcal{G}_{\mathbb{C}}, \nabla_{\mathbb{C}})$  and  $\mathcal{P}$  the Levin morphism (see [6, Thm 3.4.4]).

Given a torsion section we build from the polylogarithm some classes which are called Eisenstein classes (cf. Part 4). These are of special interest since they have a motivic origin (see [5]) and we note (see Rem 1) that this paper provides a tool (see 2 for an application example) for their study.

## 1. Notations et convention

Soient  $X$  un schéma de type fini, séparé et lisse sur  $\mathbb{C}$ ,  $f: Y \rightarrow Z$  un morphisme entre schémas de type fini, séparés et lisses sur  $\mathbb{C}$  et  $\mathbb{K} \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{C}\}$ . On note

$\overline{X}$	l'ensemble $X(\mathbb{C})$ muni de la topologie transcendante,
$\overline{f}$	l'application continue de $\overline{Y}$ vers $\overline{Z}$ induite par $f$ ,
$X^\infty$	la variété différentielle $\mathcal{C}^\infty$ -réelle associée à $X$ ,
$f^\infty$	l'application lisse de $Y^\infty$ vers $Z^\infty$ induite par $f$ ,
$\mathcal{F}_{\mathbb{K}}(X)$	la catégorie des faisceaux en $\mathbb{K}$ -vectoriels sur $\overline{X}$ ,
$D_{\mathbb{C}}^b(X)$	la sous-catégorie pleine de $D^b\mathcal{F}_{\mathbb{Q}}(X)$ ayant pour objets les complexes dont la cohomologie est algébriquement constructible,
$VSHM(X)$	la catégorie des $\mathbb{Q}$ -variations de structures de Hodge mixtes admissibles (cf. [4]) sur $X$ ,
$\overline{\mathbb{V}}$	le (pro-)système local sous-jacent à $\mathbb{V}$ pour $\mathbb{V} \in Ob((pro-)VSHM(X))$ ,
$MHM(X)$	la catégorie des $\mathbb{Q}$ -modules de Hodge algébriques mixtes sur $X$ (cf. [7]).

Par construction,  $MHM(X)$  est muni d'un foncteur *rat* de  $MHM(X)$  vers  $Perv(X)$ , le coeur de la  $t$ -structure perverse autoduale sur  $D_{\mathbb{C}}^b(X)$ , qui est fidèle et exact. Celui-ci induit un foncteur de  $D^bMHM(X)$  vers  $D^bPerv(X)$  qui composé avec le foncteur *real* de Beilinson fournit un foncteur d'oubli  $\text{For}: D^bMHM(X) \rightarrow D_{\mathbb{C}}^b(X)$ . On dispose également d'un foncteur  $\iota: VSHM(X) \rightarrow MHM(X)$  qui est exact, pleinement fidèle et grâce auquel on identifie  $VSHM(X)$  à une sous-catégorie pleine de  $MHM(X)$ .

Le foncteur  $\text{For}$  associe à un objet de  $VSHM(X)$  le système local sous-jacent décalé. Dans ce texte, on fait la convention suivante : *l'image d'un objet de  $VSHM(X)$  sous  $\text{For}$  est son système local sous-jacent concentré en degré 0*, i.e. on ne tient pas compte du décalage.

Soit  $S$  un schéma de type fini, séparé, connexe et lisse sur  $\mathbb{C}$  et soit  $\pi: A \rightarrow S$  un schéma abélien de section unité  $e$  et de dimension relative pure  $d$ . On note  $\mathcal{H}$  l'objet pur de poids  $-1$  de  $VSHM(S)$  ( $R^1\pi_*\mathbb{Q}(0)$ ) $^\vee$ ,  $j: U \rightarrow A$  l'immersion ouverte complémentaire de  $e$  et  $\pi_U := \pi \circ j$ .

## 2. Le logarithme d'un schéma abélien

On associe à ce schéma abélien un objet de  $pro\text{-}VSHM(A)$ , son logarithme, noté  $\mathcal{L}og$ , dont les gradués par le poids sont  $\text{Gr}_n^W \mathcal{L}og = \text{Sym}^{-n}\pi^*\mathcal{H}$  si  $n \leq 0$  et sont nuls sinon, et un morphisme canonique  $\varepsilon: \mathcal{L}og \rightarrow \mathbb{Q}(0)$ , en suivant soit l'approche de Kings [5, Def 1.1.2], soit celle de Wildeshaus [8, I-Thm 3.3], les deux définissant le même couple  $(\mathcal{L}og, \varepsilon)$  (cf. [2, Chap 5]).

### Propriétés du logarithme

- Principes de rigidité : Les couples  $(\mathcal{L}og, \varepsilon)$ ,  $(\overline{\mathcal{L}og}, \text{For}(\varepsilon))$  et  $(\overline{\mathcal{L}og} \widehat{\otimes}_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}, \text{For}(\varepsilon) \widehat{\otimes}_{\mathbb{Q}} \mathbb{R})$  sont solutions de problèmes universels et donc n'admettent pas d'automorphisme non trivial (cf. [8, I-Thm 3.5]).
- Principe de scindage : Pour toute section de torsion  $x: S \rightarrow A$ ,  $x^*\mathcal{L}og = \prod_{n=0}^{\infty} \text{Sym}^n \mathcal{H}$  (cf. [5, 3.1] et [8, III-Prop 6.1]).
- Images directes supérieures sous  $\pi$  : Pour tout  $i \neq 2d$ ,  $H^i\pi_*\mathcal{L}og = 0$  et le morphisme  $\varepsilon$  induit un isomorphisme  $H^{2d}\pi_*\mathcal{L}og \xrightarrow{\sim} \mathbb{Q}(-d)$  (cf. [5, Prop 1.1.3 a] ou [8, III-Prop 1.1]).
- Images directes supérieures sous  $\pi_U$  : Soit  $\mathcal{L}og_U := j^*\mathcal{L}og$ . En analysant la suite exacte longue de cohomologie associée au triangle distingué  $\pi_*(e_*e^!\mathcal{L}og \rightarrow \mathcal{L}og \rightarrow j_*j^*\mathcal{L}og \rightarrow e^!\mathcal{L}og[1])$ , en utilisant la pureté ( $e^!\mathcal{L}og = e^*\mathcal{L}og(-d)[-2d]$ ) et les propriétés b,c, on déduit que  $H^i(\pi_U)_*\mathcal{L}og_U = 0$  pour tout  $i \neq 2d - 1$  et que le morphisme résidu  $H^{2d-1}(\pi_U)_*\mathcal{L}og_U \rightarrow e^*\mathcal{L}og_U(-d)$  induit un isomorphisme  $\rho: H^{2d-1}(\pi_U)_*\mathcal{L}og_U \xrightarrow{\sim} \prod_{n=1}^{\infty} (\text{Sym}^n \mathcal{H})(-d)$ .

### Description du pro-système local sous-jacent au logarithme

Levin a construit sur le pro-fibré vectoriel réel au dessus de  $A^\infty$   $\mathcal{G} := \prod_{n=0}^{\infty} \text{Sym}^n(\overline{\pi^*\mathcal{H}} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathcal{O}_{A^\infty})$  une connexion plate  $\nabla$  [6, Def 2.4.3]. Cette construction repose sur la trivialisaton de la famille de tores  $\mathcal{C}^\infty$ -réels au dessus de  $S^\infty$   $\pi^\infty: A^\infty \rightarrow S^\infty$  induite par l'exponentielle fibre à fibre  $\overline{\pi^*\mathcal{H}} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathcal{O}_{A^\infty} \rightarrow A^\infty$  (cf. [6, Def 2.2.1] et [2, Chap 4]). Ce couple  $(\mathcal{G}, \nabla)$  décrit  $\overline{\mathcal{L}og}_A \widehat{\otimes}_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ , i.e.  $\text{Ker}(\nabla) = \overline{\mathcal{L}og}_A \widehat{\otimes}_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ , et le morphisme  $\text{For}(\varepsilon) \widehat{\otimes}_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$  correspond au morphisme  $pr_0: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{O}_{A^\infty}$  (voir [2, 5.4.2]).

## 3. Le polylogarithme d'un schéma abélien

Les propriétés b), c) et d) du logarithme ont des analogues topologiques évidents, e.g.  $R^i(\overline{\pi_U})_*\overline{\mathcal{L}og}_U = 0$  pour tout  $i \neq 2d - 1$  et le morphisme résidu  $R^{2d-1}(\overline{\pi_U})_*\overline{\mathcal{L}og}_U \rightarrow \overline{e^*}\mathcal{L}og_U(-d)$  induit un isomorphisme

$$\bar{\rho}: R^{2d-1}(\pi_U)_*\overline{\mathcal{L}og_U} \xrightarrow{\sim} \prod_{n=1}^{\infty} \overline{(\text{Sym}^n \mathcal{H})(-d)}.$$

On définit deux isomorphismes  $\kappa$  et  $\bar{\kappa}$  par le diagramme commutatif, noté  $\mathcal{D}_1$ , suivant.

$$\begin{array}{ccc}
\text{Ext}_{MHM(U)}^{2d-1}(\pi_U^* \mathcal{H}, \mathcal{L}og_U(d)) & \xrightarrow{\text{For}} & \text{Ext}_{\mathcal{F}_Q(U)}^{2d-1}(\overline{\pi_U^* \mathcal{H}}, \overline{\mathcal{L}og_U(d)}) \\
\parallel & \text{(adjonction)} & \parallel \\
\text{Ext}_{MHM(S)}^{2d-1}(\mathcal{H}, (\pi_U)_* \mathcal{L}og_U(d)) & \xrightarrow{\text{For}} & \text{Ext}_{\mathcal{F}_Q(S)}^{2d-1}(\overline{\mathcal{H}}, R\overline{\pi_U}_* \overline{\mathcal{L}og_U(d)}) \\
\parallel & \text{(prop. d) de } \mathcal{L}og & \parallel \\
\text{Hom}_{MHM(S)}(\mathcal{H}, H^{2d-1}(\pi_U)_* \mathcal{L}og_U(d)) & \xrightarrow{\text{For}} & \text{Hom}_{\mathcal{F}_Q(S)}(\overline{\mathcal{H}}, R^{2d-1} \overline{\pi_U}_* \overline{\mathcal{L}og_U(d)}) \\
\rho_* \downarrow \sim & \text{(prop. d) de } \mathcal{L}og & \sim \downarrow \bar{\rho}_* \\
\text{Hom}_{MHM(S)}(\mathcal{H}, \prod_{n=1}^{\infty} \text{Sym}^n \mathcal{H}) & \xrightarrow{\text{For}} & \text{Hom}_{\mathcal{F}_Q(S)}(\overline{\mathcal{H}}, \prod_{n=1}^{\infty} \text{Sym}^n \overline{\mathcal{H}})
\end{array}$$

$\kappa \sim$  (left side)   $\sim \bar{\kappa}$  (right side)

La commutativité du centre de ce diagramme résulte de la compatibilité du formalisme des 6 foncteurs de  $D^b MHM(\cdot)$  et de celui  $D_c^b(\cdot)$  via le foncteur For, e.g.  $\text{For} \circ f_* = R\overline{f}_* \circ \text{For}$  pour  $f$  un morphisme entre schémas de type fini, séparés sur  $\mathbb{C}$ . On remarque que le but de  $\kappa$  s'identifie naturellement à  $\text{Hom}_{VSHM(S)}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$  (cf. pleine fidélité de  $\iota$  et poids).

Le polylogarithme du schéma abélien  $\pi: A \rightarrow S$ , noté  $\mathcal{P}ol$ , est défini par  $\mathcal{P}ol := \kappa^{-1}(Id_{\mathcal{H}})$ .

### Propriétés du polylogarithme

- a) Cas elliptique ( $d = 1$ ) : Pour tout  $\mathbb{V}, \mathbb{W} \in \text{Ob}(VSHM(U))$ , le foncteur  $\iota$  induit un isomorphisme  $\text{Ext}_{MHM(U)}^1(\mathbb{V}, \mathbb{W}) \xrightarrow{\sim} \text{Ext}_{VSHM(U)}^1(\mathbb{V}, \mathbb{W})$ . Le polylogarithme est une 1-extension dans  $VSHM(U)$  dont une description complète a été donnée par Beilinson et Levin dans [1, 4.8]. On peut également consulter le théorème [8, V-Thm 3.4] et sa preuve.
- b) Cas non elliptique ( $d \geq 2$ ) : On démontre que le polylogarithme *n'est pas* dans l'image du morphisme  $\text{Ext}_{VSHM(U)}^{2d-1}(\pi_U^* \mathcal{H}, \mathcal{L}og_U(d)) \rightarrow \text{Ext}_{MHM(U)}^{2d-1}(\pi_U^* \mathcal{H}, \mathcal{L}og_U(d))$  induit par  $\iota$  (cf. [8, III-Thm 2.3 b]).
- c) Propriété de rigidité : L'application For:  $\text{Ext}_{MHM_Q(U)}^{2d-1}(\pi_U^* \mathcal{H}, \mathcal{L}og_U(d)) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{F}_Q(U)}^{2d-1}(\overline{\pi_U^* \mathcal{H}}, \overline{\mathcal{L}og_U(d)})$  est injective et For( $\mathcal{P}ol$ ) est caractérisé par  $\bar{\kappa}(\text{For}(\mathcal{P}ol)) = Id_{\overline{\mathcal{H}}}$  (cf. diagramme  $\mathcal{D}_1$ ).

### Description du polylogarithme au niveau topologique

On reprend la construction de  $\bar{\kappa}$  en considérant, cette fois, des coefficients complexes (cf. diagramme  $\mathcal{D}_1$ ) pour obtenir un isomorphisme  $(\bar{\kappa})_{\mathbb{C}}: \text{Ext}_{\mathcal{F}_{\mathbb{C}}(U)}^{2d-1}(\overline{\pi_U^* \mathcal{H}}_{\mathbb{C}}, \overline{\mathcal{L}og_U(d)})_{\mathbb{C}} \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{F}_{\mathbb{C}}(S)}(\overline{\mathcal{H}}_{\mathbb{C}}, \prod_{n=1}^{\infty} \text{Sym}^n \overline{\mathcal{H}}_{\mathbb{C}})$  dans lequel intervient essentiellement le morphisme résidu  $R^{2d-1}(\overline{\pi_U})_* \overline{(\mathcal{L}og_U)}_{\mathbb{C}} \rightarrow (\overline{\mathcal{E}^* \mathcal{L}og_U(-d)})_{\mathbb{C}} = \prod_{n=0}^{\infty} ((\text{Sym}^n \mathcal{H})(-d))_{\mathbb{C}}$ . En outre,  $(\bar{\kappa})_{\mathbb{C}}$  s'insère dans le diagramme commutatif, noté  $\mathcal{D}_2$ , suivant.

$$\begin{array}{ccc}
\text{Ext}_{MHM(U)}^{2d-1}(\pi_U^* \mathcal{H}, \mathcal{L}og_U(d)) & \xrightarrow{\text{For}} & \text{Ext}_{\mathcal{F}_Q(U)}^{2d-1}(\overline{\pi_U^* \mathcal{H}}, \overline{\mathcal{L}og_U(d)}) \xrightarrow{\cdot \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}} \text{Ext}_{\mathcal{F}_C(U)}^{2d-1}(\overline{\pi_U^* \mathcal{H}_C}, \overline{(\mathcal{L}og_U(d))_C}) \\
\kappa \downarrow \sim & & \bar{\kappa} \downarrow \sim \quad \quad \quad (\bar{\kappa})_C \downarrow \sim \\
\text{Hom}_{VSHM(S)}(\mathcal{H}, \prod_{n=1}^{\infty} \text{Sym}^n \mathcal{H}) & \hookrightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{F}_Q(S)}(\overline{\mathcal{H}}, \prod_{n=1}^{\infty} \text{Sym}^n \overline{\mathcal{H}}) \hookrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{F}_C(S)}(\overline{\mathcal{H}}_C, \prod_{n=1}^{\infty} \text{Sym}^n \overline{\mathcal{H}}_C)
\end{array}$$

Ainsi l'application  $\cdot \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} : \text{Ext}_{\mathcal{F}_Q(U)}^{2d-1}(\overline{\pi_U^* \mathcal{H}}, \overline{\mathcal{L}og_U(d)}) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{F}_C(U)}^{2d-1}(\overline{\pi_U^* \mathcal{H}_C}, \overline{(\mathcal{L}og_U(d))_C})$  est injective. On remarque également que, le diagramme  $\mathcal{D}_2$  étant commutatif, l'image de  $For(\mathcal{P}ol)$  sous l'application  $\cdot \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$ , identifiée à  $For(\mathcal{P}ol)$  dans la suite, est caractérisée par  $\bar{\kappa}_C(For(\mathcal{P}ol)) = Id_{\overline{\mathcal{H}}_C}$ .

Afin de décrire  $For(\mathcal{P}ol) \in \text{Ext}_{\mathcal{F}_C(U)}^{2d-1}(\overline{\pi_U^* \mathcal{H}_C}, \overline{(\mathcal{L}og_U(d))_C}) = \text{Hom}_{D^b(\mathcal{F}_C(U))}(\overline{\pi_U^* \mathcal{H}_C}, \overline{(\mathcal{L}og_U(d))_C}[2d-1])$ , on introduit le complexe de de Rham des courants sur  $A^\infty$  à valeurs dans le pro-fibré vectoriel  $\mathcal{G}_C$ ,  $(\mathcal{A}^\bullet(\mathcal{G}_C) := \prod_{n=0}^{\infty} (\text{Sym}^n \overline{\pi^* \mathcal{H}_C}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{A}_{A^\infty}^\bullet, \nabla_C^\bullet)$ , où  $\mathcal{A}_{A^\infty}^k$  désigne le faisceau des courants de degré  $k$  sur  $A^\infty$  et où  $\nabla_C^k$  est la différentielle induite par la connexion plate  $\nabla_C$ , pour  $k \in \mathbb{N}$ . C'est une résolution  $\overline{\pi}_*$ -acyclique de  $\overline{(\mathcal{L}og(d))_C}$ .

Notation : Soit  $f : \overline{\pi_U^* \mathcal{H}_C} \rightarrow \mathcal{A}^{2d-1}(\mathcal{G}_C)|_{\overline{U}}$  un morphisme tel que  $(\nabla_C^{2d-1})|_{\overline{U}} \circ f = 0$ . Le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & \overline{\pi_U^* \mathcal{H}_C} & \longrightarrow & 0 & & \\
& & \downarrow f & & & & \\
0 & \longrightarrow & (\mathcal{G}_C)|_{\overline{U}} & \xrightarrow{(\nabla_C)|_{\overline{U}}} \dots \longrightarrow & \mathcal{A}^{2d-1}(\mathcal{G}_C)|_{\overline{U}} & \xrightarrow{(\nabla_C^{2d-1})|_{\overline{U}}} & \mathcal{A}^{2d}(\mathcal{G}_C)|_{\overline{U}} \longrightarrow \dots \\
& & \uparrow qis & & & & \\
0 & \longrightarrow & \overline{(\mathcal{L}og_U(d))_C} & \longrightarrow & 0 & & 
\end{array}$$

définit un élément de  $\text{Hom}_{D^b(\mathcal{F}_C(U))}(\overline{\pi_U^* \mathcal{H}_C}, \overline{(\mathcal{L}og_U(d))_C}[2d-1])$  que l'on note  $[f]$ .

**Théorème 3.1** *Soit  $f : \overline{\pi^* \mathcal{H}_C} \rightarrow \mathcal{A}^{2d-1}(\mathcal{G}_C)$  un morphisme vérifiant la propriété (P) suivante :*

$$(P) \quad \nabla_C^{2d-1} \circ f = (2\pi i)^d Id_{\overline{\pi^* \mathcal{H}_C}} \otimes \delta_{S^\infty}$$

où  $\delta_{S^\infty}$  désigne le courant de degré  $2d$  sur  $A^\infty$  associé à la sous variété fermée de  $A^\infty$   $e^\infty : S^\infty \hookrightarrow A^\infty$ . Alors,  $(\nabla_C^{2d-1} \circ f)|_{\overline{U}} = 0$  et  $[f|_{\overline{U}}] = For(\mathcal{P}ol)$ .

La première assertion est évidente. Pour la seconde, le lecteur peut consulter la preuve du théorème [2, Thm 6.3.4] qui repose sur la caractérisation de  $For(\mathcal{P}ol)$  par l'identité  $\bar{\kappa}_C(For(\mathcal{P}ol)) = Id_{\overline{\mathcal{H}}_C}$ , le fait que  $\bar{\kappa}_C$  soit défini par un morphisme résidu et le théorème de Stokes.

On suppose que  $\pi : A \rightarrow S$  est muni d'une polarisation principale  $\omega$ . Dans [6], Levin définit, à partir de  $\omega$ , des séries de formes différentielles sur  $A^\infty$  à valeurs dans  $\text{Sym}^{a-1} \mathcal{H}_C$ ,  $g'_{\omega,a}$ ,  $a \in \mathbb{N}^*$ . Pour  $a > 2d$ ,  $g'_{\omega,a}$  converge uniformément vers une forme différentielle et, pour  $a \leq 2d$ ,  $g'_{\omega,a}$ , vues comme séries de courants, convergent au sens des courants et sont lisses sur  $\overline{U}$ . À l'aide de celles-ci, il construit un morphisme  $\mathcal{P}_\omega : \overline{\pi^* \mathcal{H}_C} \rightarrow \mathcal{A}^{2d-1}(\mathcal{G}_C)$  (cf. [6, Thm 3.4.4]). Pour une expression explicite de  $\mathcal{P}_\omega$ , dans le cas où le schéma abélien est une famille modulaire de Siegel (resp. Hilbert-Blumenthal), on peut consulter [6, 2.3] et [2, 7.3] (resp. [2, 9.4]). Levin démontre que  $\mathcal{P}_\omega$  vérifie la propriété (P) du théorème précédent [6, Thm 3.4.4] et conjecture que ce morphisme décrit  $\mathcal{P}ol$ . Du théorème 3.1, on déduit une preuve de cette conjecture. Précisément, on a le corollaire suivant.

**Corollaire 3.2** *Si le schéma abélien  $\pi: A \rightarrow S$  est muni d'une polarisation principale  $\omega$ , le morphisme  $\mathcal{P}_\omega$  de Levin décrit le polylogarithme au niveau topologique, i.e.  $[(\mathcal{P}_\omega)_{|\overline{\mathcal{P}}}] = \text{For}(\text{Pol})$ .*

#### 4. Les classes d'Eisenstein d'un schéma abélien

Soit  $x: S \rightarrow A$  une section de torsion et soit  $l \in \mathbb{N}$ . On définit deux applications  $val_x^l$  et  $\overline{val}_x^l$  par le diagramme commutatif suivant (pour la commutativité de sa partie centrale, cf. justification de la commutativité de celle de  $\mathcal{D}_1$ ).

$$\begin{array}{ccc}
& \text{Ext}_{MHM(U)}^{2d-1}(\pi_U^* \mathcal{H}, \text{Log}_U(d)) & \xrightarrow{\text{For}} & \text{Ext}_{\mathcal{F}_\mathbb{Q}(U)}^{2d-1}(\overline{\pi_U^* \mathcal{H}}, \overline{\text{Log}_U(d)}) \\
& \downarrow x^* & \text{(prop. a) de Log} & \downarrow \overline{x^*} \\
& \text{Ext}_{MHM(S)}^{2d-1}(\mathcal{H}, \prod_{n=0}^{\infty} (\text{Sym}^n \mathcal{H})(d)) & \xrightarrow{\text{For}} & \text{Ext}_{\mathcal{F}_\mathbb{Q}(S)}^{2d-1}(\overline{\mathcal{H}}, \prod_{n=0}^{\infty} (\text{Sym}^n \mathcal{H})(d)) \\
& \parallel & \text{(dualité)} & \parallel \\
val_x^l \left[ \text{Ext}_{MHM(S)}^{2d-1}(\mathbb{Q}(0), \prod_{n=0}^{\infty} (\text{Sym}^n \mathcal{H}) \otimes \mathcal{H}^\vee(d)) \right. & \xrightarrow{\text{For}} & \left. H_{\text{Betti}}^{2d-1}(\overline{S}, \prod_{n=0}^{\infty} (\text{Sym}^n \mathcal{H}) \otimes \overline{\mathcal{H}^\vee(d)}) \right] & \overline{val}_x^l \\
& \downarrow pr_{l+1} & & \downarrow pr_{l+1} \\
& \text{Ext}_{MHM(S)}^{2d-1}(\mathbb{Q}(0), (\text{Sym}^{l+1} \mathcal{H}) \otimes \mathcal{H}^\vee(d)) & \xrightarrow{\text{For}} & H_{\text{Betti}}^{2d-1}(\overline{S}, (\text{Sym}^{l+1} \mathcal{H}) \otimes \overline{\mathcal{H}^\vee(d)}) \\
& \downarrow \text{contraction} & & \downarrow \text{contraction} \\
& \text{Ext}_{MHM(S)}^{2d-1}(\mathbb{Q}(0), (\text{Sym}^l \mathcal{H})(d)) & \xrightarrow{\text{For}} & H_{\text{Betti}}^{2d-1}(\overline{S}, (\text{Sym}^l \mathcal{H})(d))
\end{array}$$

L'extension  $val_x^l(\text{Pol})$  est appelée  $l$ -ième classe d'Eisenstein du schéma abélien  $\pi: A \rightarrow B$  associée à  $x$  et notée  $\mathcal{E}is_x^l$ . Cette classe a un intérêt particulier en raison de son origine motivique (voir [5]).

*Remarque 1* La construction de  $\overline{val}_x^l$  admet un analogue évident pour des coefficients complexes permettant de définir un morphisme  $(\overline{val}_x^l)_\mathbb{C}: \text{Ext}_{\mathcal{F}_\mathbb{C}(U)}^{2d-1}(\overline{\pi_U^* \mathcal{H}}_\mathbb{C}, (\overline{\text{Log}_U(d)})_\mathbb{C}) \rightarrow H_{\text{Betti}}^{2d-1}(\overline{S}, ((\text{Sym}^l \mathcal{H})(d))_\mathbb{C})$ . Si l'on dispose d'une polarisation principale  $\omega$ , on peut alors déterminer  $\text{For}(\mathcal{E}is_x^l)$  à l'aide de l'identité  $\text{For}(\mathcal{E}is_x^l) = (\overline{val}_x^l)_\mathbb{C}([(P_\omega)_{|\overline{\mathcal{P}}}]$  qui se déduit du corollaire 3.2 (cf. [3] pour un exemple).

#### Remerciements

Je remercie vivement Jörg Wildeshaus pour les discussions que nous avons partagées et pour les encouragements qu'il m'a adressés.

#### Références

- [1] A.A. Beilinson, A. Levin, *The elliptic Polylogarithm*, in *Motives*, U. Jannsen, S.L. Kleiman, J.P. Serre, Proceedings of the research Conference on Motives held July 20-August 2, 1991, in Seattle, Washington, Proc. of Symp. in Pure Math. 55, Part II, AMS,(1994) 123–190.
- [2] D. Blottière, *Réalisation de Hodge du polylogarithme d'un schéma abélien et dégénérescence des classes d'Eisenstein des familles modulaires de Hilbert-Blumenthal*, Thèse de doctorat, Université Paris 13, Villetaneuse (2006).
- [3] D. Blottière, *Dégénérescence des classes d'Eisenstein des familles modulaires de Hilbert-Blumenthal*, Acad. Sci. Paris, Ser. I ??? (???)

- [4] M. Kashiwara, *A study of variation of mixed Hodge structure*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. 22 (1986), no. 5, 991–1024
- [5] G. Kings, *K-theory elements for the polylogarithm of abelian schemes*, J. reine angew. Math 517 (1999) 103–116.
- [6] A. Levin, *Polylogarithmic currents on abelian varieties*, in *Regulators in Analysis, geometry and number theory*, A. Reznikov, n. Schappacher (Eds), Progr. Math. 171, Birkhäuser (2000) 207–229.
- [7] M. Saito, *Mixed Hodge modules*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. 26 (1990), no. 2, 221–333
- [8] J. Wildeshaus, *Realizations of polylogarithms*, L.N.M. 1650, Springer-Verlag Berlin (1997).