

Une introduction aux polylogarithmes

Ma recherche actuelle porte sur les polylogarithmes et leurs liens avec les fonctions L . L'objectif de ce texte est d'expliquer certains problèmes considérés dans ce domaine de recherches, en présentant l'objet polylogarithme et en détaillant quelques relations de celui-ci avec l'arithmétique.

On associe un polylogarithme à certains objets géométriques (e.g. le tore \mathbb{G}_m , un schéma abélien, une variété de Shimura), pour diverses théories de coefficients (e.g. coefficients ℓ -adiques, coefficients de la théorie de Hodge). Ici, on se restreint à deux types d'objets géométriques, \mathbb{G}_m et des schémas abéliens, et les seuls coefficients considérés sont ceux de la théorie de Hodge (cf partie 1.2.1).

Ce travail a été élaboré d'abord pour le lecteur non spécialiste. C'est pourquoi les définitions et les résultats de théorie de Hodge nécessaires sont rappelés au fur et à mesure des besoins de l'exposition. Pour autant, par souci de concision, certaines notions plus délicates (e.g. l'admissibilité des variations de structures de Hodge, les modules de Hodge) sont peu détaillées. Lorsqu'une notion introduite n'est pas expliquée en détail, une référence est tout de même donnée. Le lecteur connaissant la théorie de Hodge peut passer la partie 1.2.1.

Passons maintenant en revue le contenu.

Dans la première partie, on s'intéresse au polylogarithme du groupe multiplicatif $\mathbb{G}_{m,\mathbb{C}}$. Dans cette situation géométrique, on dispose d'une description explicite de tous les objets de la théorie du polylogarithme, ce qui peut aider le lecteur à mieux les appréhender. Le résultat principal de cette partie, qui est le fruit de travaux de Beilinson, Deligne, Ramakrishnan..., est une interprétation des valeurs spéciales de la fonction ζ de Riemann purement en termes de théorie de Hodge (cf partie 1.2.4).

Ensuite, après avoir fait une synthèse de la démarche détaillée dans la première partie (cf diagramme de la partie 2), on explique quelques motivations pour l'étude de la théorie faisceautique du polylogarithme et on énonce quatre questions qui constituent la problématique de mon travail de recherches du moment.

Dans une dernière partie, on considère le polylogarithme d'un schéma abélien, en insistant sur l'analogie avec le cas $\mathbb{G}_{m,\mathbb{C}}$. On esquisse la définition des objets polylogarithmiques dans cette situation géométrique (cf tableau de la partie 3) et on mentionne les résultats dont on dispose dans cette situation géométrique, en particulier le lien entre le polylogarithme des familles modulaires de Hilbert-Blumenthal et les valeurs spéciales des fonctions ζ partielles de Dedekind des corps de nombres totalement réels.

1 Le polylogarithme de $\mathbb{G}_{m,\mathbb{C}}$ en théorie de Hodge

Le terme « polylogarithme » désigne en fait plusieurs types d'objets : des fonctions et des (extensions de) faisceaux, qui sont étroitement liés.

On commence par expliquer l'aspect fonctionnel (1.1). On rappelle ensuite la définition de la catégorie des variations de structures de Hodge mixtes (1.2.1). Cette catégorie nous est utile pour donner en 1.2.2 la définition faisceautique du polylogarithme. Ces deux points de vue, fonctionnel et faisceautique, étant expliqués, on précise les liens qui les unissent en décrivant explicitement le polylogarithme faisceautique (1.2.3). Dans une dernière partie (1.2.4), on s'intéresse aux liens entre les faisceaux polylogarithmes et l'arithmétique.

Dans cette partie, on s'inspire du cours intitulé « Théorie de Hodge et Polylogarithmes » donné par Wildeshaus à l'Université Paris XIII en 2001 et on choisit comme référence principale [W1].

1.1 Point de vue fonctionnel

Pour chaque $k \in \mathbb{N}$, la fonction suivante

$$Li_k(z) := \sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{n^k} \quad z \in \mathbb{C}, |z| < 1$$

est un polylogarithme. Ces fonctions Li_k ont certaines propriétés remarquables. Par exemple, elles se prolongent en des fonctions multivaluées sur $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$. En effet, on a

$$Li_1(z) = \int_0^z \frac{1}{1-t} dt \quad z \in \mathbb{C}, |z| < 1,$$

$$Li_{k+1}(z) = \int_0^z \frac{Li_k(t)}{t} dt \quad z \in \mathbb{C}, |z| < 1, k \geq 1.$$

En outre, elles possèdent des liens avec les valeurs spéciales de la fonction ζ de Riemann, e.g.

$$4 Li_3(-1) = -3 \zeta(3) = -3 \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^3}.$$

1.2 Point de vue faisceautique

Comme mentionné ci-dessous, il existe également des (extensions de) faisceaux appelé(e)s « polylogarithmes » et certain(e)s correspondent, en un sens précisé ci-après (cf partie 1.2.3), aux fonctions Li_k . Cette approche faisceautique, qui s'appuie sur la théorie de Hodge et qui est due à Beilinson, Deligne, Ramakrishnan..., présente certains avantages comparée à l'approche fonctionnelle. Nous reviendrons par la suite sur ce point (cf partie 2).

1.2.1 Coefficients en théorie de Hodge

Soit $K \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}\}$.

Structures de Hodge pures

Une K -structure de Hodge pure de poids n ($n \in \mathbb{Z}$) est un couple $(V, (F^p)_{p \in \mathbb{Z}})$, où V est un K -vecteuriel de dimension finie, F^\bullet est une filtration décroissante finie et exhaustive de $V \otimes_K \mathbb{C}$ par des sous-espaces vectoriels complexes, tel que $V \otimes_K \mathbb{C} = \bigoplus_{p+q=n} F^p \cap \overline{F^q}$, $\overline{F^q}$ désignant le sous-espace conjugué de F^q dans $V \otimes_K \mathbb{C}$.

Par exemple, pour chaque $n \in \mathbb{Z}$, le K -vectoriel $V := (2\pi i)^n K \subseteq \mathbb{C}$ et la filtration décroissante $(F^p)_{p \in \mathbb{Z}}$ de $V \otimes_K \mathbb{C}$ définie par $F^{-n} = V \otimes_K \mathbb{C}$ et $F^{-n+1} = 0$ définissent une K -structure de Hodge pure de poids $-2n$ notée $K(n)$. D'autres exemples de K -structures de Hodge pures sont donnés par les groupes de cohomologie singulière $H^\bullet(X(\mathbb{C}), K)$ d'une variété algébrique complexe propre et lisse X munis de leurs filtrations de Hodge (vérifiant $F^p \cap \overline{F^q} = H^q(X, \Omega^p)$ pour $p, q \in \mathbb{N}$) [D2, partie 2.2]. Ces K -structures de Hodge mixtes géométriques possèdent une propriété remarquable : elles peuvent être munies de polarisations, i.e. pour chaque $n \in \mathbb{N}$, il existe une forme bilinéaire $H^n(X(\mathbb{C}), K) \times H^n(X(\mathbb{C}), K) \rightarrow K(-n)$ respectant les filtrations et vérifiant une condition de positivité, après extension des scalaires de \mathbb{Q} à \mathbb{R} dans le cas $K = \mathbb{Q}$ (cf [D2, Déf. 2.1.15] pour une définition précise).

Structures de Hodge mixtes

Une K -structure de Hodge mixte est un triplet $(V, (W_k)_{k \in \mathbb{Z}}, (F^p)_{p \in \mathbb{Z}})$ où V est un K -vectoriel de dimension finie, W_\bullet est une filtration croissante finie et exhaustive de V par des sous- K -vectoriels et F^\bullet est une filtration décroissante finie et exhaustive de $V \otimes_K \mathbb{C}$ par des sous- \mathbb{C} -vectoriels, tel que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, le gradué par le poids W_n/W_{n-1} , muni de la filtration induite par $(F^p)_{p \in \mathbb{Z}}$ sur $(W_n/W_{n-1}) \otimes_K \mathbb{C}$, est une K -structure de Hodge pure de poids n . La filtration W_\bullet (resp. F^\bullet) est appelée filtration par le poids (resp. filtration de Hodge).

Une K -structure de Hodge $(V, (F^p)_{p \in \mathbb{Z}})$ pure de poids n ($n \in \mathbb{Z}$) définit naturellement une K -structure de Hodge mixte. En effet, il suffit d'adjoindre au couple $(V, (F^p)_{p \in \mathbb{Z}})$ la filtration croissante $(W_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ de V définie par $W_n = V$ et $W_{n-1} = 0$.

Comme pour les K -structures de Hodge pures, on peut construire des K -structures de Hodge mixtes à partir d'objets géométriques. En effet, si X est une variété algébrique complexe, on peut munir naturellement les groupes de cohomologie singulière $H^\bullet(X(\mathbb{C}), K)$ de deux filtrations, de sorte que les triplets obtenus vérifient les axiomes des K -structures de Hodge mixtes [D3, Prop. 8.2.2]. De plus, les gradués par le poids de ces K -structures de Hodge mixtes géométriques peuvent être équipés de polarisations. Une K -structure de Hodge mixte vérifiant cette dernière propriété est dite polarisable.

Soit alors SHM_K la catégorie dont les objets sont les K -structures de Hodge mixtes polarisables et dont les morphismes sont les morphismes K -linéaires respectant les filtrations, i.e. : si $(V, (W_k)_{k \in \mathbb{Z}}, (F^p)_{p \in \mathbb{Z}})$ et $(V', (W'_k)_{k \in \mathbb{Z}}, (F'^p)_{p \in \mathbb{Z}})$ sont deux K -structures de Hodge mixtes polarisables, un morphisme de $(V, (W_k)_{k \in \mathbb{Z}}, (F^p)_{p \in \mathbb{Z}})$ vers $(V', (W'_k)_{k \in \mathbb{Z}}, (F'^p)_{p \in \mathbb{Z}})$ est une application K -linéaire $f: V \rightarrow V'$ telle que pour tout $k, p \in \mathbb{Z}$, $f(W_k) \subseteq W'_k$ et $f \otimes \text{Id}_{\mathbb{C}}(F^p) \subseteq F'^p$.

On dispose de deux bifoncteurs $\underline{\text{Hom}}, \otimes: SHM_K \times SHM_K \rightarrow SHM_K$ qui commutent via le foncteur oubli

$$SHM_K \rightarrow K\text{-Vect}, \quad (V, (W_k)_{k \in \mathbb{Z}}, (F^p)_{p \in \mathbb{Z}}) \mapsto V$$

avec les bifoncteurs correspondants au niveau de la catégorie des K -vectoriels (cf la partie I.I de [D2] pour la définition de $\underline{\text{Hom}}$ et \otimes dans la catégorie SHM_K).

La catégorie SHM_K est abélienne [D2, Thm 2.3.5] et l'on dispose d'un foncteur « extension des scalaires de \mathbb{Q} à \mathbb{R} »

$$\cdot \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}: SHM_{\mathbb{Q}} \rightarrow SHM_{\mathbb{R}}, \quad (V, (W_k)_{k \in \mathbb{Z}}, (F^p)_{p \in \mathbb{Z}}) \mapsto (V \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}, (W_k \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R})_{k \in \mathbb{Z}}, (F^p)_{p \in \mathbb{Z}})$$

qui est exact.

Variations de structures de Hodge mixtes

Rappels 1.1 –

1) Soit X un espace topologique. On note

$$\underline{\cdot}_X: \{K\text{-vectoriel de dimension finie}\} \rightarrow \{\text{faisceau en } K\text{-vectoriels au dessus de } X\}$$

le foncteur qui associe à un K -vectoriel de dimension finie le faisceau constant correspondant au dessus de X . Un faisceau F en K -vectoriels de dimensions finies au dessus de X est appelé système local de K -vectoriels de dimensions finies au dessus de X si F est localement constant, i.e. s'il existe un recouvrement ouvert $(U_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ de X tel que pour chaque $\lambda \in \Lambda$, le faisceau $F|_{U_\lambda}$ est dans l'image essentielle de $\underline{\cdot}_{U_\lambda}$.

2) Soit X un espace topologique connexe, localement connexe par arc et localement simplement connexe. Soit $x \in X$ un point base. En associant à chaque F , système local de K -vectoriels de dimension finie au dessus de X , sa représentation de monodromie

$$\rho_x(F): \pi_1(X, x) \rightarrow \text{End}_{K\text{-Vect}}(F_x),$$

on définit un foncteur ρ_x , de la catégorie des systèmes locaux de K -vectoriels de dimension finie au dessus de X vers la catégorie des représentations K -linéaires de dimension finie de $\pi_1(X, x)$. C'est une équivalence de catégories (cf [D1, partie I.1]).

Les faisceaux que l'on va considérer sont les K -variations de structures de Hodge mixtes polarisables et admissibles. Pour la définition précise de ces objets, on renvoie à la première partie de [Ka]. On rappelle ici simplement qu'une K -variation de structures de Hodge mixtes sur une variété algébrique complexe lisse X est donnée par un triplet $(\mathbb{V}, (\mathbb{W}_k)_{k \in \mathbb{Z}}, (\mathcal{F}^p)_{p \in \mathbb{Z}})$ où \mathbb{V} est un système local de K -vectoriels de dimensions finies au dessus de $X(\mathbb{C})$ muni de la topologie transcendante, \mathbb{W}_\bullet est une filtration croissante de \mathbb{V} par des sous-systèmes locaux de K -vectoriels et \mathcal{F}^\bullet est une filtration décroissante de $\mathbb{V} \otimes \mathcal{O}_{X^{an}}$ par des sous-fibrés vectoriels holomorphes vérifiant, en particulier, que pour chaque $x \in X(\mathbb{C})$, $(\mathbb{V}, (\mathbb{W}_k)_{k \in \mathbb{Z}}, (\mathcal{F}^p)_{p \in \mathbb{Z}})_x \in \text{Ob}(SHM_K)$. La filtration \mathbb{W}_\bullet (resp. \mathcal{F}^\bullet) est appelée filtration par le poids (resp. filtration de Hodge).

Une K -variation de structures de Hodge mixtes au dessus d'une variété algébrique complexe lisse X peut donc être vue comme une famille continue d'objets de SHM_K paramétrisée par les points de $X(\mathbb{C})$.

La géométrie nous fournit à nouveau une classe d'exemples de tels objets. Si $\pi: X \rightarrow Y$ est un morphisme propre et lisse entre variétés algébriques complexes lisses, chacune des images directes supérieures $R^\bullet \pi_* K$ est un système local au dessus de $Y(\mathbb{C})$ qui peut être munie de deux filtrations et le triplet résultant satisfait aux axiomes des K -variations de structures de Hodge mixtes. En fait, ces K -variations de structures de Hodge sont pures. (Une K -variation de structures de Hodge mixtes est dite pure si un seul de ses gradués par le poids est non nul.) Pour chaque $y \in Y(\mathbb{C})$, la K -structure de Hodge sur $(R^\bullet \pi_* K)_y = H^\bullet(X_y(\mathbb{C}), K)$ est la K -structure de Hodge pure construite à l'aide de la théorie de Hodge mentionnée précédemment. Ici, X_y désigne la fibre de π au dessus de y , fibre qui est une variété algébrique complexe propre et lisse.

On dispose d'une notion de morphisme de K -variations de structures de Hodge mixtes au dessus de X définie comme dans le cas des K -structures de Hodge mixtes et on obtient ainsi une catégorie, la catégorie des K -variations de structures de Hodge mixtes polarisables et admissibles, notée $VSHM(X)_K$. Celle-ci est abélienne.

De façon analogue à ce que l'on a vu pour la catégorie SHM_K , on dispose de bifoncteurs $\underline{\text{Hom}}, \otimes : VSHM(X)_K \times VSHM(X)_K \rightarrow VSHM(X)_K$ qui commutent via le foncteur oubli

$$VSHM(X)_K \rightarrow \{\text{système local de } K\text{-vectoriels au dessus de } X\}, \quad (\mathbb{V}, (W_k)_{k \in \mathbb{Z}}, (F^p \otimes_{X^{an}})_{p \in \mathbb{Z}}) \mapsto \mathbb{V}$$

avec les bifoncteurs correspondants au niveau de la catégorie des systèmes locaux de K -vectoriels au dessus de X .

De plus, à tout $(V, (W_k)_{k \in \mathbb{Z}}, (F^p)_{p \in \mathbb{Z}}) \in \text{Ob}(SHM_K)$, on associe naturellement l'objet de $VSHM(X)$

$$(V, (W_k)_{k \in \mathbb{Z}}, (F^p)_{p \in \mathbb{Z}})_X := \left(\underline{V}_{X(\mathbb{C})}, \left(\underline{W}_k_{X(\mathbb{C})} \right)_{k \in \mathbb{Z}}, (F^p)_{p \in \mathbb{Z}} \right).$$

On définit ainsi un foncteur $cst_X : SHM_K \rightarrow VSHM(X)_K$. Plus généralement, si $f : X \rightarrow Y$ est un morphisme entre variétés algébriques complexes lisses, on dispose d'un pullback $f^* : VSHM(Y)_K \rightarrow VSHM(X)_K$.

Si $\mathbb{V} \in \text{Ob}(VSHM(X)_K)$, on pose $\mathbb{V}(n) := \mathbb{V} \otimes K(n)_X$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Un objet de $VSHM(X)_K$ est dit unipotent s'il existe une filtration (indexée par \mathbb{Z}) de cet objet telle que les gradués de cette filtration soient dans l'image essentielle de cst_X . On note $VSHMU(X)_K$ la sous-catégorie pleine de $VSHM(X)_K$ dont les objets sont les objets unipotents de $VSHM(X)_K$. C'est une catégorie abélienne.

1.2.2 Définition faisceautique du polylogarithme

Avant de définir le polylogarithme, on va introduire un pro-objet de $VSHMU(\mathbb{G}_{m,\mathbb{C}})_{\mathbb{Q}}$ appelé logarithme (la terminologie vient de la description explicite de cet objet que l'on donnera dans la partie 1.2.3). À cette fin, on rappelle brièvement certains résultats de la théorie de Hodge.

On considère la complétion de $\mathbb{Q}[\pi_1(\mathbb{C}^\times, 1)]$, l'algèbre du groupe $\pi_1(\mathbb{C}^\times, 1) = \pi_1(\mathbb{G}_{m,\mathbb{C}}(\mathbb{C}), 1)$ (isomorphe à \mathbb{Z}), relativement au noyau de l'augmentation

$$\mathbb{Q}[\pi_1(\mathbb{C}^\times, 1)] \rightarrow \mathbb{Q}, \quad \gamma \in \pi_1(\mathbb{C}^\times, 1) \mapsto 1$$

noté \mathfrak{a} , i.e.

$$\mathbb{Q}[\pi_1(\mathbb{C}^\times, 1)]^\wedge := \varprojlim_{N \in \mathbb{N}^*} \mathbb{Q}[\pi_1(\mathbb{C}^\times, 1)]/\mathfrak{a}^N$$

qui est isomorphe à $\mathbb{Q}[[\gamma_0 - 1]]$, où γ_0 désigne l'un des deux générateurs de $\pi_1(\mathbb{C}^\times, 1)$.

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On considère la \mathbb{Q} -structure de Hodge mixte polarisable canonique sur $\mathbb{Q}[\pi_1(\mathbb{C}^\times, 1)]/\mathfrak{a}^N$ construite à l'aide de la théorie des intégrales itérées de Chen (cf [C] et [H]). Les morphismes canoniques de projection

$$p_{N,M} : \mathbb{Q}[\pi_1(\mathbb{C}^\times, 1)]/\mathfrak{a}^N \rightarrow \mathbb{Q}[\pi_1(\mathbb{C}^\times, 1)]/\mathfrak{a}^M \quad (N, M \in \mathbb{N}^*, N \geq M)$$

respectant les filtrations, i.e. étant des morphismes de $SHM_{\mathbb{Q}}$, $\mathbb{Q}[\pi_1(\mathbb{C}^\times, 1)]^\wedge$ hérite d'une pro- \mathbb{Q} -structure de Hodge mixte polarisable canonique. On rassemble dans la proposition suivante deux propriétés de compatibilité entre la pro- \mathbb{Q} -structure de Hodge mixte polarisable et la structure de \mathbb{Q} -algèbre de $\mathbb{Q}[\pi_1(\mathbb{C}^\times, 1)]^\wedge$ (cf [HZ]).

Proposition 1.2 –

- 1) L'élément unité de l'algèbre $\mathbb{Q}[\pi_1(\mathbb{C}^\times, 1)]^\wedge$ induit un morphisme de pro- \mathbb{Q} -structures de Hodge mixtes

$$\varepsilon: \mathbb{Q}(0) \rightarrow \mathbb{Q}[\pi_1(\mathbb{C}^\times, 1)]^\wedge.$$

- 2) Le morphisme induit par la multiplication dans $\mathbb{Q}[\pi_1(\mathbb{C}^\times, 1)]^\wedge$

$$\mu: \mathbb{Q}[\pi_1(\mathbb{C}^\times, 1)]^\wedge \rightarrow \underline{\text{Hom}}(\mathbb{Q}[\pi_1(\mathbb{C}^\times, 1)]^\wedge, \mathbb{Q}[\pi_1(\mathbb{C}^\times, 1)]^\wedge)$$

est un morphisme de pro- \mathbb{Q} -structures de Hodge mixtes.

Soit $\mathbb{V} \in \text{Ob}(VSHMU(\mathbb{G}_{m,\mathbb{C}}))_{\mathbb{Q}}$. On désigne par $\overline{\mathbb{V}}$ le système local au dessus de $\mathbb{C}^\times = \mathbb{G}_{m,\mathbb{C}}(\mathbb{C})$ sous-jacent à \mathbb{V} . Comme \mathbb{V} est une variation unipotente, la représentation de monodromie

$$\rho_1(\mathbb{V}): \pi_1(\mathbb{C}^\times, 1) \rightarrow \text{End}_{\mathbb{Q}\text{-Vect}}(\overline{\mathbb{V}}_1),$$

$\overline{\mathbb{V}}_1$ désignant le germe en $1 \in \mathbb{C}^\times$ de $\overline{\mathbb{V}}$, induit un morphisme canonique de \mathbb{Q} -algèbres, également noté $\rho_1(\mathbb{V})$:

$$\rho_1(\mathbb{V}): \mathbb{Q}[\pi_1(\mathbb{C}^\times, 1)]^\wedge \rightarrow \text{End}_{\mathbb{Q}\text{-Vect}}(\overline{\mathbb{V}}_1).$$

Ce morphisme $\rho_1(\mathbb{V})$ possède la propriété remarquable suivante (cf [HZ]).

Proposition 1.3 – Le morphisme $\rho_1(\mathbb{V}): \mathbb{Q}[\pi_1(\mathbb{C}^\times, 1)]^\wedge \rightarrow \text{End}_{\mathbb{Q}\text{-Vect}}(\overline{\mathbb{V}}_1)$ est un morphisme de pro- \mathbb{Q} -structures de Hodge mixtes de $\mathbb{Q}[\pi_1(\mathbb{C}^\times, 1)]^\wedge$ vers $\underline{\text{Hom}}(\mathbb{V}_1, \mathbb{V}_1)$.

On peut à présent énoncer le théorème de Hain-Zucker (voir [HZ] pour une preuve et comparer avec le 2) du rappel 1.1) qui d'une part donne une description alternative de la catégorie $VSHMU(\mathbb{G}_{m,\mathbb{C}})_{\mathbb{Q}}$ et d'autre part nous permet de définir le logarithme.

Théorème 1.4 – Le foncteur

$$VSHMU(\mathbb{G}_{m,\mathbb{C}})_{\mathbb{Q}} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{V} \text{ objet de } SHM_{\mathbb{Q}} \text{ muni d'un} \\ \text{morphisme dans } \text{pro-}SHM_{\mathbb{Q}} \\ \mathbb{Q}[\pi_1(\mathbb{C}^\times, 1)]^\wedge \rightarrow \underline{\text{Hom}}(\mathbb{V}_1, \mathbb{V}_1) \\ \text{respectant les structures de} \\ \mathbb{Q}\text{-algèbres} \end{array} \right\}$$

$$\mathbb{V} \quad \mapsto \quad (\mathbb{V}_1, \rho_1(\mathbb{V}))$$

est une équivalence de catégories.

Définition 1.5 – Le logarithme, noté $\mathcal{L}og$, est le pro-objet de $VSHMU(\mathbb{G}_{m,\mathbb{C}})_{\mathbb{Q}}$ qui a pour image, sous le foncteur du théorème 1.4, le couple

$$(\mathbb{Q}[\pi_1(\mathbb{C}^\times, 1)]^\wedge, \mu: \mathbb{Q}[\pi_1(\mathbb{C}^\times, 1)]^\wedge \rightarrow \underline{\mathbf{Hom}}(\mathbb{Q}[\pi_1(\mathbb{C}^\times, 1)]^\wedge, \mathbb{Q}[\pi_1(\mathbb{C}^\times, 1)]^\wedge),$$

où μ est le morphisme induit par la multiplication introduit dans la proposition 1.2.

Le logarithme $\mathcal{L}og$ est donc défini à isomorphisme (non unique) près et, par définition, le germe en 1 de $\mathcal{L}og$ est le pro-objet $\mathbb{Q}[\pi_1(\mathbb{C}^\times, 1)]^\wedge$ de $SHM_{\mathbb{Q}}$. D’après la proposition 1.2, on dispose donc d’un morphisme canonique dans $pro-SHM_{\mathbb{Q}}$

$$\varepsilon: \mathbb{Q}(0) \rightarrow \mathbb{Q}[\pi_1(\mathbb{C}^\times, 1)]^\wedge = \mathcal{L}og_1.$$

Le théorème 1.4 est équivalent au théorème suivant (cf Thm 3.5 de la partie I de [W1]).

Théorème 1.6 – Le foncteur

$$VSHMU(\mathbb{G}_{m,\mathbb{C}})_{\mathbb{Q}} \rightarrow \mathbb{Q}\text{-Vect}, \quad \mathbb{V} \mapsto \mathbf{Hom}_{SHM_{\mathbb{Q}}}(\mathbb{Q}(0), \mathbb{V}_1)$$

est pro-représentable. C’est à dire qu’il existe un couple (\mathbb{U}, u) , où \mathbb{U} est un pro-objet de $VSHMU(\mathbb{G}_{m,\mathbb{C}})_{\mathbb{Q}}$ et $u: \mathbb{Q}(0) \rightarrow \mathbb{U}_1$ est un morphisme dans $pro-SHM_{\mathbb{Q}}$, tel que pour tout $\mathbb{V} \in \mathbf{Ob}(VSHMU(\mathbb{G}_{m,\mathbb{C}})_{\mathbb{Q}})$, l’application

$$\mathbf{Hom}_{VSHMU(\mathbb{G}_{m,\mathbb{C}})_{\mathbb{Q}}}(\mathbb{U}, \mathbb{V}) \rightarrow \mathbf{Hom}_{SHM_{\mathbb{Q}}}(\mathbb{Q}(0), \mathbb{V}_1), \quad \varphi \mapsto \varphi_1 \circ u,$$

où $\varphi_1: \mathbb{U}_1 \rightarrow \mathbb{V}_1$ est l’application induite par φ au niveau des germes en 1, est un isomorphisme.

Le couple $(\mathbb{U}, u) = (\mathcal{L}og, \varepsilon)$ est solution du problème universel énoncé dans le théorème 1.6. Par suite, le couple $(\mathcal{L}og, \varepsilon)$ n’admet pas d’automorphisme non trivial, d’où une définition rigide de $\mathcal{L}og$ (ou plus justement de $(\mathcal{L}og, \varepsilon)$).

On donne maintenant un système projectif explicite d’objets de $VSHMU(\mathbb{G}_{m,\mathbb{C}})_{\mathbb{Q}}$ qui décrit le logarithme.

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Le morphisme

$$\mu^N: \mathbb{Q}[\pi_1(\mathbb{C}^\times, 1)]/\mathfrak{a}^N \rightarrow \underline{\mathbf{Hom}}(\mathbb{Q}[\pi_1(\mathbb{C}^\times, 1)]/\mathfrak{a}^N, \mathbb{Q}[\pi_1(\mathbb{C}^\times, 1)]/\mathfrak{a}^N)$$

induit par la multiplication dans $\mathbb{Q}[\pi_1(\mathbb{C}^\times, 1)]/\mathfrak{a}^N$ est un morphisme dans $SHM_{\mathbb{Q}}$ (cf proposition 1.2). Soit $\mathcal{L}og^N$ l’objet de $VSHMU(\mathbb{G}_{m,\mathbb{C}})_{\mathbb{Q}}$ dont l’image, sous le foncteur du théorème 1.4, est le couple

$$(\mathbb{Q}[\pi_1(\mathbb{C}^\times, 1)]/\mathfrak{a}^N, \mu^N \circ pr_N: \mathbb{Q}[\pi_1(\mathbb{C}^\times, 1)]^\wedge \rightarrow \underline{\mathbf{Hom}}(\mathbb{Q}[\pi_1(\mathbb{C}^\times, 1)]/\mathfrak{a}^N, \mathbb{Q}[\pi_1(\mathbb{C}^\times, 1)]/\mathfrak{a}^N),$$

où pr_N est la projection canonique $\mathbb{Q}[\pi_1(\mathbb{C}^\times, 1)]^\wedge \rightarrow \mathbb{Q}[\pi_1(\mathbb{C}^\times, 1)]/\mathfrak{a}^N$. Comme dans le cas de $\mathcal{L}og$, $\mathcal{L}og^N$ est défini à isomorphisme (non unique) près, la fibre en 1 de $\mathcal{L}og^N$ est $\mathbb{Q}[\pi_1(\mathbb{C}^\times, 1)]/\mathfrak{a}^N$ et le morphisme dans $SHM_{\mathbb{Q}}$

$$\varepsilon^N: \mathbb{Q}(0) \rightarrow \mathbb{Q}[\pi_1(\mathbb{C}^\times, 1)]/\mathfrak{a}^N = \mathcal{L}og_1^N$$

induit par l’élément unité de $\mathbb{Q}[\pi_1(\mathbb{C}^\times, 1)]/\mathfrak{a}^N$ (cf proposition 1.2), permet de rigidifier la définition de $\mathcal{L}og^N$.

Soient $N, M \in \mathbb{N}^*$, $N \geq M$. Le morphisme de projection

$$p_{N,M}: \mathbb{Q}[\pi_1(\mathbb{C}^\times, 1)]/\mathfrak{a}^N \rightarrow \mathbb{Q}[\pi_1(\mathbb{C}^\times, 1)]/\mathfrak{a}^M$$

est $\mathbb{Q}[\pi_1(\mathbb{C}^\times, 1)]^\wedge$ -équivariant pour l'action μ^N (resp. μ^M) sur $\mathbb{Q}[\pi_1(\mathbb{C}^\times, 1)]/\mathfrak{a}^N$ (resp. $\mathbb{Q}[\pi_1(\mathbb{C}^\times, 1)]/\mathfrak{a}^M$) et respecte les morphismes ε^N et ε^M . D'après l'équivalence de catégories donnée par le théorème 1.4, il correspond donc à un unique morphisme dans $VSHMU(\mathbb{G}_{m,\mathbb{C}})_\mathbb{Q}$, noté $\pi_{N,M}$,

$$\pi_{N,M}: \mathcal{L}og^N \rightarrow \mathcal{L}og^M.$$

On a alors, par construction du $\mathcal{L}og$, l'identification canonique suivante

$$(\mathcal{L}og, \varepsilon) = (((\mathcal{L}og^N)_{N \in \mathbb{N}^*}, (\pi_{N,M})_{N, M \in \mathbb{N}^*, N \geq M}), (\varepsilon^N)_{N \in \mathbb{N}^*}).$$

Le pro-système local de \mathbb{Q} -vectoriels sous-jacent à $\mathcal{L}og$ est, par définition, caractérisé par le fait que sa représentation de monodromie est donnée par l'action induite par la multiplication de $\pi_1(\mathbb{C}^\times, 1)$ sur $\mathbb{Q}[\pi_1(\mathbb{C}^\times, 1)]^\wedge$. On donnera plus loin une autre description du pro-système local de \mathbb{Q} -vectoriels sous-jacent à $\mathcal{L}og$ (cf partie 1.2.3).

La construction du logarithme de $\mathbb{G}_{m,\mathbb{C}}$ esquissée ci-dessous vaut en fait pour toute variété algébrique complexe lisse. Les résultats suivants sont en revanche, eux, propres à la situation géométrique considérée.

On ne donne pas ici de détails sur les filtrations dont est muni le pro-système local de \mathbb{Q} -vectoriels sous-jacent à $\mathcal{L}og$. On mentionne simplement la proposition suivante qui nous donne une description du gradué par le poids de $\mathcal{L}og$ (cf partie III de [W1]).

Proposition 1.7 – $\prod_{k \in \mathbb{Z}} Gr_k^w \mathcal{L}og = \prod_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Q}(n)_{\mathbb{G}_{m,\mathbb{C}}}$

Le logarithme possède également une propriété connue sous le nom de *principe de rigidité* (cf partie III de [W1]) donnée ci-dessous et grâce à laquelle on peut définir l'extension de faisceaux polylogarithme.

Proposition 1.8 – *On a un isomorphisme canonique*

$$\kappa: Ext_{VSHM(U)_\mathbb{Q}}^1(\mathbb{Q}(0)_U, \mathcal{L}og|_U) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Q},$$

où U désigne l'ouvert complémentaire de la section unité $1: \text{Spec}(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{G}_{m,\mathbb{C}}$ dans $\mathbb{G}_{m,\mathbb{C}}$.

Définition 1.9 – *Le polylogarithme, noté $\mathcal{P}ol$, est l'unique élément de $Ext_{VSHM(U)_\mathbb{Q}}^1(\mathbb{Q}(0)_U, \mathcal{L}og|_U)$ dont l'image par κ est $1 \in \mathbb{Q}$.*

Comme $\mathcal{L}og$ est un pro-objet, le polylogarithme est en fait une pro-extension :

$$\mathcal{P}ol = ((\mathcal{P}ol^N)_{N \in \mathbb{N}^*}, ((\pi_{N,M})_*)_{N, M \in \mathbb{N}^*, N \geq M \geq 0}), \text{ où } \mathcal{P}ol^N \in Ext_{VSHM(U)_\mathbb{Q}}^1(\mathbb{Q}(0)_U, \mathcal{L}og|_U^N).$$

Dans la suite, on identifie $\mathcal{P}ol^N \in Ext_{VSHM(U)_\mathbb{Q}}^1(\mathbb{Q}(0)_U, \mathcal{L}og|_U^N)$ à un terme médian d'une suite exacte courte représentant $\mathcal{P}ol^N$ dans la description des Ext-groupes à la Yoneda :

$$\mathcal{P}ol^N = [0 \rightarrow \mathcal{L}og|_U^N \rightarrow \mathcal{P}ol^N \rightarrow \mathbb{Q}(0)_U \rightarrow 0] \quad (N \in \mathbb{N}^*)$$

et donc $\mathcal{P}ol^N$ est désormais considéré comme un objet de $VSHM(U)_\mathbb{Q}$.

1.2.3 Description explicite du polylogarithme faisceautique

On fixe un $N \in \mathbb{N}$. Dans cette partie, on donne une description explicite de $\mathcal{L}og^N$ et de $\mathcal{P}ol^N$, ou plus exactement des systèmes locaux de \mathbb{Q} -vectoriels qui leurs sont sous-jacents.

Le système local de \mathbb{Q} -vectoriels au dessus de \mathbb{C}^\times sous-jacent à $\mathcal{L}og^N$ est décrit par la matrice $(N+1) \times (N+1)$ de fonctions multivaluées sur \mathbb{C}^\times suivante :

$$\mathcal{L}_N := \exp \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \frac{-1}{2\pi i} \log & \ddots & & & & \vdots \\ 0 & \frac{-1}{2\pi i} \log & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \frac{-1}{2\pi i} \log & 0 \end{pmatrix}.$$

Par cela, on entend que pour chaque $z \in \mathbb{C}^\times$, le \mathbb{Q} -vectoriel sous-jacent à la structure de Hodge mixte $\mathcal{L}og_z^N$ est $\mathcal{L}_N(z)\mathbb{Q}^{N+1} \subseteq \mathbb{C}^{N+1}$. (En particulier, le \mathbb{Q} -vectoriel $\mathcal{L}_N(z)\mathbb{Q}^{N+1}$ est bien défini.)

Quant au faisceau polylogarithme $\mathcal{P}ol^N$, une description du système local de \mathbb{Q} -vectoriels au dessus de $U(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ qui lui est sous-jacent est donnée par la matrice $(N+2) \times (N+2)$ de fonctions multivaluées sur $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ ci-dessous, matrice dans laquelle figurent les fonctions polylogarithmes Li_1, \dots, Li_N .

$$\mathcal{P}_N := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & & & & & \\ \frac{1}{2\pi i} Li_1 & & & & & \\ \vdots & & & \mathcal{L}_N & & \\ \vdots & & & & & \\ -\left(\frac{-1}{2\pi i}\right)^N Li_N & & & & & \end{pmatrix}$$

À nouveau, cela signifie que pour chaque $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$, le \mathbb{Q} -vectoriel sous-jacent à la structure de Hodge mixte $\mathcal{P}ol_z^N$ est $\mathcal{P}_N(z)\mathbb{Q}^{N+2} \subseteq \mathbb{C}^{N+2}$. Le \mathbb{Q} -vectoriel $\mathcal{P}_N(z)\mathbb{Q}^{N+2} \subseteq \mathbb{C}^{N+2}$ est, en particulier, bien défini et ceci encode les informations concernant la monodromie des fonctions Li_k ($k \in \mathbb{N}$).

En fait, on peut également lire la filtration par le poids et la filtration de Hodge de $\mathcal{L}og^N$ (resp. $\mathcal{P}ol^N$) sur la matrice \mathcal{L}_N (resp. \mathcal{P}_N). On renvoie à la partie IV de [W1] pour une étude beaucoup plus détaillée.

1.2.4 Polylogarithme et valeurs spéciales de ζ

Comme on vient de le voir, le faisceau polylogarithme est lié aux fonctions polylogarithmes Li_k ($k \in \mathbb{N}$) qui elles-mêmes ont des relations avec les valeurs spéciales de la fonction ζ de Riemann (cf partie 1.1). On explique ici une construction qui permet, à partir du faisceau $\mathcal{P}ol$, d'obtenir des valeurs spéciales de ζ .

Soit $x \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ une racine de l'unité. Le faisceau $\mathcal{L}og$ possède une autre propriété appelée *principe de scindage* énoncée ci-dessous (cf Lem. 3.10 de la partie IV de [W1] pour sa preuve).

Proposition 1.10 – $x^* \mathcal{L}og = \prod_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Q}(n)$.

Ainsi $x^* \mathcal{P}ol \in \text{Ext}_{SHM_{\mathbb{Q}}}^1(\mathbb{Q}(0), x^* \mathcal{L}og|_U) = \prod_{n \in \mathbb{N}} \text{Ext}_{SHM_{\mathbb{Q}}}^1(\mathbb{Q}(0), \mathbb{Q}(n))$.

Définition 1.11 – Soit $n \in \mathbb{N}$. On appelle *n-ième classe d'Eisenstein associée à x* , et on note $\mathcal{E}is_x^n$, la projection de $x^* \mathcal{P}ol$ sur le facteur $\text{Ext}_{SHM_{\mathbb{Q}}}^1(\mathbb{Q}(0), \mathbb{Q}(n))$.

Ces classes d'Eisenstein sont liées à des valeurs spéciales de la fonction ζ . On se restreint au cas $x = -1$ et $n = 3$ pour préciser cette relation.

Le théorème suivant nous donne un isomorphisme explicite entre les \mathbb{R} -espaces vectoriels \mathbb{R} et $\text{Ext}_{SHM_{\mathbb{R}}}^1(\mathbb{R}(0), \mathbb{R}(3))$. Pour la preuve, on renvoie le lecteur à [HW2].

Théorème 1.12 – *Le morphisme*

$$\iota: \mathbb{R} \rightarrow \text{Ext}_{SHM_{\mathbb{R}}}^1(\mathbb{R}(0), \mathbb{R}(3)), \quad t \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{-t}{(2\pi i)^3} & 1 \end{pmatrix},$$

où la matrice $\iota(t)$ ($t \in \mathbb{R}$) correspond à la classe de la suite exacte suivante

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \mathbb{R}(3) & \rightarrow & V_t & \rightarrow & \mathbb{R}(0) \rightarrow 0, \\ & & x & \mapsto & (0, x) & & \\ & & & & (x, y) & \mapsto & x \end{array}$$

$V(t)$ désignant le sous-espace $\langle (1, -t), (0, (2\pi i)^3) \rangle_{\mathbb{R}} \subseteq \mathbb{C}^2$ muni des deux filtrations diagonales, est un isomorphisme de \mathbb{R} -vectoriels.

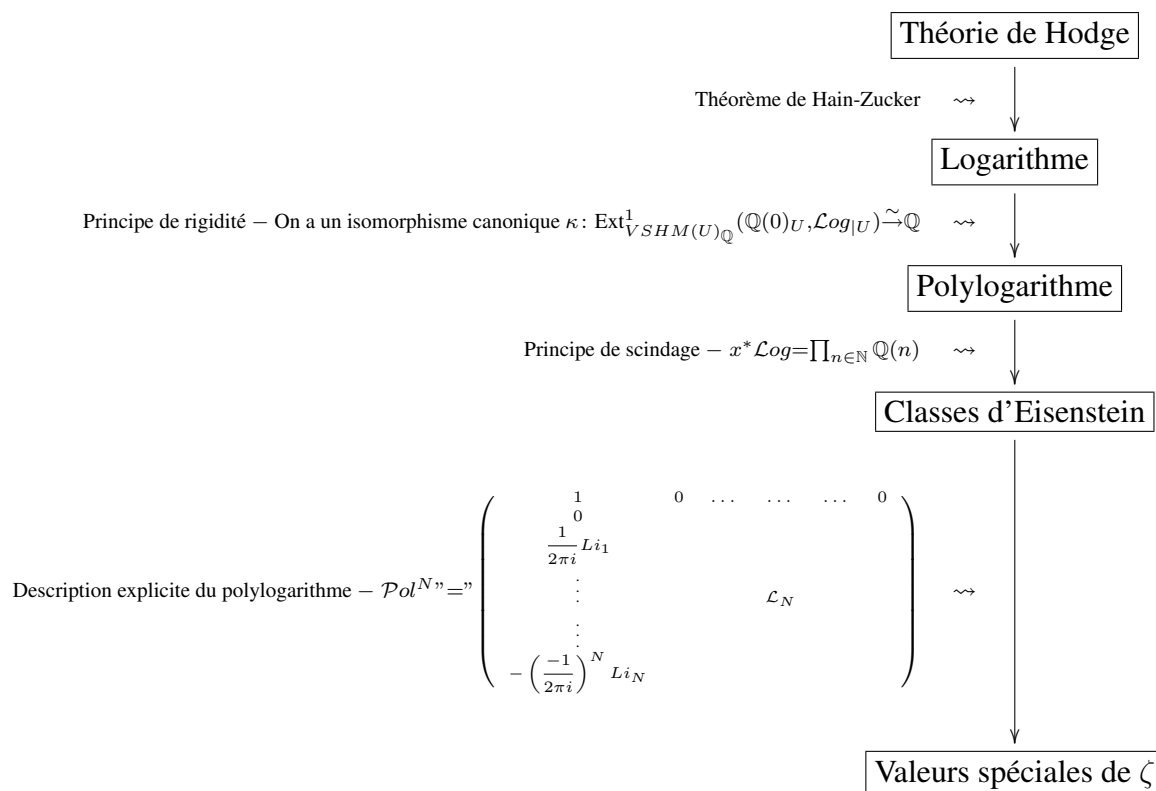
En utilisant la matrice \mathcal{P}_3 et la définition de l'isomorphisme ι , on vérifie que l'image de $\mathcal{E}is_{-1}^3$ sous la composition

$$\text{Ext}_{SHM_{\mathbb{Q}}}^1(\mathbb{Q}(0), \mathbb{Q}(3)) \xrightarrow{\cdot \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}} \text{Ext}_{SHM_{\mathbb{R}}}^1(\mathbb{R}(0), \mathbb{R}(3)) \xrightarrow{\iota^{-1}} \mathbb{R}$$

est $-Li_3(-1) = \frac{3}{4}\zeta(3)$.

2 Motivation et problématique

Il importe de souligner que les définitions du faisceau logarithme, de l'extension polylogarithme et des classes d'Eisenstein font uniquement appel à la théorie de Hodge et n'utilisent ni les fonctions polylogarithmes Li_k ($k \in \mathbb{N}$) ni les descriptions explicites obtenues dans la partie 1.2.3. Les fonctions Li_k ($k \in \mathbb{N}$) ont, en revanche, été utilisées pour établir une relation entre les classes d'Eisenstein et la fonction ζ . Le diagramme suivant fournit une synthèse de l'étude faite dans la partie 1.2.



Le lecteur peut s'interroger sur les motivations qui conduisent à considérer les polylogarithmes sous leur angle faisceautique plutôt que fonctionnel. Par exemple, l'approche fonctionnelle fournit un lien plus immédiat entre polylogarithmes et valeurs spéciales de la fonction ζ .

Il y a au moins deux raisons pour s'intéresser à l'aspect faisceautique des polylogarithmes comme on l'a fait dans la partie 1.2.

La première est que, pour des objets géométriques autres que $\mathbb{G}_{m,\mathbb{C}}$, le polylogarithme faisceautique admet une généralisation, alors que, à la connaissance de l'auteur, l'approche fonctionnelle non (si l'on excepte les familles de courbes elliptiques). Ce point sera illustré dans la partie suivante.

La deuxième est que, dans le cas de $\mathbb{G}_{m,\mathbb{C}}$, les classes d'Eisenstein (définies à partir du faisceau polylogarithme) fournissent, pour chaque $n \in \mathbb{N}$ des éléments d'origine motivique dans les groupes $\text{Ext}_{SHM_{\mathbb{R}}}^1(\mathbb{R}(0), \mathbb{R}(n))$ qui sont liés à des groupes de cohomologie de Deligne (voir [HW1] pour l'aspect motivique du polylogarithme de \mathbb{G}_m). Ces classes d'Eisenstein peuvent en fait être utilisées pour démontrer certains cas des conjectures de Beilinson.

Ceci conduit à considérer les questions suivantes dans une situation géométrique, autre que $\mathbb{G}_{m,\mathbb{C}}$, dans laquelle on dispose d'une théorie faisceautique du polylogarithme (c'est à dire d'un logarithme, d'un polylogarithme et de classes d'Eisenstein construits à partir de la théorie de Hodge, comme dans le cas $\mathbb{G}_{m,\mathbb{C}}$),

- Q1** les classes d'Eisenstein ont-elles une origine motivique ?
- Q2** le polylogarithme peut-il être décrit explicitement ?
- Q3** les classes d'Eisenstein possèdent-elles des propriétés arithmétiques remarquables (e.g. sont-elles liées à des valeurs spéciales de fonctions L) ?
- Q4** les classes d'Eisenstein peuvent-elles être utilisées pour démontrer de nouveaux cas des conjectures de Beilinson ?

3 Le polylogarithme d'un schéma abélien en théorie de Hodge

On se propose, dans cette partie, d'examiner les questions précédentes, dans le cas où l'objet géométrique est un schéma abélien. Soit $\pi: A \rightarrow S$ un schéma abélien complexe de dimension relative pure d et de section unité $e: S \rightarrow A$. Dans cette situation géométrique, on dispose d'un logarithme, d'un polylogarithme et de classes d'Eisenstein (travaux de Beilinson-Levin pour $d = 1$, de Wildeshaus pour d quelconque). Pour construire ces divers objets, il existe deux approches.

- 1) On peut utiliser une méthode analogue à celle exposée dans le cas $\mathbb{G}_{m,\mathbb{C}}$ (cf diagramme de synthèse de la partie 2), en utilisant à nouveau la théorie de Hodge, i.e.
 - A) le théorème de Hain-Zucker, ou plus exactement une version relative de celui-ci (cf Thm 3.5 de la partie I de [W1]),
 - B) un principe de rigidité énoncé ci-dessous et dont la preuve se déduit du corollaire 4.4 de la partie I de [W1],
 - C) un principe de scindage dont l'énoncé est également donné ci-dessous, et dont la preuve repose essentiellement sur la propriété universelle caractérisant le logarithme (i.e. sur le théorème de Hain-Zucker).
- 2) On peut également utiliser les définitions du logarithme, du polylogarithme et des classes d'Eisenstein données dans les parties 1 et 3.1 de [Ki1].

Dans les méthodes 1) et 2), seule la construction du logarithme diffère et les deux objets logarithmes résultant des deux constructions sont identiques (cf [B3]). La méthode 2) présente l'avantage d'être très courte, mais est peut-être moins conceptuelle.

On n'expose pas ici les constructions des différents objets, renvoyant par exemple aux parties 1 et 3.1 de [Ki1] pour les détails. On s'attache uniquement à préciser la nature des objets logarithme, polylogarithme et classes d'Eisenstein en soulignant les liens entre la situation géométrique $\mathbb{G}_{m,\mathbb{C}}$ et celle considérée ici. Dans la colonne de gauche du tableau ci-dessous, on rappelle les objets considérés dans le cas $\mathbb{G}_{m,\mathbb{C}}$ et dans celle de droite, on donne leurs analogues pour un schéma abélien.

<p style="text-align: center;">Données géométriques</p> <p>$\mathbb{G}_{m,\mathbb{C}} \rightarrow \text{Spec}(\mathbb{C})$ (dimension relative 1)</p> <p>$1: \text{Spec}(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{G}_{m,\mathbb{C}}, \quad U := \mathbb{G}_{m,\mathbb{C}} \setminus \{1\}$</p> <p>$x \in U(\mathbb{C})$ racine de l'unité</p>	<p style="text-align: center;">Données géométriques</p> <p>$\pi: A \rightarrow S$ (dimension relative d)</p> <p>$e: S \rightarrow A, \quad U := A \setminus e(S)$</p> <p>$x \in U(S)$ section de torsion</p>
<p style="text-align: center;">Dual de $H^1(\mathbb{G}_{m,\mathbb{C}}, \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}(-1)$</p> <p>$\underline{\text{Hom}}(\mathbb{Q}(-1), \mathbb{Q}(0)) = \mathbb{Q}(1) \in \text{Ob}(SHM_{\mathbb{Q}})$</p>	<p style="text-align: center;">Dual de $R^1\pi_*\mathbb{Q}$</p> <p>$\mathcal{H} := \underline{\text{Hom}}(R^1\pi_*\mathbb{Q}, \mathbb{Q}(0)_A) \in \text{Ob}(VSHM(S)_{\mathbb{Q}})$</p>
<p style="text-align: center;">Le logarithme</p> <p>$\mathcal{L}og \in \text{Ob}(\text{pro-}VSHM(\mathbb{G}_{m,\mathbb{C}})_{\mathbb{Q}})$</p> $\prod_{k \in \mathbb{Z}} Gr_k^{\mathbb{W}} \mathcal{L}og = \prod_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{Q}(k)_{\mathbb{G}_{m,\mathbb{C}}}$	<p style="text-align: center;">Le logarithme</p> <p>$\mathcal{L}og \in \text{Ob}(\text{pro-}VSHM(A)_{\mathbb{Q}})$</p> $\prod_{k \in \mathbb{Z}} Gr_k^{\mathbb{W}} \mathcal{L}og = \prod_{k \in \mathbb{N}} \text{Sym}^k \pi^* \mathcal{H}$
<p style="text-align: center;">Principe de rigidité</p> <p>On a un isomorphisme canonique</p> $\kappa: \text{Ext}_{VSHM(U)_{\mathbb{Q}}}^1(\mathbb{Q}(0)_U, \mathcal{L}og _U) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Q}.$ \parallel $\text{Ext}_{VSHM(U)_{\mathbb{Q}}}^1(\mathbb{Q}(1)_U, \mathcal{L}og _U(1))$	<p style="text-align: center;">Principe de rigidité</p> <p>On a un isomorphisme canonique</p> $\kappa: \text{Ext}_{MHM(U)_{\mathbb{Q}}}^{2d-1}(\pi _U^* \mathcal{H}, \mathcal{L}og _U(d)) \xrightarrow{\sim} \text{End}_{VSHM(S)_{\mathbb{Q}}}(\mathcal{H}).$
<p style="text-align: center;">Le polylogarithme</p> <p>$\mathcal{P}ol \in \text{Ext}_{VSHM(U)_{\mathbb{Q}}}^1(\mathbb{Q}(0)_U, \mathcal{L}og _U)$ est défini par $\kappa(\mathcal{P}ol) = 1$.</p>	<p style="text-align: center;">Le polylogarithme</p> <p>$\mathcal{P}ol \in \text{Ext}_{MHM(U)_{\mathbb{Q}}}^{2d-1}(\pi _U^* \mathcal{H}, \mathcal{L}og _U(d))$ est défini par $\kappa(\mathcal{P}ol) = \text{Id}_{\mathcal{H}}$.</p>
<p style="text-align: center;">Principe de scindage</p> $x^* \mathcal{L}og = \prod_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Q}(n)$	<p style="text-align: center;">Principe de scindage</p> $x^* \mathcal{L}og = \prod_{n \in \mathbb{N}} \text{Sym}^n \mathcal{H}$
<p style="text-align: center;">Classes d'Eisenstein</p> <p>$\mathcal{E}is_x^n \in \text{Ext}_{SHM_{\mathbb{Q}}}^1(\mathbb{Q}(0), \mathbb{Q}(n)) \quad (n \in \mathbb{N})$</p>	<p style="text-align: center;">Classes d'Eisenstein</p> <p>$\mathcal{E}is_x^n \in \text{Ext}_{MHM(S)_{\mathbb{Q}}}^{2d-1}(\mathbb{Q}(0), (\text{Sym}^n \mathcal{H})(d)) \quad (n \in \mathbb{N})$</p>

Le lecteur attentif aura remarqué que deux symboles non encore introduits figurent dans le tableau précédent : $MHM(U)_{\mathbb{Q}}$ et $MHM(S)_{\mathbb{Q}}$. Si X est une variété algébrique complexe, $MHM(X)_{\mathbb{Q}}$ désigne la catégorie abélienne des \mathbb{Q} -modules de Hodge algébriques mixtes définie par M. Saito. On renvoie à [S] pour la définition de cette catégorie qui, dans le cas où X est lisse, est une extension de la catégorie $VSHM(X)_{\mathbb{Q}}$, i.e. on dispose, dans ce cas, d'un foncteur canonique, exact et pleinement fidèle

$$\iota_X : VSHM(X)_{\mathbb{Q}} \rightarrow MHM(X)_{\mathbb{Q}}$$

grâce auquel on identifie $VSHM(X)_{\mathbb{Q}}$ à une sous-catégorie pleine de $MHM(X)_{\mathbb{Q}}$.

Pour dire les choses grossièrement, un module de Hodge est un faisceau pervers muni de structures additionnelles (notamment d'une filtration par le poids et d'une filtration de Hodge) et dans le cas où X est lisse, les variations sont les modules de Hodge dont le faisceau pervers est un système local décalé. *Dans ce texte, on ne tient pas compte de ce décalage.*

Pour être un peu plus précis, la catégorie $D^b(MHM(X)_{\mathbb{Q}})$ est munie d'un foncteur

$$\text{For} : D^b(MHM(X)_{\mathbb{Q}}) \rightarrow D^b(\mathcal{F}(X)_{\mathbb{Q}}),$$

où $\mathcal{F}(X)_{\mathbb{Q}}$ est la catégorie des faisceaux en \mathbb{Q} -vectoriels au dessus de $X(\mathbb{C})$ (muni de la topologie transcendante), qui dans le cas où X est lisse, étend le foncteur oubli de $VSHM(X)_{\mathbb{Q}}$, i.e.

$$\text{For}(\iota_X(\mathbb{V}, (\mathbb{W}_k)_{k \in \mathbb{Z}}), (\mathcal{F}^p)_{p \in \mathbb{Z}}) = \mathbb{V}$$

pour tout $(\mathbb{V}, (\mathbb{W}_k)_{k \in \mathbb{Z}}), (\mathcal{F}^p)_{p \in \mathbb{Z}} \in \text{Ob}(VSHM(X)_{\mathbb{Q}})$ et vérifie

$${}^p H^\bullet(\text{For}(M)) = \text{For}(H^\bullet(M))$$

pour tout objet M de $MHM(X)_{\mathbb{Q}}$, ${}^p H^\bullet$ désignant la cohomologie perverse.

Une des raisons qui poussent à considérer $MHM(X)_{\mathbb{Q}}$ (au moins lorsque la dimension relative d est plus grande que 2), est que la théorie $D^b MHM(\cdot)_{\mathbb{Q}}$ est munie du formalisme des 6 foncteurs (contrairement à $D^b VSHM(\cdot)_{\mathbb{Q}}$) et que celui-ci est utile pour la construction du polylogarithme (e.g. pour établir le principe de rigidité). Ce formalisme est de plus compatible avec le foncteur For, e.g. pour $f : X \rightarrow Y$ un morphisme de variétés algébriques complexes,

$$\text{For} \circ f_* = Rf_* \circ \text{For}.$$

Mais, si le recours à la théorie des modules de Hodge est utile dans la construction, on peut se demander si les objets définis par cette théorie faisceutique du polylogarithme (e.g. le polylogarithme lui-même) sont, au final, des objets ou des extensions d'objets dans $VSHM(\cdot)_{\mathbb{Q}}$. Par exemple, ι_U induit un morphisme canonique

$$\varphi_U : \text{Ext}_{VSHM(U)_{\mathbb{Q}}}^{2d-1}(\pi_U^* \mathcal{H}, \mathcal{L}og|_U(d)) \rightarrow \text{Ext}_{MHM(U)_{\mathbb{Q}}}^{2d-1}(\pi_U^* \mathcal{H}, \mathcal{L}og|_U(d)) \ni \mathcal{P}ol$$

et on peut considérer la question suivante : $\mathcal{P}ol \in \text{Im}(\varphi_U)$?

Si $d = 1$ (i.e. pour une famille de courbes elliptiques), le polylogarithme est une extension dans la catégorie $VSHM(U)_{\mathbb{Q}}$ (i.e. $\mathcal{P}ol \in \text{Im}(\varphi_U)$), mais si $d \geq 2$, d'après le théorème 3 de la partie III de [W1], $\mathcal{P}ol \notin \text{Im}(\varphi_U)$.

Les modules de Hodge sont donc essentiels pour l'étude du polylogarithme en théorie de Hodge pour les dimensions supérieures à 2.

On examine à présent les questions Q1, Q2, Q3 et Q4 introduites dans la partie 2 dans le contexte géométrique de cette partie.

- 1 Les classes d'Eisenstein ont une origine motivique (cf [BL] et [W2] pour $d = 1$ et [Ki1] pour d quelconque).
- 2 Le polylogarithme de la famille universelle de courbes elliptiques est étudié et décrit dans [BL] et dans la partie V de [W1]. Comme on l'a mentionné ci-dessus, dans ce cas, le polylogarithme est une extension dans la catégorie des variations de \mathbb{Q} -structures de Hodge mixtes polarisables et admissibles et celle-ci peut être décrite par une matrice de fonctions multivaluées, de façon analogue à ce que l'on a vu pour $\mathbb{G}_{m,\mathbb{C}}$ dans la partie 1.2.3.

Dans le cas où la dimension $d \geq 2$, on dispose seulement d'une description de l'image de $\mathcal{P}ol$ sous le morphisme induit par For, noté abusivement également For,

$$\text{For} : \text{Ext}_{MHM(U)_{\mathbb{Q}}}^{2d-1}(\pi_{|U}^* \mathcal{H}, \mathcal{L}og_{|U}(d)) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{F}(U)_{\mathbb{Q}}}^{2d-1}(\text{For}(\pi_{|U}^* \mathcal{H}), \text{For}(\mathcal{L}og_{|U}(d))).$$

Ce morphisme possède la propriété remarquable d'être injectif (cf Thm 2.1 de la partie III de [W1]). Dans [L], Levin introduit des courants et conjecture que ceux-ci décrivent $\text{For}(\mathcal{P}ol)$. Cette conjecture est démontrée dans [B3]. Pour une présentation succincte, on renvoie à la note [B1].

- 3 Dans le cas de la famille modulaire de courbes elliptiques, il a été démontré que les classes d'Eisenstein dégénèrent au bord de la compactification de Baily-Borel de la courbe modulaire en des nombres de Bernoulli généralisés (cf [BL], [SS] et [W1, Part V, Cor. 3.26]).

Dans le cas, d'une famille modulaire de Hilbert-Blumenthal associée à un corps de nombres totalement réel L , qui est de dimension relative $[L : \mathbb{Q}]$, les classes d'Eisenstein dégénèrent, en une pointe de la compactification de Baily-Borel de la base, en une valeur spéciale d'une fonction ζ de Dedekind partielle associée à L . (Voir la note [B2] pour un court résumé avec des énoncés précis et les prépublications [B4] et [Ki2] pour deux démonstrations différentes).

En utilisant la structure rationnelle du polylogarithme, cette propriété permet de redémontrer le théorème de Klingen-Siegel, i.e. un résultat de rationalité des valeurs aux entiers négatifs des fonctions ζ de Dedekind partielles des corps de nombres totalement réels.

- 4 Cette question reste ouverte. Dans la situation géométrique des familles de Hilbert-Blumenthal, on peut démontrer, à l'aide du résultat sur la dégénérescence des classes d'Eisenstein et d'une équation fonctionnelle due à Siegel, que de nombreuses classes d'Eisenstein sont non nulles. Puisqu'elles ont une origine motivique, il est tentant d'essayer de prouver, par exemple, la surjectivité d'un régulateur en les utilisant...

Références

- [B1] D. Blottière, *Réalisation de Hodge du polylogarithme d'un schéma abélien*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris **344** (2007), no. 12, 773–777.
- [B2] D. Blottière, *Dégénérescence des classes d'Eisenstein des familles modulaires de Hilbert-Blumenthal*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris **345** (2007), no. 1, 5–10.
- [B3] D. Blottière, *Réalisation de Hodge du polylogarithme d'un schéma abélien*, 33 pages, arXiv :0705.0880.
- [B4] D. Blottière, *Les classes d'Eisenstein des variétés de Hilbert-Blumenthal*, 22 pages, arXiv :0706.2455.
- [BL] A.A. Beilinson, A. Levin, *The elliptic polylogarithm*, Motives (Seattle, WA, 1991), 123–190, Proc. Sympos. Pure Math., 55, Part 2, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994.
- [C] K.-T. Chen, *Iterated path integrals*, Bull. Amer. Math. Soc. **83** (1977), no. 5, 831–879.
- [D1] P. Deligne, *Équations différentielles à points singuliers réguliers*, Lecture Notes in Mathematics **163**, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1970.
- [D2] P. Deligne, *Théorie de Hodge II*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No. **40** (1971), 5–57.
- [D3] P. Deligne, *Théorie de Hodge III*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No. **44** (1974), 5–77.
- [H] R.M. Hain, *The geometry of the mixed Hodge structure on the fundamental group*, Algebraic geometry, Bowdoin, 1985 (Brunswick, Maine, 1985), 247–282, Proc. Sympos. Pure Math., 46, Part 2, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1987.
- [HW1] A. Huber, J. Wildeshaus, *Classical motivic polylogarithm according to Beilinson and Deligne*, Doc. Math. **3** (1998), 27–133.
- [HW2] A. Huber, J. Wildeshaus, *Correction to the paper : Classical motivic polylogarithm according to Beilinson and Deligne*. Doc. Math. **3** (1998), 297–299.
- [HZ] H.M. Richard, S. Zucker, *A guide to unipotent variations of mixed Hodge structure*, Hodge theory (Sant Cugat, 1985), 92–106, Lecture Notes in Math. **1246** Springer Berlin, 1987.
- [Ka] M. Kashiwara, *A study of variation of mixed Hodge structure*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **22** (1986), no. 5, 991–1024.
- [Ki1] G. Kings, *K-theory elements for the polylogarithm of abelian schemes*, J. Reine Angew. Math. **517** (1999), 103–116.
- [Ki2] G. Kings, *Degeneration of polylogarithms and special values of L-functions for totally real fields*, 33 p., ArXiv (math.NT.0510147).
- [L] A. Levin, *Polylogarithmic currents on abelian varieties*, Regulators in analysis, geometry and number theory, 207–229, Progr. Math. **171**, Birkhäuser Boston, 2000.
- [S] M. Saito, *Mixed Hodge modules*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **26** (1990), no. 2, 221–333.
- [SS] N. Schappacher, A.J. Scholl, *The boundary of the Eisenstein symbol*, Math. Ann. **290** (1991), no. 2, 303–321.
- [W1] J. Wildeshaus, *Realizations of polylogarithms*, Lecture Notes in Mathematics **1650**, Springer-Verlag, Berlin, 1997.
- [W2] J. Wildeshaus, *On the Eisenstein symbol*, 119 pages, arXiv :math/0006170.