

Exercice du cours.

Ex 97

109 $\sum_{p \geq 2} (\varphi(p) - 1)$ et calculer la somme.

Etadous $\sum_{p \geq 2} \sum_{n=2}^{+\infty} \underbrace{\frac{1}{n^p}}_{\geq 0}$

Par Fubini cas positif

$$\begin{aligned} \sum_{p=2}^{+\infty} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^p} &= \sum_{(n,p) \in \mathbb{N}_{\geq 2} \times \mathbb{N}_{\geq 2}} \frac{1}{n^p} = \sum_{n=2}^{+\infty} \sum_{p=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^p \\ &= \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1/n^2}{1 - \frac{1}{n}} \\ &= \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - n} \\ &= \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) \\ &= 1 \end{aligned}$$

donc: $\sum_{p \geq 2} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$ cv et vaut 1.

Ex 56 Key: $\cos(1) \notin \mathbb{Q}$

$$\cos(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}$$

$$\cos(1) = \frac{e^i + e^{-i}}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{i^n}{n!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \right)$$

$$\sum \frac{i^n}{n!} \text{ et } \sum \frac{(-i)^n}{n!} \text{ sont } \mathbb{R}\text{-ev}$$

$$\mathbb{N}^* = \{2n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{2n+1 : n \in \mathbb{N}\}$$

TSPP (C):

Les 2 termes suivants existent et sont égaux.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{i^n}{n!}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{i^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{i^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

idem pour les 2 termes.

$$\text{Donc: } \cos(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-i)^n}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}$$