Révisions de probabilités

(1) Probabilité sur un ensemble fini. — Soit Ω un ensemble fini non vide. Une probabilité sur Ω est une application :

$$\mathbf{P} \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{P}(\Omega) & \longrightarrow & [0,1] \\ A & \longmapsto & P(A) \end{array} \right.$$

telle que :

(a) $\mathbf{P}(\Omega) = 1$;

(b) $\forall (A_1, A_2) \in \mathscr{P}(\Omega)^2 \quad A_1 \cap A_2 = \varnothing \Longrightarrow \mathbf{P}(A_1 \sqcup A_2) = \mathbf{P}(A_1) + \mathbf{P}(A_2)$ [additivité] .

(2) Propriétés immédiates d'une probabilité. — Soit $(\Omega, \mathbf{P})$ un espace probabilisé fini.

(a) $\mathbf{P}(\varnothing) = 0$;

(b) Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, pour toute famille $(A_, \ldots, A_n)$ d'événements deux-à-deux incompatibles :

$$\mathbf{P}\left(\bigsqcup_{i=1}^{n} A_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(A_i) .$$

(c) Pour tout événement A :

$$\mathbf{P}(A) = \sum_{\omega \in A} \mathbf{P}(\{\omega\}) .$$

(3) Distribution de probabilités sur un ensemble fini. — Soit Ω un ensemble fini non vide. Une distribution de probabilités sur Ω est une famille $(p_\omega)_{\omega \in \Omega} \in (\mathbf{R}_+)^\Omega$ telle que :

$$\sum_{\omega \in \Omega} p_\omega = 1 .$$

(4) Probabilité versus distribution de probabilités. — Soit Ω un ensemble fini non vide.

(a) Si $\mathbf{P}$ est une probabilité sur Ω alors :

$$(p_\omega := \mathbf{P}(\{\omega\}))_{\omega \in \Omega}$$

est une distribution de probabilité sur Ω.

(b) Soit $(p_\omega)_{\omega \in \Omega}$ une distribution de probabilité sur Ω. Alors l'application :

$$\mathbf{P} \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{P}(\Omega) & \longrightarrow & [0,1] \\ A & \longmapsto & \displaystyle\sum_{\omega \in A} p_\omega \end{array} \right.$$

est l'unique probabilité sur Ω telle que, pour tout $\omega \in \Omega$, $\mathbf{P}(\{\omega\}) = p_\omega$.

(5) Propriétés d'une probabilité. — Soit $(\Omega, \mathbf{P})$ un espace probabilisé fini.

(a) $\forall (A,B) \in \mathscr{P}(\Omega)^2 \quad \mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B)$ [probabilité d'un réunion]

(b) $\forall (A,B) \in \mathscr{P}(\Omega)^2 \quad A \subset B \Longrightarrow \mathbf{P}(B \setminus A) = \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A)$ [probabilité d'une différence]

(c) $\forall A \in P(\Omega) \quad \mathbf{P}\left(\overline{A}\right) = 1 - \mathbf{P}(A)$ [probabilité de l'événement contraire]

(d) $\forall (A,B) \in \mathscr{P}(\Omega)^2 \quad A \subset B \Longrightarrow \mathbf{P}(A) \leqslant \mathbf{P}(B)$ [croissance de la probabilité]

(6) Propriétés conditionnelles. — Soient (Ω, P) un espace probabilisé fini, B un événement tel que $P(B) > 0$ et A un événement. La probabilité conditionnelle de A sachant B notée $\mathbf{P}(A|B)$ ou $\mathbf{P}_B(A)$ est définie par :

$$\mathbf{P}(A|B) := \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(B)} .$$

(7) Une probabilité conditionnelle est une probabilité au sens de (1). — Soient (Ω, P) un espace probabilisé fini et B un événement tel que $P(B) > 0$. Alors l'application :

$$\mathbf{P}_B \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{P}(\Omega) & \longrightarrow & [0,1] \\ A & \longmapsto & \mathbf{P}(A|B) \end{array} \right.$$

est une probabilité sur l'espace Ω.

(8) Formule des probabilités composées. — Soit $(\Omega, \mathbf{P})$ un espace probabilisé fini.

(a) Soient A, B des événements. Alors :

$$\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A) \times \mathbf{P}(B\,|A) \ .$$

(b) Soient $n \geqslant 2$ et $A_1, \ldots, A_n$ des événements. Alors :

$$\mathbf{P}(A_1 \cap \ldots \cap A_n) = \mathbf{P}(A_1) \times \mathbf{P}(A_2\,|A_1) \times \mathbf{P}(A_3\,|A_1 \cap A_2) \times \ \ldots \ \times \mathbf{P}(A_n\,|A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}) \ .$$

(9) Système complet d'événements. — Soit Ω un ensemble fini. Une famille $(A_i)_{i \in I}$ d'événements est un système complet d'événements si :

(a) les A_i sont deux-à-deux incompatibles, i.e. pour tout $(i,j) \in I^2$ tel que $i \neq j$, $A_i \cap A_j = \varnothing$;

(b) la réunion de tous les A_i égale Ω, i.e. $\bigcup_{i \in I} A_i = \Omega$.

(10) Formule des probabilités totales. — Soient $(\Omega, \mathbf{P})$ un espace probabilisé fini et $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ un système complet d'événements. Pour tout événement B :

$$\mathbf{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(B\,|A_i) \times \mathbf{P}(A_i) \ .$$

(11) Formule de Bayes. — Soit $(\Omega, \mathbf{P})$ un espace probabilisé fini.

(a) Si A et B sont deux événements tels que $\mathbf{P}(A) > 0$ et $\mathbf{P}(B) > 0$, alors :

$$\mathbf{P}(A|B) = \mathbf{P}(B\,|A) \times \frac{\mathbf{P}(A)}{\mathbf{P}(B)} \qquad [\text{renversement du conditionnement}] \ .$$

(b) Soient $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ un système complet d'événements et B un événement tel que $\mathbf{P}(B) > 0$. Alors :

$$\forall\, i \in [\![1, n]\!] \qquad \mathbf{P}(A_i\,|B) = \frac{\mathbf{P}(B\,|A_i) \times \mathbf{P}(A_i)}{\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \mathbf{P}\left(B\,|A_j\right) \times \mathbf{P}\left(A_j\right)} \ .$$

(12) Loi d'une variable aléatoire. — Soient $(\Omega, \mathbf{P})$ un espace probabilisé fini, E un ensemble et $X : \Omega \longrightarrow E$ une variable aléatoire.

(a) L'application :

$$\mathbf{P}_X \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{P}(X(\Omega)) & \longrightarrow & [0,1] \\ A & \longmapsto & \mathbf{P}_X(A) := \mathbf{P}(X \in A) \end{array} \right.$$

est une probabilité sur $X(\Omega)$, appelée loi de X.

(b) La famille $((X = x))_{x \in X(\Omega)}$ est un système complet d'événements.

(13) Méthode pour déterminer la loi d'une variable aléatoire. — Pour déterminer la loi d'une variable aléatoire X, on procède en deux temps.

(a) On détermine d'abord l'ensemble $X(\Omega)$ des valeurs prises par X [première étape à ne jamais oublier].

(b) Ensuite, on calcule sa loi en déterminant, pour tout $x \in X(\Omega)$, $\mathbf{P}(X = x)$.

(14) Égalité en loi de deux variables aléatoires. — Soient $(\Omega_1, \mathbf{P}_1), (\Omega_2, \mathbf{P}_2)$ deux espaces probabilisés finis, et $X_1 : \Omega_1 \longrightarrow E_1$, $X_2 : \Omega_2 \longrightarrow E_2$ deux variables aléatoires. On dit que X_1 et X_2 sont égales en loi et on note $X_1 \sim X_2$, si

(a) $X_1(\Omega_1) = X_2(\Omega_2)$

(b) les probabilités $(\mathbf{P}_1)_{X_1}$ et $(\mathbf{P}_2)_{X_2}$ sur $X_1(\Omega_1) = X_2(\Omega_2)$ sont égales.

> Deux variables aléatoires peuvent être égales en loi sans être égales. En effet, si X est une variable aléatoire de loi $\mathscr{B}\left(\frac{1}{2}\right)$, alors X et $1 - X$ ne sont pas égales, mais ont même loi.

(15) Image d'une variable aléatoire. — Soient $(\Omega, \mathbf{P})$ un espace probabilisé fini, E, F des ensembles, $X : \Omega \longrightarrow E$ une variable aléatoire et $f : X(\Omega) \longrightarrow F$ une application. La loi de la variable aléatoire $f \circ X$, notée $f(X)$, est entièrement déterminée par la loi de X, précisément :

$$\forall A \in \mathscr{P}(f(X(\Omega))), \quad \mathbf{P}_{f(X)}(A) = \mathbf{P}_X\left(f^{-1}(A)\right) .$$

(16) Égalité en loi des images de deux variables aléatoires égales en loi. — Soient $(\Omega_1, \mathbf{P}_1), (\Omega_2, \mathbf{P}_2)$ deux espaces probabilisés finis, $X_1 : \Omega_1 \longrightarrow E_1$, $X_2 : \Omega_2 \longrightarrow E_2$ deux variables aléatoires telles que $X_1 \sim X_2$ et $f : X_1(\Omega_1) = X_2(\Omega_2) \longrightarrow F$ une application. Alors :

$$f(X_1) \sim f(X_2) .$$

(17) Loi conditionnelle d'une variable aléatoire sachant un événement. — Soient $(\Omega, \mathbf{P})$ un espace probabilisé fini, B un événement tel que $P(B) > 0$, E un ensemble et $X : \Omega \longrightarrow E$ une variable aléatoire. La loi conditionnelle de X sachant B est

$$\mathbf{P}_{X/B} \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{P}(X(\Omega)) & \longrightarrow & [0,1] \\ A & \longmapsto & \mathbf{P}_B(X \in A) \end{array} \right.$$

qui est une probabilité sur Ω, entièrement déterminée par la distribution de probabilité $(\mathbf{P}_B(X = x))_{x \in X(\Omega)}$ sur $X(\Omega)$.

(18) Indépendance de deux événements. — Soit $(\Omega, \mathbf{P})$ un espace probabilisé fini. Deux événements A, B sont dits indépendants si :

$$\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A) \times \mathbf{P}(B) .$$

(19) Indépendance de deux événements et événements contraires. — Soient $(\Omega, \mathbf{P})$ un espace probabilisé fini et A, B deux événements. Alors :

$$A \text{ et } B \text{ sont indépendants} \quad \Longrightarrow \quad A \text{ et } \overline{B} \text{ sont indépendants} .$$

(20) Famille d'événements mutuellement indépendants. — Soient $(\Omega, \mathbf{P})$ un espace probabilisé fini et $(A_i)_{i \in I}$ une famille finie d'événements. On dit que les événements A_i $(i \in I)$ sont mutuellement indépendants si :

$$\forall J \in \mathscr{P}(I) \qquad \mathbf{P}\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) = \prod_{j \in J} \mathbf{P}(A_j) .$$

> L'indépendance deux-à-deux n'implique pas l'indépendance mutuelle.

(21) Loi conjointe et lois marginales. — Soient $(\Omega, \mathbf{P})$ un espace probabilisé fini, E, F deux ensembles, $X : \Omega \longrightarrow E$, $Y : \Omega \longrightarrow F$ deux variables aléatoires.

(a) La loi de la variable aléatoire :

$$Z := (X, Y) \left| \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & E \times F \\ \omega & \longmapsto & (X(\omega), Y(\omega)) \end{array} \right.$$

est appelée loi conjointe de X et Y.

(b) Les lois de X et Y sont appelées lois marginales de Z.

(22) Méthode pour déterminer la loi d'un couple. — Pour déterminer la loi d'un couple $Z = (X, Y)$ de variables aléatoires, on calcule, pour tout $(x, y) \in Z(\Omega) \subset X(\Omega) \times Y(\Omega)$:

$$\mathbf{P}(X = x, Y = y) := \mathbf{P}((X = x) \cap (Y = y))$$

(23) La loi conjointe détermine les lois marginales. — Soient $(\Omega, \mathbf{P})$ un espace probabilisé fini, E, F deux ensembles, $X : \Omega \longrightarrow E$, $Y : \Omega \longrightarrow F$ deux variables aléatoires. Posons $Z = (X, Y)$.

$$\forall\, x \in X(\Omega) \quad P(X = x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} P(Z = (x, y)) \qquad \text{et} \qquad \forall\, y \in Y(\Omega) \quad P(Y = j) = \sum_{x \in X(\Omega)} P(Z = (i, j))$$

La loi de Z détermine donc entièrement les lois de X et Y.

Les lois marginales ne déterminent pas nécessairement la loi conjointe.

(24) Indépendance de deux variables aléatoires. — Soient $(\Omega, \mathbf{P})$ un espace probabilisé fini, E, F deux ensembles, $X : \Omega \longrightarrow E$, $Y : \Omega \longrightarrow F$ deux variables aléatoires. On dit que X et Y sont indépendantes ($X \perp\!\!\!\perp Y$) si :

$$\forall\, (A, B) \in \mathscr{P}(X(\Omega)) \times \mathscr{P}(Y(\Omega)) \quad \mathbf{P}(X \in A,\ Y \in B) = \mathbf{P}(X \in A) \times \mathbf{P}(Y \in B)$$

ce qui équivaut à :

$$\forall\, (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega) \quad \mathbf{P}(X = x\,,\ Y = y) = \mathbf{P}(X = x) \times \mathbf{P}(Y = y)\ .$$

(25) Indépendance et image de deux variables aléatoires. — Soient $(\Omega, \mathbf{P})$ un espace probabilisé fini, E, F, E', F' des ensembles, $X : \Omega \longrightarrow E$, $Y : \Omega \longrightarrow F$ deux variables aléatoires et $f : X(\Omega) \longrightarrow E'$, $g : Y(\Omega) \longrightarrow F'$ des applications. Alors :

$$X \perp\!\!\!\perp Y \quad \Longrightarrow \quad f(X) \perp\!\!\!\perp g(Y)\,.$$

(26) Indépendance d'une famille de variables aléatoires. — Soient $(\Omega, \mathbf{P})$ un espace probabilisé fini, $n \in \mathbf{N}_{\geqslant 2}$, $E_1, \ldots, E_n$ des ensembles et

$$X_1 : \Omega \longrightarrow E_1 \quad , \quad X_2 : \Omega \longrightarrow E_2 \quad , \quad \ldots \quad , \quad X_n : \Omega \longrightarrow E_n$$

des variables aléatoires. On dit que les variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont indépendantes si :

$\forall\, (A_1, \ldots, A_n) \in \mathscr{P}(X_1(\Omega)) \times \ldots \times \mathscr{P}(X_n(\Omega)) \quad ((X_1 \in A_1), \ldots, (X_n \in A_n))$ est une famille d'événements indépendants

ce qui équivaut à :

$$\forall\, (x_1, \ldots, x_n) \in X_1(\Omega) \times \ldots \times X_n(\Omega) \quad \mathbf{P}(X_1 = x_1\,, \ldots\,, X_n = x_n) = \mathbf{P}(X_1 = x_1) \times \ldots \times \mathbf{P}(X_n = x_n)$$

(27) Lemme des coalitions. — Soient $(\Omega,\mathbf{P})$ un espace probabilisé fini, $n\in\mathbf{N}_{\geqslant 2}$, $m\in[\![1,n-1]\!]$, $E_1,\dots,E_n,E',F'$ des ensembles,

$$X_1:\Omega\longrightarrow E_1\quad,\quad X_2:\Omega\longrightarrow E_2\quad,\quad\dots\quad,\quad X_n:\Omega\longrightarrow E_n$$

des variables aléatoires indépendantes et

$$f:X_1(\Omega)\times\dots\times X_m(\Omega)\longrightarrow E'\qquad\text{et}\qquad g:X_{m+1}(\Omega)\times\dots\times X_n(\Omega)\longrightarrow F'$$

deux applications. Alors les deux variables aléatoires :

$$f(X_1,\dots,X_m)\;\left|\;\begin{array}{ccc}\Omega&\longrightarrow&E'\\ \omega&\longmapsto&f(X_1(\omega),\dots,X_m(\omega))\end{array}\right.\qquad\text{et}\qquad g(X_{m+1},\dots,X_n)\;\left|\;\begin{array}{ccc}\Omega&\longrightarrow&F'\\ \omega&\longmapsto&g(X_{m+1}(\omega),\dots,X_n(\omega))\end{array}\right.$$

sont indépendantes.

(28) Espérance d'une variable aléatoire. — Soient $(\Omega,\mathbf{P})$ un espace probabilisé fini et $X:\Omega\longrightarrow\mathbf{C}$ une variable aléatoire. L'espérance de X est le nombre complexe $\mathbf{E}(X)$ défini par

$$\mathbf{E}(X):=\sum_{x\in X(\Omega)}x\times\mathbf{P}(X=x)\qquad[\text{moyenne des valeurs de } X \text{ pondérées par leurs probabilités}]\ .$$

(29) Variable aléatoire centrée. — Une variable aléatoire est dite centrée si son espérance vaut 0.

(30) Formule de transfert. — Soient $(\Omega,\mathbf{P})$ un espace probabilisé fini, E un ensemble, $X:\Omega\longrightarrow E$ une variable aléatoire et $f:X(\Omega)\longrightarrow\mathbf{C}$ une application.

$$\mathbf{E}(f(X))=\sum_{x\in X(\Omega)}f(x)\,\mathbf{P}(X=x)$$

(31) Propriétés de l'espérance. — Soit $(\Omega,\mathbf{P})$ un espace probabilisé fini.

(a) Si $X:\Omega\longrightarrow\mathbf{C}$, $Y:\Omega\longrightarrow\mathbf{C}$ sont des variables aléatoires et λ, μ sont des complexes, alors :

$$\mathbf{E}(\lambda X+\mu Y)=\lambda\,\mathbf{E}(X)+\mu\,\mathbf{E}(Y)\qquad[\text{linéarité de l'espérance}]\ .$$

(b) Si $X:\Omega\longrightarrow\mathbf{R}$ est une variable aléatoire, alors :

$$X\geqslant 0\implies\mathbf{E}(X)\geqslant 0\qquad[\text{positivité de l'espérance}]\ .$$

(c) Si $X:\Omega\longrightarrow\mathbf{R}$, $Y:\Omega\longrightarrow\mathbf{R}$ sont des variables aléatoires, alors :

$$X\leqslant Y\implies\mathbf{E}(X)\leqslant\mathbf{E}(Y)\qquad[\text{croissance de l'espérance}]\ .$$

(d) Si $X:\Omega\longrightarrow\mathbf{C}$ est une variable aléatoire, alors :

$$|\mathbf{E}(X)|\leqslant\mathbf{E}(|X|)\qquad[\text{inégalité triangulaire}]\ .$$

L'espérance possède les mêmes propriétés que l'intégrale des fonctions continues par morceaux sur un segment.

(32) Espérance d'un produit de variables aléatoires indépendantes. — Soient $(\Omega,\mathbf{P})$ un espace probabilisé fini, $n\in\mathbf{N}_{\geqslant 2}$ et

$$X_1:\Omega\longrightarrow\mathbf{C}\quad,\quad X_2:\Omega\longrightarrow\mathbf{C}\quad,\quad\dots\quad,\quad X_n:\Omega\longrightarrow\mathbf{C}$$

des variables aléatoires. Si $(X_1,X_2,\dots,X_n)$ est une famille de variables aléatoires indépendantes, alors :

$$\mathbf{E}(X_1X_2\dots X_n)=\mathbf{E}(X_1)\,\mathbf{E}(X_2)\dots\mathbf{E}(X_n)\ .$$

(33) Variance et écart type d'une variable aléatoire réelle. — Soient $(\Omega, \mathbf{P})$ un espace probabilisé fini et $X : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$ une variable aléatoire.

(a) La variable de X, notée $\mathbf{V}(X)$, est définie par :

$$\mathbf{V}(X) := \mathbf{E}\left((X - \mathbf{E}(X))^2\right) \geqslant 0 \qquad [\text{mesure la dispersion des valeurs de } X \text{ par rapport à la moyenne } \mathbf{E}(X)] .$$

(b) L'écart type de X, noté $\sigma(X)$, est défini par :

$$\sigma(X) := \sqrt{\mathbf{V}(X)} .$$

(34) Variable aléatoire réduite. — Une variable aléatoire est dite réduite si sa variance vaut 1.

(35) Effet d'une transformation affine sur la variance. — Soient $(\Omega, \mathbf{P})$ un espace probabilisé fini et $X : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$ une variable aléatoire. Pour tout $(a, b) \in \mathbf{R}^2$:

$$\mathbf{V}(aX + b) = a^2 \mathbf{V}(X)$$

(36) Centrage et réduction d'une variable aléatoire. — Soient $(\Omega, \mathbf{P})$ un espace probabilisé fini et $X : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$ une variable aléatoire telle que $\sigma(X) > 0$. Alors la variable :

$$\frac{X - \mathbf{E}(X)}{\sigma(X)}$$

est centrée et réduite.

(37) Formule de Koenig-Huygens pour la variance. — Soient $(\Omega, \mathbf{P})$ un espace probabilisé fini et $X : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$. Alors :

$$\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}\left(X^2\right) - \mathbf{E}(X)^2 .$$

(38) Covariance de deux variables aléatoires réelles. — Soient $(\Omega, \mathbf{P})$ un espace probabilisé fini et $X : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$, $Y : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$ deux variables aléatoires. La covariance de X et Y, notée $\mathbf{Cov}(X\,,Y)$, est définie par :

$$\mathbf{Cov}(X\,,Y) := \mathbf{E}((X - \mathbf{E}(X))(Y - \mathbf{E}(Y)))$$

de sorte que $\mathbf{Cov}(X\,,X) = \mathbf{V}(X)$.

(39) Propriétés de la covariance. — Soient $(\Omega, \mathbf{P})$ un espace probabilisé fini. La covariance

$$\mathbf{Cov} \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^\Omega \times \mathbf{R}^\Omega & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (X, Y) & \longmapsto & \mathbf{Cov}(X\,,Y) = \mathbf{E}((X - \mathbf{E}(X))(Y - \mathbf{E}(Y))) \end{array} \right.$$

est une forme bilinéaire, symétrique et positive sur l'ensemble $\mathbf{R}^\Omega$ des variables aléatoires réelles définies sur Ω, i.e. :

(a) $\forall (X_1, X_2, Y) \in \left(\mathbf{R}^\Omega\right)^3 \quad \forall (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbf{R}^2 \quad \mathbf{Cov}(\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2\,, Y) = \lambda_1\,\mathbf{Cov}(X_1\,, Y) + \lambda_2\,\mathbf{Cov}(X_2\,, Y)$

(b) $\forall (X, Y_1, Y_2) \in \left(\mathbf{R}^\Omega\right)^3 \quad \forall (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbf{R}^2 \quad \mathbf{Cov}(X\,, \lambda_1 Y_1 + \lambda_2 Y_2) = \lambda_1\,\mathbf{Cov}(X\,, Y_1) + \lambda_2\,\mathbf{Cov}(X\,, Y_2)$

(c) $\forall (X, Y) \in \left(\mathbf{R}^\Omega\right)^2 \quad \mathbf{Cov}(X\,, Y) = \mathbf{Cov}(Y\,, X)$

(d) $\forall X \in \mathbf{R}^\Omega \quad \mathbf{Cov}(X\,, X) \geqslant 0 .$

La covariance possède toutes les propriétés d'un produit scalaire, à l'exception notation du caractère défini.

(40) Variables aléatoires décorrélées. — Deux variables aléatoires sont dites décorrélées si leur covariance vaut 0.

(41) Formule de Koenig-Huygens pour la covariance. — Soient (Ω, P) un espace probabilisé fini et $X : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$, $Y : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$ deux variables aléatoires. Alors

$$\mathbf{Cov}(X\,,\,Y) = \mathbf{E}(XY) - \mathbf{E}(X)\,\mathbf{E}(Y)\,.$$

(42) L'indépendance entraîne la décorrélation. — Soient $(\Omega, \mathbf{P})$ un espace probabilisé fini et $X : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$, $Y : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$ deux variables aléatoires. Alors

$$X \perp\!\!\!\perp Y \quad \Longrightarrow \quad X \text{ et } Y \text{ sont décorrélées}\,.$$

La décorrélation n'entraîne pas nécessairement l'indépendance.

(43) Variance d'une somme de variables aléatoires. — Soient $(\Omega, \mathbf{P})$ un espace probabilisé fini, $n \geqslant 2$ et $(X_i : \Omega \longrightarrow \mathbf{R})_{i \in [\![1,n]\!]}$ une famille de variables aléatoires.

(a) $\mathbf{V}(X_1 + X_2) = \mathbf{V}(X_1) + \mathbf{V}(X_2) + 2\,\mathbf{Cov}(X_1\,,X_2)$

(b) Si X_1 et X_2 sont décorrélées alors $\mathbf{V}(X_1 + X_2) = \mathbf{V}(X_1) + \mathbf{V}(X_2)$.

(c) $\mathbf{V}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{V}(X_i) + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \mathbf{Cov}\left(X_i\,,\,Y_j\right)$

(d) Si $X_1, \ldots, X_n$ sont deux-à-deux décorrélées alors $\mathbf{V}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{V}(X_i)$.

(44) Inégalité de Markov. — Soient $(\Omega, \mathbf{P})$ un espace probabilisé fini, $X : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$ une variable aléatoire telle que $X \geqslant 0$ et $a > 0$. Alors :

$$\mathbf{P}(X \geqslant a) \leqslant \frac{\mathbf{E}(X)}{a}\,.$$

(45) Inégalité de Bienaymé-Tchebychev. — Soient $(\Omega, \mathbf{P})$ un espace probabilisé fini, $X : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$ une variable aléatoire et $\varepsilon > 0$. Alors

$$\mathbf{P}(|X - \mathbf{E}(X)| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{\mathbf{V}(X)}{\varepsilon^2}\,.$$

(46) Loi uniforme sur un ensemble fini non vide. — Soient $(\Omega, \mathbf{P})$ un espace probabilisé fini, E un ensemble et $X : \Omega \longrightarrow E$ une variable aléatoire. On dit que X suit la loi uniforme sur $X(\Omega)$ et on note $X \sim \mathscr{U}(X(\Omega))$, si toutes les probabilités $P(X = x)$, où $x \in X(\Omega)$, sont égales ou, ce qui revient au même, si :

$$\forall\, x \in X(\Omega) \quad P(X = x) = \frac{1}{\operatorname{card}(X(\Omega))}\,.$$

(47) Loi de Bernoulli. — Soient $(\Omega, \mathbf{P})$ un espace probabilisé fini, $p \in]0,1[$, E un ensemble, $X : \Omega \longrightarrow E$ une variable aléatoire. On dit que X suit la loi de Bernoulli de paramètre p et on note $X \sim \mathscr{B}(p)$, si :

$$X(\Omega) = \{0,1\} \quad \text{et} \quad \mathbf{P}(X = 1) = p\,.$$

Alors :

$$\mathbf{P}(X = 0) = 1 - p \quad , \quad \mathbf{E}(X) = p \quad , \quad \mathbf{V}(X) = p(1-p)\,.$$

(48) Loi d'une indicatrice. — Soit A un événement d'un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathbf{P})$. Alors $\mathbf{1}_A \sim \mathscr{B}(\mathbf{P}(A))$.

(49) Loi binomiale. — Soient $(\Omega, \mathbf{P})$ un espace probabilisé fini, $(n,p) \in \mathbf{N}^* \times]0,1[$, E un ensemble, $X : \Omega \longrightarrow E$ une variable aléatoire. On dit que X suit la loi binomiale de paramètre (n,p) et on note $X \sim \mathscr{B}(n,p)$, si :

$$X(\Omega) = [\![0,n]\!] \quad \text{et} \quad \forall\, k \in [\![0,n]\!] \quad P(X=k) = \binom{n}{k} p^k \, (1-p)^{n-k} .$$

Alors :

$$\mathbf{E}(X) = n\,p \qquad , \qquad \mathbf{V}(X) = n\,p\,(1-p) .$$

(50) Situation de reconnaissance de loi binomiale. — Si l'on répète n fois ($n \in \mathbf{N}^*$) une expérience de Bernoulli (i.e. une expérience aléatoire ayant deux issues : 0 et 1) de manière indépendante et si X est la variable aléatoire qui compte le nombre de succès (i.e. de 1) obtenus, alors $X \sim \mathscr{B}(n,p)$ où p est la probabilité de succès lors d'une réalisation de l'expérience de Bernoulli.

(51) Somme de variables de Bernoulli mutuellement indépendantes. — Soit $(\Omega, \mathbf{P})$ un espace probabilisé fini. Soit $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathscr{P})$, mutuellement indépendantes, suivant la loi $\mathscr{B}(p)$, où $p \in]0,1[$. Alors :

$$X_1 + \ldots + X_n \sim \mathscr{B}(n,p) .$$