

Programme de la colle n°13 (2-6 février)

Suites et séries de fonctions 2

1. Déroulement de la colle	1
2. Programme	1
3. Questions de cours	2
4. Exercices de la banque CCINP à étudier	2

1. Déroulement de la colle

Étudiants de MPI

La colle comporte trois phases.

1. Rédaction d'une question de cours (5 points, **10 minutes maximum**) : la colle débute par une des questions de cours listées dessous.
2. Résolution d'un des exercices de la banque de sujets du CCINP indiqués dans le document (5 points, **15 minutes maximum**) : ils auront été travaillés en amont de la colle et les solutions seront exposées avec dynamisme. L'accent sera mis sur la compréhension des concepts et, jamais, on ne récitera un corrigé non compris.
3. Résolution d'exercices proposés par l'examineur (10 points) : la colle se poursuit avec des exercices que vous ne connaissez pas à l'avance et que vous résoudrez au tableau, sans temps de préparation sur feuille.

Étudiants de MPI*

La colle comporte deux phases.

1. Rédaction d'une question de cours (5 points, **10 minutes maximum**) : la colle débute par une des questions de cours listées dessous.
2. Résolution d'exercices proposés par l'examineur (15 points) : la colle se poursuit avec des exercices que vous ne connaissez pas à l'avance et que vous résoudrez au tableau, sans temps de préparation sur feuille.

N.B. : Les étudiants de MPI* auront impérativement étudié les exercices de la banque de sujets du CCINP indiqués dans le document.

2. Programme

§ Suites et séries de fonctions 1 — *convergence simple d'une suite de fonctions, convergence uniforme d'une suite de fonctions, convergence uniforme dans le cas où les fonctions sont bornées, un critère séquentiel de non-convergence uniforme, passage du local pour la convergence simple (mais pas pour la convergence uniforme), synthèse sur la convergence d'une suite de fonctions définies sur une partie de $\mathbf{R}$, la convergence simple n'est pas associée à une norme (HP), convergence simple d'une série de fonctions, convergence uniforme d'une série de fonctions, convergence uniforme d'une série de fonctions versus convergence uniforme de la suite des restes vers la fonction nulle, convergence normale d'une série de fonctions bornées, synthèse sur la convergence d'une séries de fonctions bornées sur une partie de $\mathbf{R}$, approximation uniforme.*

§ Suites et séries de fonctions 2 — *continuité et double limite, intégration d'une limite uniforme sur un segment, dérivations des suites/séries de fonctions, étude de la fonction ζ de Riemann.*

À venir. — § Réduction des endomorphismes 2, § Séries entières, § Intégrales à paramètre.

3. Questions de cours

Les références indiquées renvoient au **polycopié de cours « Suites et séries de fonctions 2 »**.

1. Théorème de la double limite en un point de l'intervalle pour une suite de fonctions [théorème 1, énoncé et démonstration].
2. Théorème de la double limite en un point de l'intervalle pour une série de fonctions [corollaire 4, énoncé].
3. Théorème de la double limite en un point du bord l'intervalle pour une série de fonctions [corollaire 10, énoncé].
4. Limite de la fonction ζ de Riemann en $+\infty$ et en 1^+ [question 2 de l'exercice 12, résolution].
5. Intégration d'une limite d'une suite de fonctions sur un segment [théorème 13, énoncé et démonstration].
6. Intégration terme à terme d'une somme de série de fonctions sur un segment [théorème 17, énoncé et explication de la bascule des suites aux séries].
7. Si $r \in [0, 1[$ et $t \in \mathbf{R}$, existence et valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} r^n n \cos(nt)$ [exercice 22, résolution].
8. Critère $\mathcal{C}^1$ pour les suites de fonctions [théorème 23, énoncé et démonstration de C1 et C2].
9. Critère $\mathcal{C}^k$ pour les séries de fonctions [corollaire 29, énoncé de C1 et C2].
10. La fonction ζ de Riemann est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1, +\infty[$ et expressions de ses dérivées itérées comme sommes de séries convergentes [question 2 de l'exercice 31, résolution].

4. Exercices de la banque CCINP à étudier

Des corrigés, rédigés par David Delaunay, sont disponibles.

Exercice de la banque CCINP n°10. — Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on définit la fonction f_n par :

$$f_n : x \mapsto (x^2 + 1) \frac{ne^x + xe^{-x}}{n + x}.$$

1. Démontrer que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur $[0, 1]$.

2. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 (x^2 + 1) \frac{ne^x + xe^{-x}}{n + x} dx$.

Exercice de la banque CCINP n°14 (tronqué). — Démontrer que $\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \right) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n}$.

Exercice de la banque CCINP n°16. — On considère la série de fonctions de terme général u_n définie par :

$$\forall n \in \mathbf{N}^* \quad \forall x \in [0, 1] \quad u_n(x) = \ln \left(1 + \frac{x}{n} \right) - \frac{x}{n}.$$

Si la série $\sum u_n(x)$ converge pour un réel $x \in [0, 1]$, on pose $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\ln \left(1 + \frac{x}{n} \right) - \frac{x}{n} \right]$.

1. Démontrer que S est définie sur $[0, 1]$.
 2. On définit une suite $(u_n)_{n \geq 1}$ par, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $u_n = \ln(n+1) - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.
 - (a) En utilisant $S(1)$ démontrer que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est convergente.
 - (b) En déduire un équivalent simple de $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ lorsque n tend vers $+\infty$.
 3. Démontrer que S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$ et calculer $S'(1)$.
-

Exercice de la banque CCINP n°48. — $\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbf{R})$ désigne l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0, 1]$ à valeurs dans $\mathbf{R}$. Soit $f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbf{R})$ telle que :

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad \int_0^1 t^n f(t) \, dt = 0.$$

1. Énoncer le théorème de Weierstrass d'approximation par des fonctions polynomiales.
2. Soit (P_n) une suite de fonctions polynomiales convergeant uniformément sur le segment $[0, 1]$ vers f .
 - (a) Montrer que la suite de fonctions $(P_n f)$ converge uniformément sur le segment $[0, 1]$ vers f^2 .
 - (b) Démontrer que :

$$\int_0^1 f^2(t) \, dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 P_n(t) f(t) \, dt.$$

$$(c) \text{ Calculer } \int_0^1 P_n(t) f(t) \, dt.$$

3. En déduire que f est la fonction nulle sur le segment $[0, 1]$.
-

Exercice de la banque CCINP n°53. — On considère, pour tout entier naturel n non nul, la fonction f_n définie sur $\mathbf{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbf{R} \quad f_n(x) = \frac{x}{1 + n^4 x^4}.$$

1. (a) Prouver que $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbf{R}$. On pose alors :

$$\forall x \in \mathbf{R} \quad f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x).$$

- (b) Soit $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ avec $0 < a < b$. $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge-t-elle normalement sur $[a, b]$? sur $[a, +\infty[$?

- (c) $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge-t-elle normalement sur $[0, +\infty[$?

2. Prouver que f est continue sur $\mathbf{R}^*$.

3. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
-