

Programme de la colle n°12 (26-30 janvier)

Structures algébriques

1. Déroulement de la colle	1
2. Programme	1
3. Questions de cours	1

1. Déroulement de la colle

La colle comporte trois phases, pour les élèves de MPI et les élèves de MPI*.

1. Rédaction d'une question de cours, parmi celles listées ci-dessous (5 points, 10 minutes maximum).
2. Résolution d'un système de congruences simultanées de la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} x \equiv a_1 \pmod{n_1} \\ x \equiv a_2 \pmod{n_2} \end{array} \right. \quad \text{ou} \quad \left\{ \begin{array}{l} x \equiv a_1 \pmod{n_1} \\ x \equiv a_2 \pmod{n_2} \\ x \equiv a_3 \pmod{n_3} \end{array} \right.$$

où $a_1, a_2, a_3, n_1, n_2, n_3$ sont des entiers choisis par l'examinatrice/teur et $x \in \mathbf{Z}$ est l'inconnue (5 points, 10 minutes maximum).

3. Résolution d'exercices proposés par l'examinatrice/teur (10 points) .

2. Programme

§ Structures algébriques. — rappels sur les groupes, rappels sur les sous-groupes, rappels sur les morphismes de groupes, sous-groupes additifs de $\mathbf{Z}$, sous-groupe engendré par une partie d'un groupe, groupe $(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}, +)$, classification des groupes monogènes, théorème de Lagrange, ordre d'un élément d'un groupe, rappels sur les anneaux, rappels sur les sous-anneaux, rappels sur les morphismes d'anneaux, compléments sur les anneaux, idéaux de $\mathbf{Z}$, anneau $(\mathbf{Z}, n\mathbf{Z}, +, \times)$, anneau $(\mathbf{K}[X], +, \times)$, $\mathbf{K}$ -algèbres.

À venir. — § Suites et séries de fonctions 2, § Réduction des endomorphismes 2, § Séries entières, § Théorèmes de Lebesgue.

3. Questions de cours

Les références indiquées renvoient au **polycopié de cours « Structures algébriques »**.

1. Description des sous-groupes additifs de $\mathbf{Z}$ [théorème 47, énoncé et démonstration].
2. Structure de groupe additif sur $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ [théorème 78, énoncé intégral et démonstration du caractère bien défini de la loi]. Générateurs du groupe $(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}, +)$ [proposition 80, énoncé et démonstration].
3. Classification des groupes monogènes [théorème 90, énoncé et démonstration].
4. Ordre d'un élément d'un groupe et sous-groupe engendré par cet élément [proposition 96, énoncé]. Propriété de divisibilité de l'ordre d'un élément [proposition 104, énoncé et démonstration]. Propriété de l'ordre d'un élément d'un groupe fini [théorème 105, énoncé].
5. Inversibles de l'anneau $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ [théorème 153, énoncé et démonstration]. Critère pour que $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ soit un corps [corollaire 156, énoncé].
6. Théorème des restes chinois [théorème 165, énoncé et démonstration].
7. Théorème d'Euler [théorème 171, énoncé et démonstration]. Petit théorème de Fermat [remarque 172, énoncé].
8. Calcul de l'indicatrice d'Euler [théorème 174, énoncé et démonstration].
9. Description des idéaux de $\mathbf{K}[X]$ [théorème 179, énoncé et démonstration].
10. Définition d'un polynôme de $\mathbf{K}[X]$ irréductible sur $\mathbf{K}$ [définition 183]. Un polynôme de $\mathbf{K}[X]$ de degré 2 ou 3 est irréductible sur $\mathbf{K}$ si et seulement s'il ne possède aucune racine dans $\mathbf{K}$ [exercice 185, résolution]. Exemple d'un polynôme $P \in \mathbf{R}[X]$ de degré 4, sans racine réelle, mais réductible sur $\mathbf{R}$.