

Programme de la colle n°15 (9-13 mars)

Séries entières

1. Déroulement de la colle	1
2. Programme	1
3. Questions de cours	2
4. Exercices de la banque CCINP à étudier	2

1. Déroulement de la colle

Étudiants de MPI

La colle comporte trois phases.

1. Rédaction d'une question de cours (5 points, **10 minutes maximum**) : la colle débute par une des questions de cours listées dessous.
2. Résolution d'un des exercices de la banque de sujets du CCINP indiqués dans le document (5 points, **15 minutes maximum**) : ils auront été travaillés en amont de la colle et les solutions seront exposées avec dynamisme. L'accent sera mis sur la compréhension des concepts et, jamais, on ne récitera un corrigé non compris.
3. Résolution d'exercices proposés par l'examineur (10 points) : la colle se poursuit avec des exercices que vous ne connaissez pas à l'avance et que vous résoudrez au tableau, sans temps de préparation sur feuille.

Étudiants de MPI*

La colle comporte deux phases.

1. Rédaction d'une question de cours (5 points, **10 minutes maximum**) : la colle débute par une des questions de cours listées dessous.
2. Résolution d'exercices proposés par l'examineur (15 points) : la colle se poursuit avec des exercices que vous ne connaissez pas à l'avance et que vous résoudrez au tableau, sans temps de préparation sur feuille.

N.B. : Les étudiants de MPI* auront impérativement étudié les exercices de la banque de sujets du CCINP indiqués dans le document.

2. Programme

§ Séries entières — *notion de série entière et problématique, rayon de convergence d'une série entière, calcul pratique du rayon de convergence, somme et produit de Cauchy de deux séries entières, de la continuité d'une somme de série entière, théorème d'Abel radial, régularité de la somme d'une série entière de la variable réelle, fonctions développables en série entière et développements usuels.*

À venir. — § Intégrales à paramètre, § Équations différentielles linéaires, § Probabilités 2, § Endomorphismes des espaces euclidiens, § Calcul différentiel 2.

3. Questions de cours

Les références indiquées renvoient au **polycopié de cours « Séries entières »**.

1. Lemme d'Abel [lemme 2 : énoncé, schémas, démonstration]. Développement en série entière de la fonction $x \mapsto e^x$ [table de la partie 8.7 : énoncé].
2. Définition du rayon de convergence [définition 3 : énoncé]. Invariance du rayon de convergence par multiplication par n^α , où α est une constante réelle [proposition 13 : énoncé et démonstration].
3. Caractérisation du rayon de convergence [proposition 5 : énoncé, schéma, démonstration]. Développement en série entière de la fonction $x \mapsto \sinh(x)$ [table de la partie 8.7 : énoncé].
4. Relations de comparaison et rayons de convergence [proposition 12 : énoncé, démonstration]. Développement en série entière de la fonction $x \mapsto \cos(x)$ [table de la partie 8.7 : énoncé].
5. Somme de deux séries entières [proposition 19 : énoncé]. Produit de Cauchy de deux séries entières [proposition 24 : énoncé et démonstration]. Développement en série entière de la fonction $x \mapsto \sin(x)$ [table de la partie 8.7 : énoncé].
6. De la convergence normale d'une série entière [théorème 29 : énoncé, démonstration]. Une série entière ne converge pas nécessairement uniformément sur son disque ouvert de convergence [contre-exemple de la remarque 31 : énoncé et justification].
7. Théorème d'Abel radial [théorème 35 : énoncé]. Développement en série entière de la fonction $x \mapsto \arctan(x)$ [table de la partie 8.7 : énoncé]. Application au calcul de la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ [exercice 36 : résolution].
8. Caractère $\mathcal{C}^\infty$ de la somme d'une série entière [théorème 39 : énoncé]. Développement en série entière de la fonction $x \mapsto \cosh(x)$ [table de la partie 8.7 : énoncé].
9. Primitivation terme à terme de la somme d'une série entière [corollaire 42 : énoncé]. Développement en série entière de la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ [table de la partie 8.7 : énoncé].
10. Coefficients d'une série entière de rayon de convergence non nul [corollaire 45, énoncé, démonstration]. Développement en série entière de la fonction $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ [table de la partie 8.7 : énoncé].
11. Développement en série entière de la fonction $x \mapsto (1+x)^\alpha$, où $\alpha \in \mathbf{R}$ [table de la partie 8.7 : énoncé, exercice 57 : résolution en introduisant un problème de Cauchy idoïne].

4. Exercices de la banque CCINP à étudier

Des corrigés, rédigés par David Delaunay, sont disponibles.

Exercice de la banque CCINP n°2. — On pose $f(x) = \frac{3x+7}{(x+1)^2}$.

1. Décomposer $f(x)$ en éléments simples.
2. En déduire que f est développable en série entière sur un intervalle du type $] -r, r[$ (où $r > 0$). Préciser ce développement en série entière et déterminer, en le justifiant, le domaine de validité D de ce développement en série entière.
3. (a) Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon $R > 0$. On pose, pour tout $x \in]-R, R[$, $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.
Exprimer, pour tout entier p , en le prouvant, a_p en fonction de $g^{(p)}(0)$.
(b) En déduire le développement limité de f à l'ordre 3 au voisinage de 0.

Exercice de la banque CCINP n°15. — Soit X une partie de $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

1. Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur X à valeurs dans $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$. Rappeler la définition de la convergence normale de $\sum f_n$ sur X , puis celle de la convergence uniforme de $\sum f_n$ sur X .
2. Démontrer que toute série de fonctions, à valeurs dans $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, normalement convergente sur X est uniformément convergente sur X .
3. La série de fonctions $\sum \frac{n^2}{n!} z^n$ est-elle uniformément convergente sur le disque fermé de centre 0 et de rayon $R \in \mathbf{R}_+^*$?

Exercice de la banque CCINP n°18. — On pose :

$$\forall n \in \mathbf{N}^* \quad \forall x \in \mathbf{R} \quad u_n(x) = \frac{(-1)^n x^n}{n}.$$

On considère la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} u_n$.

1. Étudier la convergence simple de cette série. On note D l'ensemble des x où cette série converge et $S(x)$ la somme de cette série pour $x \in D$.
2. (a) La fonction S est-elle continue sur D ?
 (b) Étudier la convergence normale, puis la convergence uniforme de cette série sur D .
 (c) Étudier la convergence uniforme de cette série sur $[0, 1]$.

Exercice de la banque CCINP n°20. —

1. Donner la définition du rayon de convergence d'une série entière de la variable complexe.
2. Déterminer le rayon de convergence de chacune des séries entières suivantes.

$$\sum \frac{(n!)^2}{(2n)!} z^{2n+1} \qquad \sum n^{(-1)^n} z^n \qquad \sum \cos(n) z^n$$

Exercice de la banque CCINP n°19. —

1. (a) Justifier, oralement, à l'aide du théorème de dérivation terme à terme, que la somme d'une série entière de la variable réelle est dérivable sur son intervalle ouvert de convergence.
 (b) En déduire le développement en série entière à l'origine, de la fonction de la variable réelle $x \mapsto \frac{1}{(1-x)^2}$.
2. (a) Donner le développement en série entière à l'origine de la fonction de la variable complexe $z \mapsto \frac{1}{1-z}$.
 (b) Rappeler le produit de Cauchy de deux séries entières.
 (c) En déduire le développement en série entière à l'origine, de la fonction de la variable complexe $z \mapsto \frac{1}{(1-z)^2}$.

Exercice de la banque CCINP n°21. —

1. Donner la définition du rayon de convergence d'une série entière de la variable complexe.
 2. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite bornée telle que la série $\sum a_n$ diverge. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$? Justifier.
 3. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 1} (\sqrt{n})^{(-1)^n} \ln \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}} \right) z^n$?
-

Exercice de la banque CCINP n°22. —

1. Que peut-on dire du rayon de convergence de la somme de deux séries entières ? Le démontrer.
2. Développer en série entière au voisinage de 0, en précisant le rayon de convergence, la fonction :

$$f : x \mapsto \ln(1+x) + \ln(1-2x).$$

La série obtenue converge-t-elle pour $x = \frac{1}{4}$? $x = \frac{1}{2}$? $x = -\frac{1}{2}$? En cas de convergence, la somme de cette série est-elle continue en ces points ?

Exercice de la banque CCINP n°23. — Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite complexe telle que la suite $\left(\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une limite.

1. Démontrer que les séries entières $\sum a_n x^n$ et $\sum (n+1) a_{n+1} x^n$ ont le même rayon de convergence. On le note R .
 2. Démontrer que la fonction $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $] -R, R[$.
-

Exercice de la banque CCINP n°24. —

1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{x^n}{(2n)!}$. On pose $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!}$.
 2. Rappeler, sans démonstration, le développement en série entière en 0 de la fonction $x \mapsto \operatorname{ch}(x)$ et préciser le rayon de convergence.
 3. (a) Déterminer $S(x)$.
(b) On considère la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par $f(0) = 1$, $f(x) = \operatorname{ch}(\sqrt{x})$ si $x > 0$ et $f(x) = \cos(\sqrt{-x})$ si $x < 0$. Démontrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$.
-

Exercice de la banque CCINP n°47. — Pour chacune des séries entières de la variable réelle suivantes, déterminer le rayon de convergence et calculer la somme de la série entière sur l'intervalle ouvert de convergence.

1. $\sum_{n \geq 1} \frac{3^n x^{2n}}{n}$
 2. $\sum a_n x^n$ avec $\begin{cases} a_{2n} = 4^n \\ a_{2n+1} = 5^{n+1} \end{cases}$
-

Exercice de la banque CCINP n°51. —

1. Montrer que la série $\sum \frac{(2n)!}{(n!)^2 2^{4n} (2n+1)}$ converge.

On se propose de calculer la somme de cette série.

2. Donner le développement en série entière en 0 de $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-t}}$ en précisant le rayon de convergence.
Dans l'expression du développement, on utilisera la notation factorielle.
3. En déduire le développement en série entière en 0 de $x \mapsto \operatorname{Arcsin} x$ ainsi que son rayon de convergence.
4. En déduire la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2 2^{4n} (2n+1)}$.
-