Programme de la colle n°2 (22-26 septembre)

Révisions d'algèbre linéaire

1. Déroulement de la colle

Étudiants de MPI

La colle comporte trois phases.

1. Rédaction d'une question de cours (5 points, **10 minutes maximum**) : la colle débute par une des questions de cours listées dessous.
2. Résolution d'un des exercices de la banque de sujets du CCINP indiqués dans le document (5 points, **15 minutes maximum**) : ils auront été travaillés en amont de la colle et les solutions seront exposées avec dynamisme. L'accent sera mis sur la compréhension des concepts et, jamais, on ne récitera un corrigé non compris.
3. Résolution d'exercices proposés par l'examinateur (10 points) : la colle se poursuit avec des exercices que vous ne connaissez pas à l'avance et que vous résoudrez au tableau, sans temps de préparation sur feuille.

Étudiants de MPI*

La colle comporte deux phases.

1. Rédaction d'une question de cours (5 points, **10 minutes maximum**) : la colle débute par une des questions de cours listées dessous.
2. Résolution d'exercices proposés par l'examinateur (15 points) : la colle se poursuit avec des exercices que vous ne connaissez pas à l'avance et que vous résoudrez au tableau, sans temps de préparation sur feuille.

N.B. : Les étudiants de MPI* auront impérativement étudié les exercices de la banque de sujets du CCINP indiqués dans le document.

2. Programme

§ **Algèbre linéaire de MP2I. —** *Notion de* $\mathbf{K}$*-espace vectoriel, sous-espaces vectoriels, familles remarquables finies, familles remarquables, dimension finie, applications linéaires, matrices d'applications linéaires, matrices, hyperplans et formes linéaires, déterminant.*

À venir. — § Réduction des endomorphismes I, § Espaces vectoriels normés I, § Fonctions de la variable réelle à valeurs dans $\mathbf{R}$ (révisions de MP2I)

3. Questions de cours

Les références indiquées renvoient au polycopié de cours « Révisions d'algèbre linéaire ».

1. Formules de Grassmann [énoncé 102 et démonstration].
2. Théorème du rang et formule du rang [énoncé 121 et démonstration].
3. Coordonnées de l'image d'un vecteur par une applicaion linéaire [énoncé 129 et démonstration]. Composition d'applications linéaires et produit de matrices [énoncé 132].
4. Critère d'inversibilité d'une matrice *via* son noyau [énoncé 139 et démonstration].
5. Inversibilité à droite (resp. à gauche) d'une matrice carrée [énoncé 160 et démonstration].
6. Propriétés de la trace d'une matrice [énoncé 163 et démonstration de la propriété 2 (trace d'un produit)]. Propriétés de la transposition [énoncé 168].
7. Représentation d'une application linéaire par une matrice de Jordan dans des bases judicieusement choisies [énoncé 170 et démonstration]. Caractérisation du rang d'une matrice *via* une matrice de Jordan [énoncé 171].

8. Définition d'un hyperplan [énoncé 173]. Construction de supplémentaires d'un hyperplan [énoncé 174 et démonstration]. Caractérisation des hyperplans *via* leurs supplémentaires [énoncé 175].
9. Définition du déterminant d'une matrice carrée [énoncé 199]. Formules de développement du déterminant selon une ligne (resp. une colonne) [énoncé 212].
10. Définition de la comatrice [énoncé 216]. Lien entre une matrice et sa comatrice [énoncé 217].

4. Exercices de la banque CCINP à étudier

Exercice de la banque CCINP n°60. — *Soit la matrice* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ *et* f *l'endomorphisme de* $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ *défini par :* $f(M) = AM$.

1. *Déterminer une base de* $\mathrm{Ker} f$.
2. f *est-il surjectif ?*
3. *Déterminer une base de* $\mathrm{Im} f$.
4. *A-t-on* $\mathscr{M}_2(\mathbb{R}) = \mathrm{Ker} f \oplus \mathrm{Im} f$ *?*

Exercice de la banque CCINP n°64. — *Soit* f *un endomorphisme d'un espace vectoriel* E *de dimension finie* n.

1. *Démontrer que :* $E = \mathrm{Im} f \oplus \mathrm{Ker} f \Longrightarrow \mathrm{Im} f = \mathrm{Im} f^2$.
2. (a) *Démontrer que :* $\mathrm{Im} f = \mathrm{Im} f^2 \Longleftrightarrow \mathrm{Ker} f = \mathrm{Ker} f^2$.
   (b) *Démontrer que :* $\mathrm{Im} f = \mathrm{Im} f^2 \Longrightarrow E = \mathrm{Im} f \oplus \mathrm{Ker} f$.

Exercice de la banque CCINP n°71. — *Soit* P *le plan d'équation* $x + y + z = 0$ *et* D *la droite d'équation* $x = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{3}$.

1. *Vérifier que* $\mathbb{R}^3 = P \oplus D$.
2. *Soit* p *la projection vectorielle de* $\mathbb{R}^3$ *sur* P *parallèlement à* D.
   Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
   Déterminer $p(u)$ *et donner la matrice de* p *dans la base canonique de* $\mathbb{R}^3$.
3. *Déterminer une base de* $\mathbb{R}^3$ *dans laquelle la matrice de* p *est diagonale.*

Exercice de la banque CCINP n°87. — *Soient* $a_0, a_1, \cdots, a_n$, $n+1$ *réels deux à deux distincts.*

1. *Montrer que si* $b_0, b_1, \cdots, b_n$ *sont* $n+1$ *réels quelconques, alors il existe un unique polynôme* P *vérifiant*
$$\deg P \leqslant n \text{ et } \forall i \in [\![0, n]\!],\ P(a_i) = b_i.$$
2. *Soit* $k \in [\![0, n]\!]$.
   Expliciter ce polynôme P*, que l'on notera* L_k*, lorsque :*
$$\forall i \in [\![0, n]\!],\quad b_i = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad i \neq k \\ 1 & \text{si} \quad i = k \end{cases}$$
3. *Prouver que* $\forall p \in [\![0, n]\!]$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k^p L_k = X^p$.

Exercice de la banque CCINP n°90. — $\mathbb{K}$ *désigne le corps des réels ou celui des complexes.*
Soient a_1, a_2, a_3 *trois scalaires distincts donnés de* $\mathbb{K}$.

1. *Montrer que* $\Phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}^3 \\ P & \longmapsto & \big(P(a_1), P(a_2), P(a_3)\big) \end{array}$ *est un isomorphisme d'espaces vectoriels.*
2. *On note* (e_1, e_2, e_3) *la base canonique de* $\mathbb{K}^3$ *et on pose* $\forall k \in \{1, 2, 3\}$, $L_k = \Phi^{-1}(e_k)$.
   (a) *Justifier que* (L_1, L_2, L_3) *est une base de* $\mathbb{K}_2[X]$.
   (b) *Exprimer les polynômes* L_1, L_2 *et* L_3 *en fonction de* a_1, a_2 *et* a_3.
3. *Soit* $P \in \mathbb{K}_2[X]$. *Déterminer les coordonnées de* P *dans la base* (L_1, L_2, L_3).
4. ***Application*** *: on se place dans* $\mathbb{R}^2$ *muni d'un repère orthonormé et on considère les trois points* $A(0,1), B(1,3), C(2,1)$.
   Déterminer une fonction polynomiale de degré 2 dont la courbe passe par les points A, B et C.
