Programme de la colle n°3 (6-10 octobre)

Réduction des endomorphismes et des matrices 1

1. Déroulement de la colle

Étudiants de MPI

La colle comporte trois phases.

1. Rédaction d'une question de cours (5 points, **10 minutes maximum**) : la colle débute par une des questions de cours listées dessous.
2. Résolution d'un des exercices de la banque de sujets du CCINP indiqués dans le document (5 points, **15 minutes maximum**) : ils auront été travaillés en amont de la colle et les solutions seront exposées avec dynamisme. L'accent sera mis sur la compréhension des concepts et, jamais, on ne récitera un corrigé non compris.
3. Résolution d'exercices proposés par l'examinateur (10 points) : la colle se poursuit avec des exercices que vous ne connaissez pas à l'avance et que vous résoudrez au tableau, sans temps de préparation sur feuille.

Étudiants de MPI*

La colle comporte deux phases.

1. Rédaction d'une question de cours (5 points, **10 minutes maximum**) : la colle débute par une des questions de cours listées dessous.
2. Résolution d'exercices proposés par l'examinateur (15 points) : la colle se poursuit avec des exercices que vous ne connaissez pas à l'avance et que vous résoudrez au tableau, sans temps de préparation sur feuille.

N.B. : Les étudiants de MPI* auront impérativement étudié les exercices de la banque de sujets du CCINP indiqués dans le document.

§ Réduction des endomorphismes et des matrices 1. — *Compléments d'algèbre linéaire, éléments propres d'un endomorphisme, éléments propres d'une matrice carrée, polynôme caractéristique, diagonalisabilité, trigonalisabilité, nilpotence.*

Les polynômes d'endomorphismes/de matrices n'ont encore été présentés. Le lemme des noyaux, les polynômes annulateurs, le théorème de Cayley-Hamilton et les sous-espaces caractéristiques ne sont pas au menu de cette colle. Les résultats sur la réduction des endomorphismes induits n'y figurent pas non plus.

À venir. — § Espaces vectoriels normés I, § Fonctions de la variable réelle à valeurs dans $\mathbf{R}$ (révisions de MP2I).

2. Questions de cours

Les références indiquées renvoient au polycopié de cours « Réduction des endomorphismes et des matrices 1 ».

1. Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs [énoncé et démonstration du théorème 13].
2. Propriété d'une somme de sous-espaces propres [énoncé et démonstration du théorème 45].
3. Degré et coefficients remarquables du polynôme caractéristique d'une matrice [énoncé et démonstration du théorème 70].
4. Valeurs propres versus racines du polynôme caractéristique d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie [énoncé et démonstration du théorème 72].
5. Polynôme caractéristique d'un endomorphisme induit [énoncé et démonstration du 1. de la proposition 79].
6. Dimension d'un sous-espace propre d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie et ordre de multiplicité de la valeur propre correspondante [énoncé et démonstration de la proposition 82].
7. Caractérisation de la diagonalisabilité d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie *via* la somme des sous-espaces propres [énoncé et démonstration du théorème 96].

8. Synthèse des résultats sur la diagonalisabilité d'une matrice : une condition nécessaire non suffisante [remarque 90], une condition suffisante non nécessaire [corollaire 101], trois conditions nécessaires et suffisantes [théorème 96, corollaire 98, corollaire 103]. L'étudiant.e préparera en amont une présentation efficace de ces cinq résultats et exposera uniquement des énoncés.
9. Caractérisation de la trigonalisabilité *via* le polynôme caractéristique pour un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie [énoncé et démonstration du théorème 114].
10. Majoration du nilindice d'un endomorphisme nilpotent d'un espace vectoriel de dimension finie [énoncé et démonstration de la proposition 123]. Caractérisation de la nilpotence d'une matrice [énoncé du théorème 124].

3. Exercices de la banque CCINP à étudier

Exercice de la banque CCINP n°67. — *Soit* $M = \begin{pmatrix} 0 & a & c \\ b & 0 & c \\ b & -a & 0 \end{pmatrix}$, *où* $a, b, c \in \mathbf{R}$.

1. *M est-elle diagonalisable dans $\mathscr{M}_3(\mathbf{R})$?*
2. *M est-elle diagonalisable dans $\mathscr{M}_3(\mathbf{C})$?*

Exercice de la banque CCINP n°69. — *On considère la matrice* $A = \begin{pmatrix} 0 & a & 1 \\ a & 0 & 1 \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix}$ *où a est un réel.*

1. *Déterminer le rang de A.*
2. *Pour quelles valeurs de a, la matrice A est-elle diagonalisable ?*

Exercice de la banque CCINP n°72. — *Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, soit $f \in \mathscr{L}(E)$, soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. On suppose que $f(e_1) = \ldots = f(e_n) = v$, où v est un vecteur donné de E.*

1. *Donner le rang de f.*
2. *L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?*

Exercice de la banque CCINP n°73. —

1. *Posons* $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$. *Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A.*
2. *Déterminer les matrices qui commutent avec la matrice* $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. *En déduire l'ensemble des matrices qui commutent avec A est* $\mathrm{Vect}(I_2, A)$.

Exercice de la banque CCINP n°83. — *Soient u et v deux endomorphismes d'un $\mathbf{R}$-espace vectoriel E.*

1. *Soit λ un réel non nul. Prouver que si λ est valeur propre de $u \circ v$, alors λ est valeur propre de $v \circ u$.*
2. *On considère, sur $E = \mathbf{R}[X]$ les endomorphismes u et v définis par :*

$$u : P \longmapsto \int_1^X P \qquad \text{et} \qquad v : P \longmapsto P'$$

Déterminer $\mathrm{Ker}(u \circ v)$ *et* $\mathrm{Ker}(v \circ u)$. *Le résultat de la question 1. reste-t-il vrai pour $\lambda = 0$?*

3. *Si E est de dimension finie, démontrer que le résultat de la première question reste vrai pour $\lambda = 0$. On pourra penser à utiliser le déterminant.*
