

Programme de la colle n°5 (3-7 novembre)

Intégration sur un intervalle quelconque

1. Déroulement de la colle	1
2. Programme	1
3. Schéma rédactionnel	1
4. Questions de cours	2

1. Déroulement de la colle

La colle comporte trois phases, pour les élèves de MPI et les élèves de MPI*.

1. Rédaction d'une question de cours, parmi celles listées ci-dessous (5 points, **10 minutes maximum**).
2. Calcul d'un développement limité ou d'un développement asymptotique à l'ordre 3 ou 4 (5 points, **10 minutes maximum**).
3. Résolution d'exercices proposés par l'examinatrice/teur (10 points).

2. Programme

§ Intégration sur un intervalle quelconque. — survol de la construction de l'intégrale d'une fonction continue sur un segment, intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment, fonctions continues par morceaux sur un intervalle, études asymptotiques d'intégrales partielles, intégration sur un intervalle de la forme $[a, +\infty[$, intégrabilité sur un intervalle de la forme $[a, +\infty[$, intégration sur un intervalle quelconque, intégrabilité sur un intervalle quelconque, intégration des relations de comparaison.



La dernière partie du cours « intégration des relations de comparaison », qui présente des conditions suffisantes pour étendre une relation de comparaison liant deux intégrandes aux intégrales partielles/queues des intégrales, sera travaillée en classe le lundi 3 novembre matin. En revanche, les élèves sont déjà familiers du théorème de comparaison, qui permet d'établir des intégrabilités.

À venir. — § Espaces vectoriels normés 2, § Espaces vectoriels normés 3, § Procédés sommatoires discrets, § Probabilités I, § Suites et séries de fonctions 1, § Fonctions de la variable réelle à valeurs vectorielles, § Calcul différentiel 1, § Structures algébriques.

3. Schéma rédactionnel

L'étude de la nature d'une intégrale débute **toujours** comme suit :

1. introduction de l'intégrande

« Soit la fonction $f : x \mapsto \dots$ » [adapter les noms de la fonction f et de la variable x au contexte];

2. mention de la régularité de l'intégrande :

« La fonction f est continue (par morceaux) sur intervalle d'intégration à préciser/encadrer . »;

3. mise en valeur du point singulier/des points singuliers où une étude est nécessaire (on le/les souligne).

4. Questions de cours

Les références indiquées renvoient aux photocopiés de cours « Révisions sur l'analyse asymptotique » et « Intégration sur un intervalle quelconque ».

1. Table des dix développements limités usuels [partie 8 du photocopié de cours « Révisions sur l'analyse asymptotique », énoncé].
2. Définition d'une intégrale convergente sur un intervalle quelconque et de sa valeur, cas échéant [définition 68 du photocopié de cours « Intégration sur un intervalle quelconque », énoncé].
3. Intégrales de Riemann sur $[1, +\infty[$ et sur $]0, 1]$ [proposition 74, proposition 109 du photocopié de cours « Intégration sur un intervalle quelconque », énoncés et démonstration uniquement dans le cas $[1, +\infty[$].
4. Théorème de domination pour les intégrales de fonctions positives sur $[a, +\infty[$ [théorème 80 du photocopié de cours « Intégration sur un intervalle quelconque », énoncé et démonstration].
5. Propriété remarquable des intégrales absolument convergentes sur $[a, +\infty[$ [théorème 86 du photocopié de cours « Intégration sur un intervalle quelconque », énoncé et démonstration dans le cas où la fonction est à valeurs réelles].
6. L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ est convergente [exercice 87 du photocopié de cours « Intégration sur un intervalle quelconque », résolution].
7. L'intégrale $\int_1^{+\infty} \left| \frac{\sin(t)}{t} \right| dt$ n'est pas convergente [exercice 87 du photocopié de cours « Intégration sur un intervalle quelconque », résolution].
8. Théorème de comparaison sur $[a, +\infty[$ [théorème 88 du photocopié de cours « Intégration sur un intervalle quelconque », énoncé et démonstration uniquement pour le cas O].
9. Le faux problème de convergence en un point réel [proposition 110 du photocopié de cours « Intégration sur un intervalle quelconque », énoncé et démonstration d'une des deux assertions].
10. Théorème d'intégration par parties sur un intervalle ouvert [théorème 113 du photocopié de cours « Intégration sur un intervalle quelconque », énoncé].
11. Théorème de changement de variable sur un intervalle ouvert [théorème 118 du photocopié de cours « Intégration sur un intervalle quelconque », énoncé].
12. Intégration des équivalents [corollaire 139 du photocopié de cours « Intégration sur un intervalle quelconque », énoncé].