

Programme de la colle n°7 (17-22 novembre)

Espaces vectoriels normés 3

1. Déroulement de la colle	1
2. Programme	1
3. Questions de cours	1
4. Exercices de la banque CCINP à étudier	2

1. Déroulement de la colle

Étudiants de MPI

La colle comporte trois phases.

1. Rédaction d'une question de cours (5 points, **10 minutes maximum**) : la colle débute par une des questions de cours listées dessous.
2. Résolution d'un des exercices de la banque de sujets du CCINP indiqués dans le document (5 points, **15 minutes maximum**) : ils auront été travaillés en amont de la colle et les solutions seront exposées avec dynamisme. L'accent sera mis sur la compréhension des concepts et, jamais, on ne récitera un corrigé non compris.
3. Résolution d'exercices proposés par l'examineur (10 points) : la colle se poursuit avec des exercices que vous ne connaissez pas à l'avance et que vous résoudrez au tableau, sans temps de préparation sur feuille.

Étudiants de MPI*

La colle comporte deux phases.

1. Rédaction d'une question de cours (5 points, **10 minutes maximum**) : la colle débute par une des questions de cours listées dessous.
2. Résolution d'exercices proposés par l'examineur (15 points) : la colle se poursuit avec des exercices que vous ne connaissez pas à l'avance et que vous résoudrez au tableau, sans temps de préparation sur feuille.

N.B. : Les étudiants de MPI* auront impérativement étudié les exercices de la banque de sujets du CCINP indiqués dans le document.

2. Programme

Notation. — La lettre **K** désigne le corps **R** ou **C**.

§ Espaces vectoriels normés 1. — Normes et espaces vectoriels normés, suites d'éléments d'un **K**-espace vectoriel normé, topologie d'un **K**-espace vectoriel normé, étude locale d'une application, continuité.

§ Espaces vectoriels normés 2. — Parties compactes d'un espace vectoriel normé, applications continues sur une partie compacte, connexité par arcs.

§ Espaces vectoriels normés 3. — Applications linéaires continues, comparaison de normes, espaces vectoriels normés de dimension finie.

À venir. — § Procédés sommatoires discrets, § Probabilités I, § Suites et séries de fonctions 1, § Fonctions de la variable réelle à valeurs vectorielles, § Calcul différentiel 1, § Structures algébriques.

3. Questions de cours

Les références indiquées renvoient au polycopié de cours « **Espaces vectoriels normés 3** ».

1. Caractérisation des applications linéaires continues [énoncé et démonstration du théorème 1].
2. Norme subordonnée d'une application linéaire continue et norme sur l'espace des applications linéaires continues [énoncé et démonstration de la proposition-définition 10].
3. Inégalités pour les normes subordonnées des applications linéaires continues [énoncés et démonstrations des proposition 15 et théorème 16].

4. Caractérisation de la continuité des applications bilinéaires [énoncé de la proposition 17 et démonstration d'une des deux implications au choix de l'élève].
5. Critère séquentiel de comparaison des normes [énoncé et démonstration du théorème 24]. Critère séquentiel pour l'équivalence de deux normes [énoncé du corollaire 25].
6. Propriétés topologiques invariantes et équivalences de normes [énoncé intégral du corollaire 30 et démonstration pour les ouverts].
7. Convergence d'une suite dans un espace de dimension finie [énoncé de la proposition 37]. Compacité dans un espace de dimension finie [énoncé du théorème 38].
8. Propriété topologique d'un sous-espace vectoriel de dimension finie F d'un $\mathbf{K}$ -espace vectoriel normé (E, N) non nécessairement de dimension finie [énoncé et démonstration du théorème 41].
9. Calcul de la norme subordonnée d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, lorsque $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{C})$ est muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ [résolution de l'exercice 47].

4. Exercices de la banque CCINP à étudier

Exercice de la banque CCINP n°1. — On note E l'espace vectoriel des applications continues sur $[0, 1]$ à valeurs dans $\mathbf{R}$. On pose :

$$\forall f \in E \quad \|f\|_\infty = \sup_{t \in [0,1]} |f(t)| \quad \text{et} \quad \|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| \, dt.$$

1. Les normes $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_1$ sont-elles équivalentes ? Justifier.
2. Dans cette question, on munit E de la norme $\|\cdot\|_\infty$.

(a) Soit :

$$u \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ f & \longmapsto & f(0) \end{array} \right.$$

Prouver que u est une application continue sur E .

(b) On pose $F = \{f \in E : f(0) = 0\}$. Prouver que F est une partie fermée de E pour la norme $\|\cdot\|_\infty$.

3. Dans cette question, on munit E de la norme $\|\cdot\|_1$. Soit :

$$c \left| \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & 1 \end{array} \right.$$

On pose :

$$\forall n \in \mathbf{N}^* \quad \forall x \in [0, 1] \quad f_n(x) = \begin{cases} nx & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 1 & \text{si } \frac{1}{n} < x \leq 1 \end{cases}.$$

(a) Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Calculer $\|f_n - c\|_1$.

(b) On pose $F = \{f \in E : f(0) = 0\}$. On note $\overline{F}$ l'adhérence de F . Prouver que $c \in \overline{F}$. F est-elle une partie fermée de E pour la norme $\|\cdot\|_1$?

Exercice de la banque CCINP n°36. — Soient E et F deux espaces vectoriels normés sur le corps $\mathbf{R}$. On note $\|\cdot\|_E$ (respectivement $\|\cdot\|_F$) la norme sur E (respectivement sur F).

1. Démontrer que si f est une application linéaire de E dans F , alors les propriétés suivantes sont deux à deux équivalentes.
 - (P1) f est continue sur E .
 - (P2) f est continue en 0_E .
 - (P3) $\exists k > 0 \quad \forall x \in E \quad \|f(x)\|_F \leq k \times \|x\|_E$.
2. Soit E l'espace vectoriel des applications continues de $[0; 1]$ dans $\mathbf{R}$ muni de la norme définie par :

$$\forall f \in E \quad \|f\|_\infty = \sup_{x \in [0;1]} |f(x)|.$$

On considère l'application φ de E dans $\mathbf{R}$ définie par :

$$\forall f \in E \quad \varphi(f) = \int_0^1 f(t) \, dt.$$

Démontrer que φ est linéaire et continue.

Exercice de la banque CCINP n°37. — Notons $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbf{R})$. Pour tout $f \in E$, notons $N_\infty(f) = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)|$ et $N_1(f) = \int_0^1 |f(x)| \, dx$.

1. Démontrer succinctement que N_∞ et N_1 sont des normes sur E .
2. Démontrer qu'il existe un réel $k > 0$ tel, que pour tout $f \in E$, $N_1(f) \leq k \times N_\infty(f)$.
3. Démontrer que tout ouvert pour la norme N_1 est un ouvert pour la norme N_∞ .
4. Démontrer que les normes N_∞ et N_1 ne sont pas équivalentes.

Exercice de la banque CCINP n°38. — Les questions 1, 2 et 3 sont indépendantes.

1. On se place sur $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbf{R})$, muni de la norme $\|\cdot\|_1$ définie par :

$$\forall f \in E \quad \|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| \, dt.$$

Soit :

$$u \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ f & \longmapsto & u(f) = g \end{array} \right.$$

où :

$$\forall x \in [0, 1] \quad g(x) = \int_0^x f(t) \, dt.$$

On admet que u est un endomorphisme de E . Prouver que u est continue et calculer $\|u\|$. On pourra considérer, pour tout entier n non nul, la fonction :

$$f_n \left| \begin{array}{ccc} [0, 1] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & n e^{-nt}. \end{array} \right.$$

2. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Soit $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbf{R}^n$ un n -uplet non nul, fixé. Soit :

$$u \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^n & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (x_1, x_2, \dots, x_n) & \longmapsto & \sum_{i=1}^n a_i x_i. \end{array} \right.$$

(a) Justifier que u est continue quel que soit le choix de la norme sur $\mathbf{R}^n$.

(b) On munit $\mathbf{R}^n$ de $\|\cdot\|_2$ où :

$$\forall x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n \quad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}.$$

Calculer $\|u\|$.

3. Déterminer un espace vectoriel E , une norme sur E et un endomorphisme de E non continu pour la norme choisie. Justifier.

Exercice de la banque CCINP n°54. — Soit E l'ensemble des suites à valeurs réelles indexées par $\mathbf{N}$, qui convergent vers 0.

1. Prouver que E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites à valeurs réelles.
2. On pose :

$$\forall u = (u_n)_{n \in \mathbf{N}} \in E \quad \|u\| = \sup_{n \in \mathbf{N}} |u_n|.$$

(a) Prouver que $\|\cdot\|$ est une norme sur E .

(b) Prouver que, pour tout $u = (u_n)_{n \in \mathbf{N}} \in E$ la série $\sum \frac{u_n}{2^{n+1}}$ converge.

(c) On pose :

$$\forall u = (u_n)_{n \in \mathbf{N}} \in E \quad f(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{2^{n+1}}.$$

Prouver que f est continue sur E .