

Programme de la colle n°6 (10-15 novembre)

Espaces vectoriels normés 2

1. Déroulement de la colle	1
2. Programme	1
3. Questions de cours	1
4. Exercices de la banque CCINP à étudier	2

1. Déroulement de la colle

Étudiants de MPI

La colle comporte trois phases.

1. Rédaction d'une question de cours (5 points, **10 minutes maximum**) : la colle débute par une des questions de cours listées dessous.
2. Résolution d'un des exercices de la banque de sujets du CCINP indiqués dans le document (5 points, **15 minutes maximum**) : ils auront été travaillés en amont de la colle et les solutions seront exposées avec dynamisme. L'accent sera mis sur la compréhension des concepts et, jamais, on ne récitera un corrigé non compris.
3. Résolution d'exercices proposés par l'examineur (10 points) : la colle se poursuit avec des exercices que vous ne connaissez pas à l'avance et que vous résoudrez au tableau, sans temps de préparation sur feuille.

Étudiants de MPI*

La colle comporte deux phases.

1. Rédaction d'une question de cours (5 points, **10 minutes maximum**) : la colle débute par une des questions de cours listées dessous.
2. Résolution d'exercices proposés par l'examineur (15 points) : la colle se poursuit avec des exercices que vous ne connaissez pas à l'avance et que vous résoudrez au tableau, sans temps de préparation sur feuille.

N.B. : Les étudiants de MPI* auront impérativement étudié les exercices de la banque de sujets du CCINP indiqués dans le document.

2. Programme

Notation. — La lettre **K** désigne le corps **R** ou **C**.

§ Espaces vectoriels normés 1. — Normes et espaces vectoriels normés, suites d'éléments d'un **K**-espace vectoriel normé, topologie d'un **K**-espace vectoriel normé, étude locale d'une application, continuité.

§ Espaces vectoriels normés 2. — Parties compactes d'un espace vectoriel normé, applications continues sur une partie compacte, connexité par arcs.



Les notions suivantes n'ont pas encore été abordées : comparaison des normes, applications linéaires et multilinéaires continues, espaces vectoriels normés de dimension finie.

Toutefois, nous avons déjà établi que les fermés bornés sont compacts dans $(\mathbf{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ et $(\mathcal{M}_n(\mathbf{R}), \|\cdot\|_\infty)$ (uniquement pour ces deux espaces vectoriels normés de dimension finie). Ces deux résultats peuvent donc être appliqués pour cette colle.

À venir. — § Espaces vectoriels normés 3, § Procédés sommatoires discrets, § Probabilités I, § Suites et séries de fonctions 1, § Fonctions de la variable réelle à valeurs vectorielles, § Calcul différentiel 1, § Structures algébriques.

3. Questions de cours

Les références indiquées renvoient au polycopié de cours « **Espaces vectoriels normés 2** ».

1. Deux conditions nécessaires pour qu'une partie d'un **K**-espace vectoriel normé soit compacte [énoncé de la proposition 9 et démonstration d'une des deux conditions aux choix de l'interrogatrice/teur].

2. Une partie fermée et bornée d'un $\mathbf{K}$ -espace vectoriel normé n'est pas nécessairement compacte [énoncé du contre-exemple 11 avec justification des caractères fermé, borné et non compact].
3. Caractérisation des parties compactes de $(\mathbf{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ [énoncé et démonstration du théorème 15].
4. La partie $K = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + 4y^2 \leq 4\}$ de $(\mathbf{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$ est compacte [résolution de l'exercice 16].
5. Le groupe orthogonal $O_n(\mathbf{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) : AA^T = I_n\}$ est une partie compacte de $(\mathcal{M}_n(\mathbf{R}), \|\cdot\|_\infty)$ [résolution de la question 2 de l'exercice 19].
6. Propriété d'un fermé relatif d'une partie compacte d'un $\mathbf{K}$ -espace vectoriel normé [énoncé et démonstration de la proposition 20]. Produit d'un nombre fini de compacts [énoncé du théorème 25].
7. Image continue d'un compact [énoncé et démonstration du théorème 28].
8. Théorème des bornes atteintes [énoncé et démonstration du corollaire 29].
9. En admettant que $\mathbf{C}^*$ est connexe par arcs, démonstration de la connexité par arcs de la partie $\mathbf{GL}_n(\mathbf{C})$ de $(\mathcal{M}_n(\mathbf{C}), \|\cdot\|_\infty)$, pour tout entier $n \geq 2$ [résolution de la deuxième question de l'exercice 43].
10. Image continue d'une partie connexe par arcs [énoncé et démonstration du théorème 60]. $\mathbf{GL}_n(\mathbf{R})$ n'est pas une partie connexe par arcs de $(\mathcal{M}_n(\mathbf{R}), \|\cdot\|_\infty)$ [résolution de l'exercice 44].

4. Exercices de la banque CCINP à étudier

Exercice de la banque CCINP n°3. —

1. On pose $g(x) = e^{2x}$ et $h(x) = \frac{1}{1+x}$. Calculer, pour tout entier naturel k , la dérivée d'ordre k des fonctions g et h sur leurs ensembles de définitions respectifs.
2. On pose $f(x) = \frac{e^{2x}}{1+x}$. En utilisant la formule de Leibniz concernant la dérivée $n^{\text{ième}}$ d'un produit de fonctions, déterminer, pour tout entier naturel n et pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, la valeur de $f^{(n)}(x)$.
3. Démontrer, dans le cas général, la formule de Leibniz, utilisée dans la question précédente.

Exercice de la banque CCINP n°4. —

1. Énoncer le théorème des accroissements finis.
2. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ et soit $x_0 \in]a, b[$. On suppose que f est continue sur $[a, b]$ et que f est dérivable sur $]a, x_0[$ et sur $]x_0, b[$. Démontrer que, si f' admet une limite finie en x_0 , alors f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$.
3. Prouver que l'implication : (f est dérivable en x_0) $\implies$ (f' admet une limite finie en x_0) est fausse. On pourra considérer la fonction g définie par : $g(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$ si $x \neq 0$ et $g(0) = 0$.

Exercice de la banque CCINP n°13. —

1. Rappeler, oralement, la définition, par les suites de vecteurs, d'une partie compacte d'un espace vectoriel normé.
2. Démontrer qu'une partie compacte d'un espace vectoriel normé est une partie fermée de cet espace.
3. Démontrer qu'une partie compacte d'un espace vectoriel normé est une partie bornée de cet espace.
4. On munit $E = \mathbf{R}[X]$ de la norme $\|\cdot\|_1$ définie pour tout polynôme $P = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n$ de E par $\|P\|_1 = \sum_{i=0}^n |a_i|$.
 - (a) Justifier que $S(0, 1) = \{P \in E : \|P\|_1 = 1\}$ est une partie fermée et bornée de E .
 - (b) Calculer $\|X^n - X^m\|_1$ pour m et n des entiers naturels distincts. $S(0, 1)$ est-elle une partie compacte de E ? Justifier.

Exercice de la banque CCINP n°43. — Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. On définit la suite (u_n) par $u_0 = x_0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \text{Arctan}(u_n)$$

1. (a) Démontrer que la suite (u_n) est monotone et déterminer, en fonction de la valeur de x_0 , le sens de variation de (u_n) .
(b) Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.
2. Déterminer l'ensemble des fonctions h , continues sur $\mathbb{R}$, telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h(x) = h(\text{Arctan } x)$.