Programme de la colle n°4 (13-17 octobre)

Espaces vectoriels normés 1

1. Déroulement de la colle

Étudiants de MPI

La colle comporte trois phases.

1. Rédaction d'une question de cours (5 points, **10 minutes maximum**) : la colle débute par une des questions de cours listées dessous.
2. Résolution d'un des exercices de la banque de sujets du CCINP indiqués dans le document (5 points, **15 minutes maximum**) : ils auront été travaillés en amont de la colle et les solutions seront exposées avec dynamisme. L'accent sera mis sur la compréhension des concepts et, jamais, on ne récitera un corrigé non compris.
3. Résolution d'exercices proposés par l'examinateur (10 points) : la colle se poursuit avec des exercices que vous ne connaissez pas à l'avance et que vous résoudrez au tableau, sans temps de préparation sur feuille.

Étudiants de MPI*

La colle comporte deux phases.

1. Rédaction d'une question de cours (5 points, **10 minutes maximum**) : la colle débute par une des questions de cours listées dessous.
2. Résolution d'exercices proposés par l'examinateur (15 points) : la colle se poursuit avec des exercices que vous ne connaissez pas à l'avance et que vous résoudrez au tableau, sans temps de préparation sur feuille.

N.B. : Les étudiants de MPI* auront impérativement étudié les exercices de la banque de sujets du CCINP indiqués dans le document.

2. Programme

Notation. — La lettre $\mathbf{K}$ désigne le corps $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

§ Espaces vectoriels normés 1. — *Normes et espaces vectoriels normés, suites d'éléments d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel normé, topologie d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel normé, étude locale d'une application, continuité. On pourra consulter le sommaire du polycopié de cours « Espaces vectoriels normés 1 » pour une présentation plus détaillée.*

Les notions suivantes n'ont pas encore été abordées : comparaison des normes, applications linéaires et multilinéaires continues, parties compactes d'un espace vectoriel normé, applications continues sur une partie compacte, connexité par arcs, espaces vectoriels normés de dimension finie.

À venir. — § Fonctions de la variable réelle à valeurs dans $\mathbf{R}$ (révisions de MP2I), § Intégrales généralisées, § Espaces vectoriels normés II.

3. Questions de cours

Les références indiquées renvoient au polycopié de cours « Espaces vectoriels normés 1 ».

1. Inégalité de Cauchy-Schwarz dans un espace préhilbertien réel [énoncé intégral de la proposition 4 et démonstration de la seule inégalité]. Norme associée à un produit scalaire [énoncé de la proposition 6].
2. Norme de la convergence uniforme sur un espace de fonctions bornées [énoncé et démonstration de la proposition 19, uniquement à l'aide de la définition de la borne supérieure, à l'exclusion de toute propriété] et représentation graphique d'une boule fermée dans $(\mathscr{B}([0,1],\mathbf{R}), \|\cdot\|_\infty)$ [figure de l'exemple 30].

3. Définition d'un segment dans un $\mathbf{R}$-espace vectoriel [énoncé de la définition 33]. Définition d'une partie convexe d'un $\mathbf{R}$-espace vectoriel [énoncé de la définition 35]. Propriété de convexité des boules [énoncé intégral de la proposition 38 et démonstration pour les boules ouvertes].
4. Définition d'une suite convergente dans un espace vectoriel normé [énoncé de la définition 52]. Caractère borné d'une suite convergente [énoncé et démonstration de la proposition 58].
5. Convergence d'une suite dans un espace vectoriel normé produit [énoncé et démonstration du théorème 61].
6. Propriétés topologiques des boules [énoncé intégral de la proposition 75 et démonstration pour les boules ouvertes].
7. Caractérisation séquentielle de l'adhérence et des fermés [énoncé et démonstration du théorème 92].
8. L'ensemble $\left\{(x,y)\in\mathbf{R}^2\ :\ x=y\right\}$ est une partie fermée de $\left(\mathbf{R}^2, ||\cdot||_\infty\right)$ et l'ensemble $\left\{(x,y)\in\mathbf{R}^2\ :\ x>0\right\}$ est une partie ouverte de $\left(\mathbf{R}^2, ||\cdot||_\infty\right)$ [exercices résolus en classe].
9. Caractérisation séquentielle de la notion de limite [énoncé intégral du théorème 124 et démonstration d'une seule des deux implications au choix de l'étudiant.e].
10. Caractérisation de la continuité d'une application *via* les ouverts [énoncé intégral du théorème 140 et démonstration d'une des seule deux implications au choix de l'étudiant.e, dans le cas où la source de l'application est l'espace vectoriel entier].

4. Exercices de la banque CCINP à étudier

Exercice de la banque CCINP n°34. — *Soit A une partie non vide d'un $\mathbf{R}$-espace vectoriel normé E.*

1. *Rappeler la définition d'un point adhérent à A, en termes de voisinages ou de boules.*
2. *Soit $x\in E$. Démontrer que :*
$$x\in\bar{A}\quad\Longleftrightarrow\quad\exists\,(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\in A^{\mathbf{N}}\quad x_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}x\ .$$
3. *Démontrer que, si A est un sous-espace vectoriel de E, alors $\overline{A}$ est un sous-espace vectoriel de E.*
4. *Soit B une autre partie non vide de E. Démontrer que $\overline{A\times B}=\overline{A}\times\overline{B}$.*

Exercice de la banque CCINP n°35. — *Soient $(E,||\cdot||_E)$ et $(F,||\cdot||_F)$ deux espaces vectoriels normés.*

1. *Soient f une application de E dans F et a un point de E. On considère les propositions suivantes :*
   (P1) L'application f est continue en a.
   (P2) Pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E telle que $x_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}a$, $f(x_n)\xrightarrow[n\to+\infty]{}f(a)$.
   Prouver que les assertions P1 et P2 sont équivalentes.
2. *Soit A une partie dense dans E et soient f et g deux applications continues de E dans F. Démontrer que si, pour tout $x\in A$, $f(x)=g(x)$, alors $f=g$.*

Exercice de la banque CCINP n°44. — *Soient E un espace vectoriel normé et A,B deux parties non vides de E.*

1. *(a) Rappeler la caractérisation de l'adhérence d'un ensemble à l'aide des suites.*
   (b) Démontrer que :
$$A\subset B\quad\Longrightarrow\quad\overline{A}\subset\overline{B}\ .$$
2. *Démontrer que $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cup\overline{B}$. Une réponse sans utiliser les suites est aussi acceptée.*
3. *(a) Démontrer que $\overline{A\cap B}\subset\overline{A}\cap\overline{B}$.*
   (b) Démontrer, à l'aide d'un exemple, que l'autre inclusion n'est pas forcément vérifiée. On pourra prendre $E=\mathbf{R}$.

Exercice de la banque CCINP n°45. — *Soient E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel normé et A une partie non vide de E. On note $\overline{A}$ l'adhérence de A.*

1. *(a) Donner la caractérisation séquentielle de $\overline{A}$.*
   (b) Prouver que, si A est convexe, alors $\overline{A}$ est convexe.
2. *On pose, pour tout $x\in E$, $\mathrm{d}_A(x)=\inf\limits_{a\in A}||\,x-a\,||$.*
   (a) Soit $x\in E$. Prouver que :
$$\mathrm{d}_A(x)=0\quad\Longleftrightarrow\quad x\in\overline{A}\,.$$
   (b) On suppose que A est fermée et que :
$$\forall\,(x,y)\in E^2\quad\forall\,t\in[0,1]\quad\mathrm{d}_A(t\,x+(1-t)\,y)\leqslant t\ \mathrm{d}_A(x)+(1-t)\ \mathrm{d}_A(y)$$
   Prouver que A est convexe.
