

Méthodes de primitivation

1. Reconnaissance d'une dérivée usuelle à une constante multiplicative près	1
2. Reconnaissance d'une dérivée de composée	2
3. Primitivation d'un cosinus-exponentielle ou sinus-exponentielle	2
4. Primitivation d'un inverse d'un polynôme du second degré	2
5. Produit de fonctions trigonométriques	3
6. Primitivation à l'aide du théorème fondamental de l'analyse	4

1. Reconnaissance d'une dérivée usuelle à une constante multiplicative près

Fonction	Une primitive	Intervalle de validité
$x \mapsto a \quad (a \in \mathbb{R})$	$x \mapsto ax$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x^n \quad (n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\})$	$x \mapsto \frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$ si $n \in \mathbb{N}$ $] -\infty, 0[$ ou $] 0, +\infty[$ si $n \leq -2$
$x \mapsto x^{-1} = \frac{1}{x}$	$x \mapsto \ln(x)$	$] -\infty, 0[$ ou $] 0, +\infty[$
$x \mapsto x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)} \quad (\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z})$	$x \mapsto \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$] 0, +\infty[$
$x \mapsto e^{\lambda x} \quad (\lambda \in \mathbb{C}^*)$	$x \mapsto \frac{e^{\lambda x}}{\lambda}$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \ln(x)$	$x \mapsto x \ln(x) - x$	$] 0, +\infty[$
$x \mapsto \sin(x)$	$x \mapsto -\cos(x)$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \cos(x)$	$x \mapsto \sin(x)$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$	$x \mapsto \tan(x)$	$]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ (par exemple)
$x \mapsto \operatorname{ch}(x)$	$x \mapsto \operatorname{sh}(x)$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \operatorname{sh}(x)$	$x \mapsto \operatorname{ch}(x)$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \frac{1}{\operatorname{ch}^2(x)} = 1 - \operatorname{th}^2(x)$	$x \mapsto \operatorname{th}(x)$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \mapsto \arcsin(x)$	$] -1, 1[$
$x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$	$x \mapsto \arctan(x)$	$\mathbb{R}$

2. Reconnaissance d'une dérivée de composée

Soient $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$ est une fonction dérivable sur I et $u : J \longrightarrow I$ est une fonction dérivable sur J , alors :

$$x \longmapsto f(u(x)) \text{ est une primitive de } x \longmapsto u'(x) \times f'(u(x)) \text{ sur } J.$$

La reconnaissance d'une dérivée de composée est un outil puissant dans le calcul de primitives, cf. exemples ci-dessous.

$$u' \times u^\alpha \xrightarrow{\text{une primitive}} \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} \quad \alpha \neq -1$$

$$u' \times u \xrightarrow{\text{une primitive}} \frac{u^2}{2}$$

$$\frac{u'}{\sqrt{u}} \xrightarrow{\text{une primitive}} 2\sqrt{u}$$

$$u' \times \sqrt{u} \xrightarrow{\text{une primitive}} \frac{2}{3} u^{3/2}$$

$$\frac{u'}{u^2} \xrightarrow{\text{une primitive}} -\frac{1}{u}$$

$$\frac{u'}{u} \xrightarrow{\text{une primitive}} \ln(|u|)$$

$$u' \times e^u \xrightarrow{\text{une primitive}} e^u$$

$$u' \times \operatorname{ch}(u) \xrightarrow{\text{une primitive}} \operatorname{sh}(u)$$

$$u' \times \operatorname{sh}(u) \xrightarrow{\text{une primitive}} \operatorname{ch}(u)$$

$$\frac{u'}{\operatorname{ch}^2(u)} \xrightarrow{\text{une primitive}} \operatorname{th}(u)$$

$$u' \times (1 - \operatorname{th}^2(u)) \xrightarrow{\text{une primitive}} \operatorname{th}(u)$$

$$u' \times \cos(u) \xrightarrow{\text{une primitive}} \sin(u)$$

$$u' \times \sin(u) \xrightarrow{\text{une primitive}} -\cos(u)$$

$$\frac{u'}{\cos^2(u)} \xrightarrow{\text{une primitive}} \tan(u)$$

$$u' \times (1 + \tan^2(u)) \xrightarrow{\text{une primitive}} \tan(u)$$

$$\frac{u'}{1+u^2} \xrightarrow{\text{une primitive}} \arctan(u)$$

$$\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} \xrightarrow{\text{une primitive}} \arcsin(u)$$

3. Primitivation d'un cosinus-exponentielle ou sinus-exponentielle

Soit $(a, b) \in \mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Pour calculer une primitive de :

$$f : x \longmapsto e^{ax} \cos(bx) \quad \text{et} \quad g : x \longmapsto e^{ax} \sin(bx)$$

on peut **passer au champ complexe**. Comme une primitive de la fonction $h : x \longmapsto e^{(a+ib)x}$ est :

$$H : x \longmapsto \frac{e^{(a+ib)x}}{a+ib} = \underbrace{\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}}_{\in \mathbf{R}} \times (a-ib) \times (\cos(bx) + i \sin(bx))$$

des primitives de f et g sont données par :

$$F : x \longmapsto \operatorname{Re}(H(x)) = \operatorname{Re}\left(\frac{e^{(a+ib)x}}{a+ib}\right) \quad \text{et} \quad G : x \longmapsto \operatorname{Im}(H(x)) = \operatorname{Im}\left(\frac{e^{(a+ib)x}}{a+ib}\right).$$

4. Primitivation d'un inverse d'un polynôme du second degré

Soient $(a, b, c) \in \mathbf{R}^* \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}$, $P := aX^2 + bX + c$ et $\Delta := b^2 - 4ac$. On peut déterminer une primitive la fonction :

$$f : x \longmapsto \frac{1}{ax^2 + bx + c}$$

à l'aide de la forme canonique de P :

$$P = a \left(\left(X + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right).$$

Une primitive de f est :

$$F: x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{a} \times \frac{1}{x_1 - x_2} \times \ln \left(\left| \frac{x - x_1}{x - x_2} \right| \right) & \text{si } \Delta > 0 \text{ et } x_1, x_2 \text{ sont les racines réelles de } P; \\ -\frac{1}{a} \times \frac{1}{x - x_0} & \text{si } \Delta = 0 \text{ et } x_0 \text{ est la racine réelle de } P; \\ \frac{2}{\sqrt{-\Delta}} \times \arctan \left(\frac{2ax + b}{\sqrt{-\Delta}} \right) & \text{si } \Delta < 0. \end{cases}$$

5. Produit de fonctions trigonométriques

1. — Soit $(p, q) \in \mathbb{N}^2$. Pour primitiver la fonction :

$$f: x \mapsto \cos^p(x) \sin^q(x)$$

il convient d'abord d'analyser les exposants p et q .

(a) **Cas où $p = 0$ ou $q = 0$.** — Alors $f = \cos^p$ ou $f = \sin^q$. Dans ce cas on **linéarise** l'expression $f(x)$ à l'aide des formules d'Euler :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \text{ et } \sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

et de la formule du binôme de Newton :

$$\forall (n, a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C} \quad (a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

(b) **Cas où p et q sont pairs.** — Alors au moyen de la relation de Pythagore :

$$\cos^2 + \sin^2 = 1$$

et de la formule du binôme de Newton, on se ramène à primitiver une combinaison linéaire de puissances de $\cos$ ou de puissances de $\sin$. On suit alors la démarche exposée en 1.

(c) **Cas (le plus simple) où p ou q est impair.** — Avec la relation de Pythagore et la formule du binôme de Newton, on se ramène à primitiver une combinaison linéaire de fonctions de la forme :

$$\cos \times \sin^r \text{ ou } \sin \times \cos^r \quad (r \in \mathbb{N})$$

ce qui est aisé puisque nous savons primitiver sans peine $u' \times u^\alpha$, pour $\alpha \in \mathbb{N}$.

2. — Soit $(p, q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$. Pour primitiver une des fonctions :

$$x \mapsto \cos(px) \sin(qx) \quad x \mapsto \cos(px) \cos(qx) \quad x \mapsto \sin(px) \sin(qx)$$

on **linéarise** grâce aux formules de trigonométrie :

$$\cos(a) \cos(b) = \frac{\cos(a+b) + \cos(a-b)}{2} \quad \sin(a) \sin(b) = \frac{-\cos(a+b) + \cos(a-b)}{2}$$

$$\sin(a) \cos(b) = \frac{\sin(a+b) + \sin(a-b)}{2}$$

valables pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, qui se déduisent toutes des formules d'addition pour $\cos$ et $\sin$.

6. Primitivation à l'aide du théorème fondamental de l'analyse

Pour primitiver une fonction $f : I \longrightarrow \mathbf{C}$ continue sur un intervalle I de $\mathbf{R}$, on peut appliquer le théorème fondamental de l'analyse qui stipule que la fonction :

$$F : x \longmapsto \int_{x_0}^x f(t) \, dt$$

est une primitive de f sur I (x_0 est un point de I préalablement fixé). On peut alors tenter de calculer les intégrales $F(x)$ avec des intégrations par parties, des changements de variables tels les « classiques » suivants.

1. — **Changement de variable affine** : $t = ax + b$ ($a \in \mathbf{R}^*$, $b \in \mathbf{R}$) avec élément différentiel : $dt = a \, dx$

Ce changement de variable peut être appliqué pour primitiver la fonction $x \longmapsto \frac{1}{(2x+1)^3}$. Pour cette dernière, on peut également reconnaître une « forme $u' \times u^{-3}$ » à une constante multiplicative près (cf. partie 2).

2. — **Changement de variable « fonction inverse »** : $t = \frac{1}{x}$ avec élément différentiel : $dt = -\frac{1}{x^2} \, dx$

Ce changement de variable peut être appliqué pour primitiver la fonction $x \longmapsto \frac{e^{-1/x}}{x^3}$.

3. — **Changement de variable « fonction carrée »** : $t = x^2$ avec élément différentiel : $dt = 2x \, dx$

Ce changement de variable peut être appliqué pour primitiver la fonction $x \longmapsto \frac{x}{\sqrt{3+x^2}}$. Pour cette dernière, on peut également reconnaître une « forme $u' \times u^{-1/2}$ » à une constante multiplicative près (cf. partie 2).

4. — **Changement de variable « fonction racine carrée »** : $t = \sqrt{x}$ avec éléments différentiels : $dt = \frac{1}{2\sqrt{x}} \, dx$, $dx = 2t \, dt$

Ce changement de variable peut être appliqué pour primitiver la fonction $x \longmapsto \frac{\sqrt{x}}{1+x}$.

5. — **Changement de variable « fonction logarithme népérien »** : $t = \ln(x)$ avec élément différentiel : $dt = \frac{1}{x} \, dx$

Ce changement de variable peut être appliqué pour primitiver la fonction $x \longmapsto \frac{1}{x \ln^2(x)}$. Pour cette dernière, on peut également reconnaître une « forme $u' \times u^{-2}$ » à une constante multiplicative près (cf. partie 2).

6. — **Changement de variable « fonction exponentielle »** : $t = e^x$ avec éléments différentiels : $dt = e^x \, dx$, $dx = \frac{1}{t} \, dt$

Ce changement de variable peut être appliqué pour primitiver la fonction $x \longmapsto \frac{1}{\operatorname{ch}(x)} = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$.

7. — **Changement de variable « tangente de l'angle moitié »** : $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ avec élément différentiel : $dx = \frac{2}{1+t^2} \, dt$

Ce changement de variable peut être appliqué pour primitiver des fractions rationnelles en cos et sin, telle la fonction $x \longmapsto \frac{\cos(x)}{1+\sin(x)}$, en exploitant les identités :

$$\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad \text{et} \quad \sin(x) = \frac{2t}{1+t^2} .$$