

Exercice 3:

• Soit $n \geq 2$, $f_n | [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \frac{x e^{-nx}}{\ln(n)} \rightarrow f_n(x)$

→ Définition: $\forall x \in [0; +\infty[$, montrons que $\sum_{n \geq 2} \frac{x e^{-nx}}{\ln(n)}$ CS

• Si $x = 0$: $\forall n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, $f_n(x) = 0$ donc la série converge

• Si $x \neq 0$: $\frac{n^2 x e^{-nx}}{\ln(n)} \xrightarrow{+\infty} 0$ (CG) donc $0 \leq f_n(x) \xrightarrow{+\infty} 0 \left(\frac{1}{n^2} \right)$
 Par théorème de SATP, la série CVG donc $\sum f_n$ CS
 sur $[0; +\infty[$

→ Critère $\mathcal{C}'$:

H1) $\forall n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, f_n est $\mathcal{C}'$ sur $]0; +\infty[$

H2) $\sum f_n$ CS sur $\mathbb{R}_+^*$

H3) nq $\sum f_n'$ est CUK

• $\forall n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, $\forall x \in]0; +\infty[$, $f_n'(x) = \frac{1}{\ln(n)} (e^{-nx} - n x e^{-nx})$

$\forall [a, b] \subset]0; +\infty[$, $\forall (n, x) \in \mathbb{N}_{\geq 2} \times [a, b]$

$$|f_n'(x)| \leq \frac{e^{-nx}}{\ln(n)} (1 + nx) \leq \frac{e^{-an}}{\ln(n)} (1 + nb) \quad (\text{indé de } x)$$

Par passage au sup, $\|f_n'\|_{\infty, [a, b]} \leq \frac{e^{-na}}{\ln(n)} (1 + nb) = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

Par Riemann, et CSATP, et théorème de domination,

$\sum \|f_n'\|_{\infty, [a, b]}$ CVG donc $\sum f_n'$ CUK

Par critère $\mathcal{C}'$, f est $\mathcal{C}'$ sur $\mathbb{R}_+^*$: $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x)$

$$= \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\ln(n)} (e^{-nx} - n x e^{-nx})$$

$$\cdot \gamma(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{\ln(n)}$$

• Soit $0 < x < y$

$$\forall n \geq 2, 0 \leq \frac{e^{-ny}}{\ln(n)} \leq \frac{e^{-nx}}{\ln(n)}$$

$$\text{Donc } \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{e^{-ny}}{\ln(n)} \leq \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{\ln(n)} \quad (\gamma(y) \leq \gamma(x))$$

• Par théorème de la limite monotone, $\exists L \in \overline{\mathbb{R}}, \gamma(x) \xrightarrow{0^+} L$

$$\forall N \geq 2, \gamma(x) \geq \sum_{n=2}^N \frac{e^{-nx}}{\ln(n)} \geq \sum_{n=2}^N \frac{e^{-Nx}}{n-1}$$

$$\text{donc quand } x \rightarrow 0^+, L \geq H_{N-1} = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n}$$

donc quand $N \rightarrow +\infty, L \geq +\infty$ donc γ non dérivable

Exercice 6

• Soit $x > 0, \sum_{n=1}^{+\infty} n e^{-nx}$. Posons, $\forall n \in \mathbb{N}^*, f_n: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto -e^{-nx}$

H1) $\sum f_n(x)$ CV pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ (série géométrique de raison $0 \leq e^{-x} < 1$)

Donc $\sum f_n$ CS sur $]0; +\infty[$

H2) $\forall n \in \mathbb{N}^*, f_n$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$

H3) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}_+^*, f_n(x) = n e^{-nx}$

Soit $[a, b] \subset \mathbb{R}_+^*$, soit $x \in [a, b]$,

$$|f_n'(x)| = n e^{-nx} \leq (f_n'(a)) \text{ (indé de } x)$$

$$\text{donc } \|f_n\|_{\infty, [a, b]} = n e^{-na} \text{ et } 0 \leq \|f_n'\|_{\infty, [a, b]} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

or $\sum \frac{1}{n^2}$ converge donc $\sum \|f_n'\|_{\infty, [a, b]}$ CVGA

donc $\sum f_n'$ CLK donc CLK sur $\mathbb{R}_+^*$

• L'entière $\mathcal{C}'$:

$f := \sum_{n=0}^{+\infty} f_n : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ est $\mathcal{C}'$ sur $\mathbb{R}_+^*$

$$\forall x > 0, f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n'(x)$$

$$\forall x > 0, f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} -e^{-nx} = -\frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}$$

$$\text{d'où } \sum_{n=1}^{+\infty} ne^{-nx} = \frac{e^{-x}}{(1-e^{-x})^2} \quad (\forall x > 0)$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{e^{-x}}{(1-e^{-x})^2}}$$

• 2^e solution:

$$\bullet \forall x > 0, \sum_{n=1}^{+\infty} ne^{-nx} = \sum_{n=1}^{+\infty} ny^n \text{ où } y = e^{-x} \in]0,1[$$

$$\bullet \forall y \in]0,1[, \sum_{n=0}^{+\infty} y^n \text{ est ACV}$$

→ Par produit de Cauchy de $\sum$ ACV

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n y^k y^{n-k} \right) \text{ est ACV et } \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n y^k \right) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} y^n \right)$$

$$\bullet \sum_{n=0}^{+\infty} ny^n + \sum_{n=0}^{+\infty} y^n = \frac{1}{(1-y)^2} \text{ puis continuité [...]}$$

Exercice 10

$$\bullet \text{ Soit } n \in \mathbb{N}^*, f_n :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \text{ et } f = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$$

$$x \mapsto \frac{1}{n + n^2 x}$$

→ $f_n > 0$ et f_n décroissantes

$$\bullet \text{ Soit } x > 0 \text{ fixé, } f_n(x) \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2 x}$$

Par Riemann, $\sum \frac{1}{n^2 x}$ CVG et donc par th de comp $\sum f_n(x)$ CVG

2) Appliquons le critère de continuité à f :

H1) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, f_n est $\mathcal{C}^0$

H2) $\forall a > 0$, montrons que $\sum f_n$ CN sur $[a, +\infty[$

$$\forall (n, x) \in \mathbb{N}^* \times [a, +\infty[, |f_n(x)| = \frac{1}{n+n^2x} \leq \frac{1}{n+n^2a} = |f_n(a)|$$

$$\text{donc } \|f_n\|_{\infty, [a, +\infty[} = f_n(a)$$

D'après Q1), $\sum f_n(a)$ CVG d'où $\sum f_n$ CN sur $[0, +\infty[$

Le critère s'applique: f est $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}_+^*$

3) Montrons que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$

Appliquons le critère de la double limite

H1) $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$

H2) $\sum f_n$ CN donc CV sur $[1, +\infty[$

$$\text{Ainsi, } f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

4) Notons $g_n: [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ tq $\forall x \geq 1$, $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} g_n(x)$

H1) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $g_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2}$

H2) $\forall n \in \mathbb{N}^*$: $\|g_n\|_{\infty} \leq \frac{1}{n^2}$

Le critère s'applique: Alors $\sum \frac{1}{n^2}$ CVG et $xf(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$

$$= \frac{\pi^2}{6}$$

$$\text{D'où } f(x) \sim \frac{\pi^2}{6}$$

Exercice 11

• Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ fixé

$$\text{Soit } N \in \mathbb{N}, \sum_{n=-N}^N \frac{1}{(x+n)^2} = \frac{1}{x^2} + \sum_{n=1}^N \frac{1}{(x+n)^2} + \sum_{n=1}^N \frac{1}{(x-n)^2}$$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{(x+n)^2} \sim \frac{1}{n^2}$ donc par th de comparaison des séries à termes positifs $\sum \frac{1}{(x+n)^2}$ CVG

Aussi, $0 \leq \frac{1}{(x-n)^2} \sim \frac{1}{n^2}$ donc de même $\sum \frac{1}{(x-n)^2}$ CVG

Donc, f est bien définie sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$

• Montrons que f est 1-périodique

$$\begin{aligned} \text{Soit } N \in \mathbb{N}, \quad \sum_{n=-N}^N \frac{1}{(x+1+n)^2} &= \frac{1}{(x+1)^2} + \sum_{n=1}^N \frac{1}{(x+1+n)^2} \\ &+ \sum_{n=1}^N \frac{1}{(x+1-n)^2} = \frac{1}{(x+1)^2} + \sum_{j=2}^{N+1} \frac{1}{(x+j)^2} + \sum_{j=0}^N \frac{1}{(x-j)^2} \\ &= \sum_{n=-N}^N \frac{1}{(x+n)^2} + \underbrace{\frac{1}{(x+N)^2} - \frac{1}{(x-N)^2}}_{=0} \end{aligned}$$

• Lorsque $N \rightarrow +\infty$, $f(x+1) = f(x)$

2) On restreint l'étude à $]0,1[$.

$$f_1:]0,1[\rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{x^2}, \quad f_2:]0,1[\rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(x+n)^2}, \quad f_3:]0,1[\rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(x-n)^2}$$

• On pose $f_{3,n}:]0,1[\rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{(x-n)^2}$

• Soit $x \in]0,1[, n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$

$\hookrightarrow n \geq 2 > 1 > x$ donc $|x-n| = n-x \geq n-1$

$$\text{Donc } |f_{3,n}(x)| = \frac{1}{(x-n)^2} \leq \frac{1}{(n-1)^2} \quad (\text{indépendant de } x)$$

Par passage au sup, $\|f_{3,n}\|_{\infty,]0,1[} \leq \frac{1}{(n-1)^2}$, donc, par théorème de comparaison pour les SGP

H1) $\sum f_{3,n}$ est CN sur $]0,1[$ donc CU

H2) $\forall n \in \mathbb{N}, f_{3,n} \in \mathcal{C}^0$ sur $]0,1[$

Ainsi, f_3 est $\mathcal{C}^0$ sur $]0,1[$. De même pour f_1 et f_2

3) $D_g = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$

4) g est 1-périodique. On montre que h admet un prolongement en 0 et on conclut par 1-périodicité

Sei $x \in]-1, 1[\setminus \{0\}$

$$\begin{aligned} \sin^2(\pi x) &= \frac{(\pi x - \frac{\pi^3 x^3}{6} + o(x^3))^2}{x^2} \\ &= \frac{\pi^2 x^2 - \frac{\pi^4 x^4}{3} + o(x^4)}{x^2} \\ \frac{1}{x^2} \cdot \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi x)} &= \frac{\sin^2(\pi x) - \frac{1}{3}\pi^2 x^2}{x^2 \sin^2(\pi x)} \underset{0}{\sim} -\frac{\pi^2}{3} \end{aligned}$$

H1) $\sum_{j=3n}^{\infty} \subset U$ sur $]0, 1[$

H2) $\forall n \in \mathbb{N}, f_{3,n}$ est $\mathcal{C}^0$ sur $]0, 1[$

H3) $\forall n \in \mathbb{N}, f_{3,n}(x) \rightarrow \frac{1}{n^2}$ donc $f_3(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$