

TD - Suites et séries de fonctions 2

Ex 2: $f: x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{1+n^2}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$f_n \begin{cases} \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x \longmapsto \frac{e^{-nx}}{1+n^2} \end{cases}$$

Q1) (H1) $\forall n \in \mathbb{N} \quad f_n \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$

(H2) Q2:

x	0	$+\infty$
f_n	$\frac{1}{1+n^2}$	0

Donc: $\|f_n\|_{\infty, \mathbb{R}_+} = \frac{1}{1+n^2}$

or: $\|f_n\|_{\infty, \mathbb{R}_+} \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} > 0$

et $\sum \frac{1}{n^2}$ CV (Riemann, $2 > 1$)

Donc: Par théorème de comparaison pour les séries à termes positifs, $\sum f_n$ CV.

Par critère de continuité pour les séries de fonctions, S est défini et continue sur $\mathbb{R}_+$

Q2) (H1) $\forall n \in \mathbb{N}$ f_n est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et
 $\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad f_n'(x) = \frac{-ne^{-nx}}{1+n^2}$

(H2) $\sum f_n$ CS car $\sum f_n$ CV

(H3) Montrer que $\sum f_n'$ CVK sur $]0, +\infty[$

Soit $a > 0$, $a \in]a, +\infty[$, $\mathbb{N} \in \mathbb{N}^*$

$|f_n'| \searrow$ sur $]a, +\infty[$

x	a	$+\infty$
f_n'	$\frac{ne^{-na}}{1+n^2}$	0

donc $\|f_n'\|_{\mathcal{C}^0([a, +\infty[)} = \frac{ne^{-na}}{1+n^2}$

Comme $a > 0$, $\|f_n'\|_{\mathcal{C}^0([a, +\infty[)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$
 ≥ 0

et que $\sum \frac{1}{n^2}$ CV (Riemann, $2 > 1$),

par théorème de comparaison pour les SACP:

$\sum f_n'$ CVK donc CVK sur $\mathbb{R}_+^*$

Par suite $\mathcal{C}^1$, S est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'(x) = - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{ne^{-nx}}{1+n^2}$

Q3) • Soit e^0 sur $\Sigma 0, +\infty$

• S dérivable sur $\Sigma 0, +\infty$

$$\bullet \forall x > 0 \quad S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{\frac{-n}{1+n^2} e^{-nx}}_{f'_n(x) \leq 0}$$

Comme $\forall n \in \mathbb{N} \quad f'_n \uparrow, S' \uparrow$ sur $\Sigma 0, +\infty$

Par thm de la limite monotone : $\exists L \in \mathbb{R}$

$$\text{tel que } S'(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} L$$

Soit $N \in \mathbb{N}$

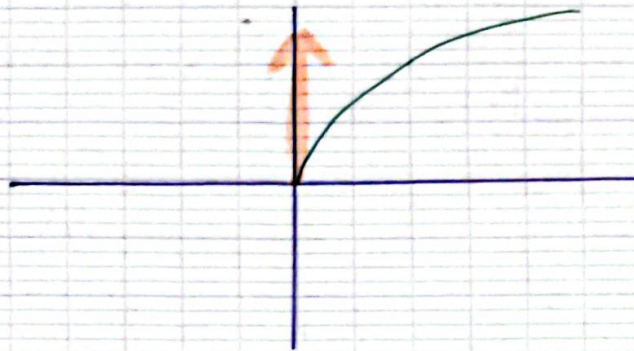
$$\begin{array}{ccc} S'(x) & \leq & - \sum_{n=0}^N \frac{n}{1+n^2} \underbrace{e^{-nx}}_{\xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 1} \\ \downarrow x \rightarrow 0^+ & & \\ L & & \end{array}$$

$$\text{donc : } L \leq - \sum_{n=0}^N \underbrace{\frac{n}{1+n^2}}_{\sim \frac{1}{n} > 0} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} -\infty$$

$$\text{D'où : } L = -\infty$$

$$\text{Par thm de la lim de la dérivée : } \frac{S(x) - S(0)}{x - 0} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} -\infty$$

Donc C_5 a une demi tangente verticale.



Ex 6. Calcul de $\sum_{n=1}^{+\infty} n e^{-nx}$ pour $x > 0$

On remarque que $\frac{d}{dx} (-e^{-nx}) = n e^{-nx}$

Considérons $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{f_n(x)}$

(H1) Les f_n sont C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$

(H2) $\sum f_n$ CS sur $\mathbb{R}_+^*$

Soit $x > 0$ fixé

$$|f_n(x)| = e^{-nx} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)_{\substack{>0 \\ \geq 0}}$$

or: $\sum \frac{1}{n^2}$ CV (Riemann, $2 > 1$)

donc Par théorème de comparaison pour les séries à termes positives, $\sum |f_n|$ CS sur $\mathbb{R}_+^*$
donc $\sum f_n$ CS sur $\mathbb{R}_+^*$.

(H3) $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f_n'(x) = n e^{-nx}$

$\sum f_n'$ CVK sur $\mathbb{R}_+^*$.

Soit $a > 0$, $x \in [a, +\infty[$

$$|f_n'(x)| = n e^{-nx} \leq n e^{-na} \text{ atteint en } x=a.$$

Donc: $\|f_n\|_{\mathcal{L}(\mathcal{D}, \mathcal{D})} = ne^{-n\epsilon} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)_{\substack{>0 \\ >0}}$

Comme auparavant, par théorème de Prümmer et par théorème de comparaison pour les séries à termes positifs,
 $\sum f_n' \text{ CNK} \underline{\text{donc}} \sum f_n' \text{ COK}.$

Donc par critère $\mathcal{C}^1$

$f: x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} -e^{-nx}$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$

Soit $x > 0$, $f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} ne^{-nx}$

or, $\sum_{n=0}^{+\infty} -e^{-nx} = \frac{-1}{1-e^{-x}}$

En dérivant on en déduit:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} ne^{-nx} = \frac{-e^{-x}}{(1-e^{-x})^2}$$

Autre solution: $x > 0$, $\sum_{1 \leq k \leq 1} (e^{-x})^n \text{ ACV}$

Par produit de Cauchy de 2 séries ACV:

$$\sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^n (e^{-x})^k (e^{-x})^{n-k} \text{ est ACV}$$

$$\underline{\text{et}} \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^n e^{-nx} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nx} \right)^2$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} ne^{-nx} + \frac{1}{1-e^{-x}} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)e^{-nx} = \left(\frac{1}{1-e^{-x}} \right)^2$$

Ex 4: $S \mid \exists \text{ joint } \varepsilon \longrightarrow \mathbb{R}$
 $x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$

Q1) $\forall n \in \mathbb{N} \quad f_n: x \mapsto \frac{(-1)^n}{n+x}$

(H1) $\forall n \in \mathbb{N}, f_n \text{ est } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}_+$

(H2) $f_n \sum f_n \text{ CS sur } \mathbb{R}_+$

Soit $x > 0$ fixe

$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \frac{1}{n+x}$

(H1.bis) $\forall n \in \mathbb{N} \quad f_{n+1}(x) f_n(x) \leq 0$

(H2.bis) $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

(H3.bis) $\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 < u_{n+1} \leq u_n$

done $u_{n+1} \leq u_n \text{ car } x \mapsto \frac{1}{x} \text{ str } \searrow \text{ sur } \mathbb{R}_+^*$

Par CSSA $\sum f_n \text{ CS sur } \mathbb{R}_+^*$

(H3) Soit $x > 0, n \in \mathbb{N}$

$f_n'(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+x)^2}, \quad |f_n'(x)| = \frac{1}{(n+x)^2}$

x	0	$+\infty$
$ f'_n(x) $	$\frac{1}{n^2}$	0

Donc: $\|f'_n\|_{\infty, \mathbb{R}_+^*} = \frac{1}{n^2} > 0$

car: $\sum \frac{1}{n^2}$ CV (Piemann, 271)

D'ou: $\sum f'_n$ CV sur $\mathbb{R}_+^*$

donc: $\sum f'_n$ CVK sur $\mathbb{R}_+^*$

Par critère $\mathcal{C}^2$, Soit $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$

et $\forall x > 0$ $S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f'_n(x)$
 $= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+x)^2}$

Q2) Soit $x > 0$.

Vérifions que $\sum f'_n(x)$ satisfait les hypothèses du CSSA.

(H1) $\forall n \in \mathbb{N}$ $f'_{n+1}(x) f'_n(x) \leq 0$

(H2) $\frac{1}{(n+x)^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

(H3) $\forall n \in \mathbb{N}$ $0 < (n+x) \leq n+1+x$

donc: $0 < (n+x)^2 \leq (n+1+x)^2$ ($x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$)

Comme $x \mapsto \frac{1}{x} \searrow$ sur $\mathbb{R}_+^*$, $f_{n+1}(x) \leq f_n'(x)$

Donc $\sum f_n'(x)$ satisfait les hypothèses du CSSA.

et $\forall n \in \mathbb{N} \quad \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k'(x) \right| \leq f_{n+1}(x)$

et $\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k'(x)$ a m même signe que $f_{n+1}'(x)$

En particulier: $f_0'(x) \leq 0$.

donc: $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n'(x) \leq 0$

donc S est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$

Q3) Soit $x > 0$.

$$\begin{aligned} S(x+1) + S(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x+1} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x} \\ &= \frac{1}{x} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x+1} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x} \\ &\stackrel{k=n+1}{=} \frac{1}{x} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x+1} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+x+1} \\ &= \frac{1}{x} \end{aligned}$$

Q4) Soit $x > 0$

$$= x S(x+1) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 \times S(1) = 0$$

$$x(S(x+1) + S(x)) = x \cdot \frac{1}{x} = 1$$

donc: $x S(x) = 1 - \underbrace{x S(x+1)}_{\xrightarrow{x \rightarrow 0} 0} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$

D'où: $S(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{x}$

Q5) Soit $x > 0$ fixe $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\underbrace{n+x}_{f_n(x)}}$

$\sum f_n(x)$ vérifie les hyps du CSSA.

$$\hookrightarrow \forall n > 0 \forall n \in \mathbb{N}^+ \quad \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(n) \right| \leq \frac{1}{n+2+n}$$

$$\hookrightarrow \sum f_n \text{ cu sur } \underline{\Sigma 1}, \underline{+\infty \Sigma}$$

Double limite: $S(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$