

### Exercice 9:

• Soit  $I$  intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $a \in I$ ,  $(f_n) \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})^{\mathbb{N}}$  et  $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ ,  $f_n \xrightarrow[\mathcal{I}]{\text{CU}} f$ . Montrons que  $f$  est  $\mathcal{C}^0$  en  $a$

• Soit  $\varepsilon > 0$ ,  $\exists n_1 \in \mathbb{N}$ ,  $\forall n \geq n_1$ ,  $\|f - f_n\|_{\infty, I} \leq \frac{\varepsilon}{3}$  (convergence uniforme) et  $|f(x) - f_n(x)| \leq \|f - f_n\|_{\infty, I}$  (def sup sur  $I$ )

• Il existe  $\delta > 0$ ,  $\forall x \in [a - \delta, a + \delta] \cap I$ ,  $|f_{n_1}(x) - f_{n_1}(a)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$

• Soit  $x \in [a - \delta, a + \delta]$ ,

$$\begin{aligned} |f(x) - f(a)| &\leq |f(x) - f_{n_1}(x)| + |f_{n_1}(x) - f_{n_1}(a)| + |f_{n_1}(a) - f(a)| \\ &\leq \varepsilon \leq \|f - f_{n_1}\|_{\infty, I} \leq \frac{\varepsilon}{3} \quad \leq \frac{\varepsilon}{3} \quad \leq \frac{\varepsilon}{3} \end{aligned}$$

CL:  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} f(a)$  donc  $f \in \mathcal{C}^0$  en  $a$

### Exercice 10:

•  $T: (\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R}), \|\cdot\|_{\infty}) \rightarrow (\mathbb{R}, |\cdot|)$  linéaire  
 $f \mapsto \int_a^b f$  (indépendant de  $f$ )

• Soit  $f \in E$ ,  $|T(f)| \leq \int_a^b |f(t)| dt \leq (b-a) \|f\|_{\infty}$ , donc  $T$  est continue

• Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ ,  $f_n \xrightarrow[\infty]{\|\cdot\|_{\infty}} f \in E$ ,  $\frac{T(f_n)}{\int_a^b f_n} \xrightarrow[\infty]{+} \frac{T(f)}{\int_a^b f}$

$$\text{Calculons } \|T\| = \sup_{f \in E, \|f\|_{\infty} \leq 1} |T(f)| = \sup_{f \in E, \|f\|_{\infty} \leq 1} \left| \int_a^b f \right|$$

On sait que si  $f \in E$  vérifie  $\|f\|_{\infty} \leq 1$ ,  $|T(f)| \leq b-a$  (indé de  $f$ ). Par passage au sup,  $\|T\| \leq b-a$

Or,  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$   $\mathcal{C}^0$  et vérifie  $\|f\|_{\infty} = 1$  et  $|T(f)| = b-a$   
 Donc  $\|T\| = b-a$



### Question:

• Pourquoi  $(f_n : x \mapsto x^n)_{n \in \mathbb{N}}$  ne CU pas sur  $[0,1]$  ?

• On sait que  $f_n \xrightarrow{CS} f \mid \begin{array}{l} [0,1] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases} \end{array}$ . Comme les  $f_n$  sont  $\mathcal{C}^0$  sur  $[0,1]$ , si  $f_n \xrightarrow{CU} f$ , alors  $f$  serait  $\mathcal{C}^0$  sur  $[0,1]$ , ce qui n'est pas le cas.

⚠ Pas de CU sur  $[0,1]$  non plus

### Exercice 13 : Dimi

• Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{R}))^{\mathbb{N}}$ ,  $f_n \xrightarrow{CS} f \mid \begin{array}{l} [a,b] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto 0 \end{array}$   
 $\forall x \in [a,b], (f_n(x))_{n \in \mathbb{N}} \downarrow$

1) Soit  $n \in \mathbb{N}$ ,

$[a,b]$  est un compact (fermé et borné de  $\mathbb{R}$ ), aussi,

pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n \in \mathcal{C}([a,b], \mathbb{R})$

Donc d'après le théorème des bornes

atteintes :  $\exists x_n \in [a,b], \forall x \in [a,b],$

$$f_n(x_n) \geq f_n(x)$$

$$\text{Donc } f_n(x_n) = \sup_{x \in [a,b]} f_n(x)$$

2) Montrons que  $(f_n(x_n))_{n \in \mathbb{N}} \downarrow$

Soit  $n \in \mathbb{N}$ ,  $x_{n+1} \in [a,b]$  donc  $f_n(x_n) \geq f_n(x_{n+1})$

Or  $(f_i(x_{n+1}))_{i \in \mathbb{N}} \downarrow$  donc  $f_n(x_{n+1}) \geq f_{n+1}(x_{n+1})$

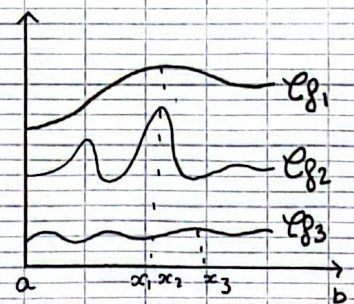
D'où  $f_n(x_n) \geq f_{n+1}(x_{n+1})$

• Soit  $x \in [a,b]$ ,  $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}} \downarrow$  donc d'après le th de la limite monotone :  $f_n(x) \rightarrow \inf_{n \in \mathbb{N}} f_n(x)$  car

$$f_n(x) \geq 0$$

Donc,  $\forall n \in \mathbb{N}, f_n(x_n) \geq f_n(x) \geq 0$ . Donc  $(f_n(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$

$\downarrow$  et minorée. Il existe  $L \in \mathbb{R}_+$ ,  $f_n(x_n) \xrightarrow{+ \infty} L$





3)  $[a, b] = K$  est un compact

,  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in K^{\mathbb{N}}$ , donc, par propriété de compacité,  
 $\exists x \in K$  et  $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \nearrow \nearrow$ ,  $x_{\varphi(n)} \rightarrow x \in K$

4) Montrons que,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leq l \leq f_n(x)$

Fixons  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\forall p \geq n$ ,  $n \leq p \leq \varphi(p)$  donc  $f_{\varphi(p)}(x_{\varphi(p)}) \leq f_n(x_{\varphi(p)})$

Par passage à la limite quand  $p \rightarrow +\infty$ , par  $\mathcal{C}^0$  de  $f_n$ :  
 $1 \leq f_n(x)$ , d'où, d'après Q2:  $0 \leq l$

5) D'après 4),  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leq l \leq f_n(x) \xrightarrow[+\infty]{\text{fixé}} 0$ , donc, par théorème d'encadrement,  $l = 0$

Ainsi,  $\sup_{x \in K} f_n(x) \xrightarrow{+\infty} 0$ . Comme les  $f_n$  sont positives,  
 $f_n \xrightarrow[\mathcal{C}_K]{\text{CU}} 0_{\mathcal{C}(K, \mathbb{R})}$

6) On applique Q5) à  $(g_n - g)_{n \in \mathbb{N}}$ .

### Exercice 6:

• Soit  $f: x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} x^{n^2}$

1)  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n(x) = x^{n^2}$ ,  $f: x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$

On cherche  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\sum f_n(x)$  converge

$\hookrightarrow x = 0$ :  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n(0) = 0$  donc  $\sum f_n(0)$  converge

$\hookrightarrow x \neq 0$ :  $f_n(x) \neq 0$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $\frac{|f_{n+1}(x)|}{|f_n(x)|} = |x|^{2n+1}$

$$\xrightarrow{+\infty} \begin{cases} 0 & \text{si } |x| < 1 \\ 1 & \text{si } |x| = 1 \\ +\infty & \text{si } |x| > 1 \end{cases}$$

• Si  $|x| < 1$ : Par d'Alembert,  $\sum f_n(x)$  CVG ABS

• Si  $|x| > 1$ : Par d'Alembert,  $\sum f_n(x)$  DVG

• Si  $x = 1$ :  $f_n(1) = 1$  donc  $\sum f_n(1)$  DVG

• Si  $x = -1$ :  $f_n(-1) = (-1)^{n^2}$  donc  $\sum f_n(-1)$  DVG

CL:  $\sum f_n(x)$  CVG  $\Leftrightarrow |x| < 1$ ,  $D_f = ]-1, 1[$



2) Soit  $x \in [\frac{1}{2}, 1[$ ,  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $t \mapsto x^{t^2} = e^{t^2 \ln(x)}$   
 $g \downarrow$ , prenons  $(t_1, t_2) \in \mathbb{R}_+$ ,  $t_1 \leq t_2$  donc  $t_1^2 \leq t_2^2$   
 Alors  $t_1^2 \ln(x) \geq t_2^2 \ln(x)$  ( $\ln(x) < 0$ )  
 donc  $g(t_1) \geq g(t_2)$  ( $\nearrow$  de exp)

• Soit  $K \in \mathbb{N}^*$ ,  $\int_0^{K+1} g(t) dt \leq g(t) \leq \int_0^K g(t) dt$   
 Soit  $n \in \mathbb{N}$ , en sommant et par chabes,  
 $\int_1^{n+1} e^{t^2 \ln(x)} dt \leq \sum_{k=1}^n x^{k^2} \leq \int_0^n e^{t^2 \ln(x)} dt$

• En appliquant le changement de variable,  $u = t \sqrt{\ln(\frac{1}{x})}$   
 $1 + \int_{\frac{1}{\sqrt{\ln(\frac{1}{x})}} \sqrt{\ln(\frac{1}{x})} e^{-u^2} du \leq \sum_{k=0}^n x^{k^2} \leq \int_0^n \frac{1}{\sqrt{\ln(\frac{1}{x})}} e^{-u^2} du + 1$   
 $\xrightarrow{+\infty} \int_{+\infty}^{+\infty} \frac{e^{-u^2} du}{\sqrt{\ln(\frac{1}{x})} \sqrt{\ln(\frac{1}{x})}} \xrightarrow{+\infty} f(x) \xrightarrow{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u^2} du}{\sqrt{\ln(\frac{1}{x})}}$

Par passage limite: (illégal?)

$$\frac{1}{\sqrt{\ln(\frac{1}{x})}} \int_{+\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du + 1 \leq f(x) \leq \sqrt{\frac{\pi}{2\ln(\frac{1}{x})}} + 1$$

$$\sim \sqrt{\frac{\pi}{2\ln(\frac{1}{x})}} \quad \sim \sqrt{\frac{\pi}{2\ln(\frac{1}{x})}}$$

Par encadrement,  $f(x) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2\ln(\frac{1}{x})}}$

#### Exercice 14

1) Soit  $n \in \mathbb{N}$

$$B_n(f_0) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1 x^k (1-x)^{n-k} = (x+1-x)^n = 1$$

$$B_n(f_1) = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} x^k (1-x)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^{k+1} (1-x)^{n-k-1} = x \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^k (1-x)^{n-k-1}$$

$$= x (x+1-x)^{n-1} = x$$



$$\begin{aligned}
 B_n(f_2) &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f_2\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k} \\
 &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{k}{n}\right)^2 x^k (1-x)^{n-k} \\
 &= \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\
 &= \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^n (k(k-1) + k) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\
 &= \frac{1}{n^2} \left( \underbrace{\sum_{k=0}^n k(k-1) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}}_P + \underbrace{\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}}_{nX} \right)
 \end{aligned}$$

Capitaine / Vice  
Soit  $k \in \mathbb{I}^2, n \mathbb{I}$ ,  
 $k(k-1) \binom{n}{k} = n(n-1) \binom{n-2}{k-2}$

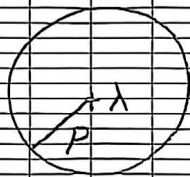
$$\begin{aligned}
 \rightarrow P &= \sum_{k=2}^n n(n-1) \binom{n-2}{k-2} x^k (1-x)^{n-k} \\
 &= n(n-1) \sum_{k=2}^n \binom{n-2}{k-2} x^k (1-x)^{n-k} \\
 &= n(n-1) x^2 \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\
 &= n(n-1) x^2 \quad \left. \begin{array}{l} \text{changement} \\ \text{variable} \end{array} \right\} \downarrow \dots \text{Newton}
 \end{aligned}$$

$$\text{Donc } B_n(f_2) = x^2 + \frac{x(1-x)}{n}$$

### Remarque

- $D_n' = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mid M \text{ diagonalisable sur } \mathcal{M}_n(\mathbb{C})\}$
- $\overline{D_n'} = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$
- $D_n' = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mid |\text{Spec}_{\mathbb{C}}(M)| = n\}$

↳  $P \in \mathbb{C}[X]$  de degré  $n$  et unitaire (e.g.,  $P = \chi_A$ ,  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ )



$$\begin{array}{l} \lambda \in \mathbb{C} \\ p > 0 \end{array}$$

$$D(\lambda, p) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - \lambda| < p\}$$

$$P \text{ a une racine dans } D(\lambda, p) \Leftrightarrow |P(\lambda)| < p^n$$