

Ex 10. Échange limite- $\int$ avec la convergence uniforme

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$

$$(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{C}^0([a; b], \mathbb{R})^{\mathbb{N}}$$

$$f \in \mathcal{F}([a; b], \mathbb{R}) \quad \text{tq} \quad f_n \xrightarrow[\mathcal{C}^0]{\text{cu}} f$$

Montrer que $\int_a^b f_n(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) dt$

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f_n(t) dt - \int_a^b f(t) dt \right| &= \left| \int_a^b (f_n(t) - f(t)) dt \right| \\ &\stackrel{\text{linéarité de l'intégrale}}{\leq} \int_a^b |f_n(t) - f(t)| dt \quad (\text{inégalité triangulaire}) \\ &\leq \int_a^b \|f_n - f\|_{\infty} dt \\ &\leq \int_a^b \|f_n - f\|_{\infty} dt \\ &= \underbrace{(b-a)}_{\text{constant}} \underbrace{\|f_n - f\|_{\infty}}_{\xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0} = o(1) \quad (f_n \xrightarrow[\mathcal{C}^0]{\text{cu}} f) \end{aligned}$$

Par théorème des Gendarmes,

$$\left| \int_a^b f_n - \int_a^b f \right| \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathbb{R}} 0 \quad \text{donc}$$

$$\int_a^b f_n(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) dt \quad \text{càd}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\int_a^b f_n \right) = \int_a^b \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n \right)$$

2^{ème} solution :

$$T : (C^0([a; b], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty) \longrightarrow (\mathbb{R}, |\cdot|)$$
$$f \longmapsto \int_a^b f$$

est linéaire.

• Soit $f \in C^0([a; b], \mathbb{R})$

$$\begin{aligned} |T(f)| &\leq \int_a^b |f(t)| dt \\ &\leq \|f\|_\infty (b-a) \\ &\text{indép. de } f \end{aligned}$$

Par caractérisation de la continuité des applications linéaires, T est continue.

Ainsi, soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in C^0([a; b], \mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ tq

$$f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\|\cdot\|_\infty} f \in C^0([a; b], \mathbb{R}),$$

$$T(f_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} T(f)$$

$$\text{càd } \int_a^b f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \int_a^b f$$

Calcul de la norme d'opérateur :

$$\|T\| = \sup_{\substack{f \in C^0([a; b], \mathbb{R}) \\ \|f\|_\infty \leq 1}} |T(f)| = \sup_{\substack{f \in C^0([a; b], \mathbb{R}) \\ \|f\|_\infty \leq 1}} \left| \int_a^b 1 \right|$$

On sait que si $f \in \mathcal{C}^0([a; b], \mathbb{R})$ vérifie $\|f\|_\infty \leq 1$,
 alors $|T(f)| \leq b-a$
 indép. de f

Par passage au sup, dans $\mathcal{C}^0([a; b], \mathbb{R})$
 $\|T\| \leq b-a$

Or, $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ est continue et vérifie $\|f\|_\infty \leq 1$
 $t \mapsto 1$

$T(f) = b-a$ donc $\|T\| \geq b-a$ et

$$\|T\| = b-a.$$

Rq : Topologie
 matricielle

• $D'_n = \{M \in M_n(\mathbb{C}) : M \text{ diagonalisable sur } M_n(\mathbb{C})\}$

• $\overline{D'_n} = M_n(\mathbb{C})$

• $D'_n = \{M \in M_n(\mathbb{C}) : |\text{Spec}_{\mathbb{C}}(M)| = n\}$

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré n et unitaire ($P = \lambda_A, A \in M_n(\mathbb{C})$),

$$\left(\lambda \in \mathbb{C} : \begin{matrix} \lambda \in \mathbb{C} \\ p > 0 \end{matrix} \right) : D(\lambda, p) = \{z \in \mathbb{C} : |z - \lambda| \leq p\}$$

P a une racine dans $D(\lambda, p) \iff |P(\lambda)| \leq p^n$